1968

УДК – 517.535.4

О ПОЛИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ, РАВНЫХ ПО МОДУЛЮ

М. Ф. ЗУЕВ

1. М. Б. Балк [1] нашел общий вид полианалитических функций, имеющих в данной области постоянный модуль. Настоящая заметка посвящена обобщению этого результата.

Введем, следуя М. Б. Балку (см. [2], гл. VI), некоторые определения. Ниже буква z (если не будет особо оговорено) означает точку p-мерного пространства C^p:

$$z=(z_1, z_2, \ldots, z_p).$$

Через $\bar{z}$ обозначаем точку, комплексно сопряженную точке z, то есть точку $(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots, \bar{z}_p)$.

Пусть $n=(n_1, n_2, \ldots, n_p)$ – p-мерный индекс; $p\geqslant 1$. Функция $f(z)$ называется полианалитической порядка n (или n-аналитической) в некоторой односвязной области $D\subset C^p$, если она допускает в D представление вида:

$$f(z)=\sum_{k=0}^{n-1} f_k(z)\,\bar{z}^k,$$

где все $f_k(z)$ – аналитические в D функции.

Мы будем также рассматривать функции более общего вида – так называемые сопряженно-аналитические функции. Функция $\varphi(z)$ называется сопряженно-аналитической в точке $a\in C^p$, если существует такая окрестность $\delta(a)$ точки a, в которой $\varphi(z)$ представима в виде следующего ряда:

$$\varphi(z)=\sum_{\nu,\,k=0}^{\infty} a_\nu^{(k)}(z-a)^\nu(\bar{z}-\bar{a})^k,$$

где $a_\nu^{(k)}=\mathrm{const}$.

Можно считать сходимость последнего ряда в $\delta(a)$ абсолютной и равномерной. Функция $\varphi(z)$ называется сопряженно-аналитической на множестве M, если она сопряженно-аналитична в каждой точке этого множества.

В дальнейшем будет неоднократно использовано следующее.

Предложение 1. Если в окрестности δ точки $a\in C^p$ сопряженно-аналитическая функция $f(z)$ является сужением на „плоскость“ $w=\bar{z}$ некоторой функции $F(z, w)$, аналитической в окрестности Δ точки $(a, \bar{a}) \in C^{2p}$, и если $f(z) \equiv 0$ в δ, то $F(z, w) \equiv 0$ в Δ. (Доказательство см., например, [3], стр. 55.)

2. **Теорема 1.** *Для того, чтобы две n-аналитические функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ имели равные модули в области $D \subset C^p$, необходимо и достаточно, чтобы они были представимы в виде:*

$$f(z) = \psi(z)\, P(z),$$

$$\varphi(z) = \lambda \psi(z)\, \overline{P(z)},$$

где $\psi(z)$ — полианалитическая в D функция, $P(z)$ — полином относительно z и $\bar{z}$, $\lambda = \text{const}$, $|\lambda| = 1$.

Доказательству предпошлем следующую лемму.

Лемма. *Пусть $P(z, w)$ и $Q(z, w)$ — взаимно простые полиномы от $p+q$ переменных $z_1, z_2, \ldots, z_p, w_1, w_2, \ldots, w_q$; $F(z, w)$ и $\Phi(z, w)$ — полиномы по w с голоморфными по z в области $D \subset C^p$ коэффициентами.*

Тогда, если в $D \times C^q$

$$F(z, w)\, Q(z, w) \equiv \Phi(z, w)\, P(z, w), \tag{1}$$

то функция

$$\Psi(z, w) = F(z, w) / P(z, w) \tag{2}$$

является полиномом по w с коэффициентами, голоморфными в D.

Доказательство. Покажем сначала, что функция (2) голоморфна в области $D \times C^q$. Если $P(z_0, w_0) = 0$, а $Q(z_0, w_0) \neq 0$, то из (1) следует, что в некоторой окрестности точки (z_0, w_0)

$$F(z, w) = P(z, w)\, \Phi_1(z, w),$$

где $\Phi_1(z, w)$ — голоморфная в этой окрестности функция. Значит, функция (2) аналитически продолжается в точку (z_0, w_0).

Рассмотрим теперь те точки, где $P(z, w) = Q(z, w) = 0$. Всякая такая точка является точкой неопределенности для мероморфной функции $P(z, w)/Q(z, w)$ Действительно, пусть $P(z_1, w_1) = Q(z_1, w_1) = 0$, но точка (z_1, w_1) не является точкой неопределенности для мероморфной функции P/Q. Тогда по крайней мере одна из функций P/Q, Q/P голоморфна в некоторой окрестности Δ точки (z_1, w_1). Значит, нули одного из полиномов P и Q, лежащие внутри Δ, являются нулями другого. Но в таком случае эти полиномы не могут быть взаимно простыми ([4], стр. 199).

Из теории аналитических функций многих переменных известно, что если функция нескольких переменных аналитична в некоторой области G всюду, кроме, быть может, множества точек неопределенности некоторой мероморфной в G функции, то она аналитически продолжается во всю область G ([5], стр. 58). Следовательно, функцию (2) можно аналитически продолжить в область $D \times C^q$.

Функция (2) не может иметь других особенностей, кроме полюсов и точек неопределенности. Но в окрестности полюса функция не ограничена, а в любой окрестности точки неопределенности имеются полюса. Так что функция

(2) голоморфна в области $D\times C^q$, иначе ее аналитическое продолжение в эту область невозможно.

Теперь убедимся в том, что функция (2) — полином по w. Зафиксируем некоторое i $(1\leqslant i\leqslant q)$. Так как полиномы $P(z, w)$ и $Q(z, w)$ взаимно просты, то найдутся такие полиномы $S(z, w), T(z, w)$ и $R(z, w_1, w_2, \ldots, w_{i-1}, w_{i+1}, \ldots$ $\ldots, w_q)\not\equiv 0$, что имеет место тождество:

$$PS+Q\cdot T\equiv R$$

(см., например, [4], стр. 197). Отсюда следует существование области $\delta_i\subset$ $\subset D\times C^{q-1}$ такой, что для любой фиксированной точки $(z, w_1, \ldots, w_{i-1}, w_{i+1}, \ldots$ $\ldots, w_q)$ из δ_i полиномы от w_i P и Q не имеют общих нулей (ибо если для некоторой точки $b\in D\times C^{q-1}$ полиномы от w_i P и Q имеют общий нуль, то, в силу последнего тождества, точка b является нулем полинома R). Значит, для любой фиксированной точки из δ_i $P(w_i)$ и $Q(w_i)$ взаимно просты как полиномы от w_i, и из (1) следует, что полином $P(w_i)$ делит полином $F(w_i)$, то есть функция (2) является полиномом по w_i (степени не выше некоторого фиксированного n_i). Так как $\Psi(z, w)$ — голоморфная функция в области $D\times C^q$, то она является полиномом по w_i для любой точки, принадлежащей области $D\times C^{q-1}$. Перебирая все $i\,(1\leqslant i\leqslant q)$, убедимся таким же образом, что функция (2) является полиномом по каждому w_i в отдельности.

Разложим функцию (2) в окрестности некоторой точки $(z^0, w^0)\in D\times C^q$ в степенной ряд. Легко убедиться, сгруппировав члены ряда по степеням $(w_i-w_i^0)$, что разность $w_i-w_i^0$ входит в разложение со степенью, не превышающей n_i при каждом фиксированном i $(1\leqslant i\leqslant q)$. Если же теперь сгруппировать члены ряда по степеням w, то получим представление функции (2) в окрестности точки (z^0, w^0) в виде полинома от w с голоморфными в окрестности точки z^0 коэффициентами. Так как такое представление имеет место в окрестности каждой точки $(z, w)\in D\times C^q$ и, как легко видеть, оно единственно, то функция (2) представима в виде полинома от w с коэффициентами, голоморфными в D. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Достаточность очевидна. Докажем необходимость. Будем считать, что $f(z)\not\equiv 0$ (в противном случае теорема очевидна).

Пусть

$$f(z)=\sum_{i=0}^{n-1} f_i(z)\,\bar{z}^i$$

и

$$\varphi(z)=\sum_{i=0}^{n-1} \varphi_i(z)\,\bar{z}^i.$$

Введем обозначения:

$$\tilde{f}_i(z)=\overline{f_i(\bar{z})},$$

$$\tilde{\varphi}_i(z)=\overline{\varphi_i(\bar{z})}$$

($\overline{f_i(z)}, \overline{\varphi_i(z)}$ — сопряженные к $f_i(z), \varphi_i(z)$; $0 \leqslant i \leqslant n-1$), и рассмотрим функции от $2p$ независимых переменных

$$F(z, w) = \sum_{i=0}^{n-1} f_i(z) w^i, \quad \Phi(z, w) = \sum_{i=0}^{n=1} \varphi_i(z) w^i, \tag{3}$$

а также

$$\tilde{F}(z, w) = \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{f}_i(w) z^i, \quad \tilde{\Phi}(z, w) = \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\varphi}_i(w) z^i.$$

Очевидно, функции $\tilde{f}_i(w), \tilde{\varphi}_i(w)$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$ аналитичны в области $\tilde{D}\{w : : w=\bar{z},\ z \in D\}$. Следовательно, функции $F(z, w)$, $\Phi(z, w)$, $\tilde{F}(z, w)$, $\tilde{\Phi}(z, w)$ аналитичны в $D \times \tilde{D}$. По условию равенство

$$F(z, w)\, \tilde{F}(z, w) = \Phi(z, w)\, \tilde{\Phi}(z, w)$$

имеет место при $w=\bar{z}$, $z \in D$. В силу предложения 1 это равенство тождественно выполняется в $D \times \tilde{D}$, то есть

$$F(z, w) \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{f}_i(w) z^i \equiv \Phi(z, w) \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\varphi}_i(w) z^i. \tag{4}$$

Выберем такую область

$$\delta \times \tilde{\delta} \subset D \times \tilde{D} \qquad (\tilde{\delta} = \{w : w=\bar{z},\ z \in \delta\}),$$

в которой функция $F(z, w)/\Phi(z, w)$ аналитична. Это всегда можно сделать, так как $\Phi(z, \bar{z}) \not\equiv 0$.

Из (3) и (4) видно, что в $\delta \times \tilde{\delta}$ аналитическая функция

$$F(z, w)/\Phi(z, w)$$

рациональна по w при фиксированном $z \in \delta$ и рациональна по z при $w \in \tilde{\delta}$. Следовательно, она рациональна по совокупности переменных (см. [3], стр. 277), то есть в $\delta \times \tilde{\delta}$

$$F(z, w)\, Q(z, w) \equiv \Phi(z, w)\, P(z, w), \tag{5}$$

где $P(z, w)$ и $Q(z, w)$ — полиномы от z и w; будем в дальнейшем считать их взаимно простыми. Продолжая аналитически тождество (5), получим его справедливость всюду в области $D \times \tilde{D}$. На основании леммы заключаем, что функция

$$\Psi(z, w) = F(z, w)/P(z, w) = \Phi(z, w)/Q(z, w)$$

является полиномом по w с коэффициентами, голоморфными в D.

Пусть $w=\bar{z}$. Тогда из (4) и (5) получаем:

$$\frac{\overline{P(z, \bar{z})}}{\overline{Q(z, \bar{z})}} \equiv \frac{\overline{\left(\sum_{i=0}^{n-1} f_i(z) \bar{z}^i\right)}}{\overline{\left(\sum_{i=0}^{n-1} \varphi_i(z) \bar{z}^i\right)}} \equiv \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \tilde{f}_i(\bar{z}) z^i}{\sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\varphi}_i(\bar{z}) z^i} \equiv \frac{Q(z, \bar{z})}{P(z, \bar{z})},$$

то есть

$$P(z,\ \bar z)\,\overline{P(z,\ \bar z)} \equiv Q(z,\ \bar z)\,\overline{Q(z,\ \bar z)}. \tag{6}$$

Вернемся к переменным z и w. По предложению 1

$$P(z,\ w)\,\tilde P(z,\ w) \equiv Q(z,\ w)\,\tilde Q(z,\ w),$$

где $\tilde P(z, w)$ и $\tilde Q(z, w)$ — полиномы от z и w, полученные заменой в $\overline{P(z, \bar z)}$ и $\overline{Q(z, \bar z)}$ $\bar z$ на w. Так как $P(z, w)$ и $Q(z, w)$ взаимно просты, то $\tilde P(z, w)$ делится на $Q(z, w)$, то есть $\tilde P(z, w) \equiv \lambda(z, w)\, Q(z, w)$. Но, как следует из (6), степени полиномов $P(\tilde z, w)$ и $Q(z, w)$ равны. Значит, $\lambda(z, w) = \lambda_0 = \mathrm{const}$, причем из (6) видим, что $|\lambda_0| = 1$. Итак, $\overline{P(z, \bar z)} = \lambda_0 Q(z, \bar z)$.

Полагая теперь в (5) $w = \bar z$ и учитывая последнее равенство, получаем:

$$F(z, \bar z) = f(z) = \psi(z)\, P(z),$$

$$\Phi(z, \bar z) = \varphi(z) = \lambda \psi(z)\, \overline{P(z)},$$

где $\psi(z) = \Psi(z,\ w)\,|_{w=\bar z}$ — полианалитическая в D функция; $\lambda = \frac{1}{\lambda_0}$.

Теорема доказана.

Следствие 1. *Если полианалитическая функция $f(z)$ совпадает в области D по модулю с аналитической функцией $\varphi(z)$, то*

$$f(z) = \lambda \varphi(z)\, \frac{\overline{Q(z)}}{Q(z)},$$

где $Q(z)$ — полином, зависящий только от z, $\lambda = \mathrm{const}$, $|\lambda| = 1$.

При $\varphi(z) = \mathrm{const}$ и $p = 1$ получаем теорему М. Б. Балка [1]. Следующее следствие при $p = 1$ также получено М. Б. Балком [1].

Следствие 2. *Если полином $P(x, y)$ вещественных переменных $x = (x_1, \ldots, x_p)$, $y = (y_1, \ldots, y_p)$ имеет в области $D \subset R^{2p}$ модуль, равный модулю аналитической функции $\varphi(z)$, то $P(x, y)$ и $\varphi(z)$ представимы в виде:*

$$P(x,\ y) = \lambda\, q(z)\, \overline{Q(z)},$$

$$\varphi(z) = q(z)\, Q(z),$$

где $q(z)$ и $Q(z)$ — полиномы от z.

Если $P(x, y)$ вещественный полином, то

$$P(x, y) = A\, |q(z)|^2,$$

$\varphi(z) = B\,[q(z)]^2$, *A и B — константы,* $|A| = |B|$.

3. Рассмотрим теперь сопряженно-аналитические функции, имеющие постоянный модуль в области.

Не всякую сопряженно-аналитическую в некоторой области D функцию W постоянного модуля возможно, по аналогии с n-аналитическими, представить в виде

$$W = \lambda \overline{f(z)} / f(z),$$

где $f(z)$ аналитична в D. Например, функция $W=e^{iz\bar z}$ имеет постоянный модуль на всей плоскости, но если бы имело место представление

$$e^{iz\bar z}\equiv\lambda\overline{f(z)}/f(z),\quad\text{то есть}\quad e^{iz\bar z}\cdot f(z)\equiv\lambda\overline{f(z)},$$

то, разложив функции W и $\overline{f(z)}$ в степенной ряд по z и $\bar z$ и приравнивая в последнем тождестве члены, не содержащие z, получили бы: $f\equiv(z)$const, что невосможно.

Для сопряженно-аналитических функций верна следующая теорема.

Теорема 2. *Для того, чтобы сопряженно-аналитическая функция $f(z)\not\equiv 0$ имела в односвязной области D постоянный модуль c, необходимо и достаточно, чтобы она была представима в D в виде:*

$$f(z)=\exp\varphi(z),$$

где $\varphi(z)$ — сопряженно-аналитическая в D функция, вещественная часть которой равна $\ln c$.

Доказательство. Достаточность очевидна. Докажем необходимость. Разложим функцию $f(z)$ в круговом полицилиндре $\delta(z_0)\subset D$ с центром в произвольной точке $z_0\in D$ в ряд

$$f(z)=\sum_{\nu,\,k=0}^{\infty}a_\nu^{(k)}(z-z_0)^\nu(\bar z-\bar z_0)^k.$$

В силу абсолютной и равномерной сходимости этого ряда функция $\overline{f(z)}$, сопряженная с $f(z)$, также сопряженно-аналитична в $\delta(z_0)$ и, кроме того, в $\delta(z_0)$ $f(z)\cdot\overline{f(z)}\equiv c^2$.

Рассмотрим ряды

$$\sum_{\nu,\,k=0}^{\infty}a_\nu^{(k)}(z-z_0)^\nu(w-w_0)^k,\qquad\sum_{\nu,\,k=0}^{\infty}\bar a_\nu^{(k)}(z-z_0)^k(w-w_0)^\nu,$$

где $w_0=\bar z_0$. По теореме Абеля они сходятся в полицилиндре $\delta(z_0)\times\tilde\delta(w_0)$, $\tilde\delta(w_0)=\{w\colon w=\bar z,\ z\in\delta(z_0)\}$ и их суммы $F_0(z,w)$, $\tilde F_0(z,w)$ — голоморфные функции переменных z и w в этом полицилиндре. Таким образом, для каждой точки $z_0\in D$ указаны полицилиндр $\delta(z_0)\times\tilde\delta(\bar z_0)=P_{z_0}$ с центром в точке $(z_0,\bar z_0)$ и пара голоморфных в нем функций.

Используя предложение 1, легко показать, что существуют голоморфные в области $G=\bigcup_{z\in D}P_z$ функции $F(z,w)$ и $\tilde F(z,w)$, которые для каждой точки $z_0\in D$ совпадают в полицилиндре P_{z_0} с функциями $F_0(z,w)$ и $\tilde F_0(z,w)$ соответственно. Из того же предложения следует, что $F(z,w)\cdot\tilde F(z,w)\equiv c^2$ в G и, значит, $F(z,w)\neq 0$ в G.

Рассмотрим функцию $\operatorname{Ln}F(z,w)$. Покажем, что в области G можно выделить однозначную ветвь этой функции. Как известно, полицилиндр (круговой), является односвязной областью. Следовательно, в любом полицилиндре P_z можно выделить однозначную ветвь функции $\operatorname{Ln}F(z,w)$ (по теореме о монодромии, см. [6], стр. 57).

Пусть (z',w') и (z'',w'') — две точки из G, принадлежащие соответственно полицилиндрам P_{z_1} и P_{z_2} с центрами $(z_1,\bar z_1)$ и $(z_2,\bar z_2)$. Пусть, далее, $\Phi_1(z,w)$ —

однозначная ветвь функции Ln $F(z, w)$ в полицилиндре Pz_1 и γ-путь в G с началом в точке (z', w') и концом в точке (z'', w''). Можно выбрать конечное число полицилиндров P_z, объединение которых содержит путь γ (мы занумеруем эти полицилиндры, начиная с P_{z_1}, в порядке прохождения их путем γ; каждый полицилиндр считается столько раз, сколько он встречается при движении по γ от (z', w') к (z'', w'')). Если γ' — любой другой путь с началом в полицилиндре P_{z_1} и концом в полицилиндре P_{z_2}, принадлежащий вышеуказанным полицилиндрам и проходящий их в той же последовательности, что и γ, то, очевидно, голоморфное продолжение ветви $\Phi_1(z, w)$ вдоль пути γ' равносильно продолжению вдоль γ. В частности, можно путь γ заменить путем γ', который соединяет точки $(z_1, \bar{z}_1)$, $(z_2, \bar{z}_2)$ и лежит в плоскости $w=\bar{z}$. Но p-мерная область $G \cap \{w=\bar{z}\}$ односвязна (в силу односвязности области D). Следовательно, любые два пути с общими концами, лежащие в этой области, гомотопны, и по теореме о монодромии результат голоморфного продолжения по ним один и тот же. А так как любой путь, соединяющий точки (z', w') и (z'', w''), сводится к пути, лежащему в области $G \cap \{w=\bar{z}\}$, с началом в точке $(z_1, \bar{z}_1)$ и концом в точке $(z_2, \bar{z}_2)$, то в результате продолжения ветви $\Phi_1(z, w)$ мы получим однозначную голоморфную в G функцию $\Phi(z, w)$.

Из вышесказанного следует, что в области G функция $F(z, w)$ представима в виде $F(z, w)=\exp\Phi(z, w)$.

При $w=\bar{z}$ получаем:

$$F(z, \bar{z})=f(z)=\exp\Phi(z, \bar{z})=\exp\varphi(z),$$

где $\varphi(z)$ — сопряженно-аналитическая в D функция. Так как

$$|f(z)|=|\exp\varphi(z)|=c,$$

то $\mathrm{Re}\,\varphi(z)\equiv\ln c$, и теорема доказана.

Замечание. Утверждение о том, что $\varphi(z)$ имеет постоянную вещественную часть, можно заменить другим, ему эквивалентным. Для этого напомним одно определение.

Говорят, что ряд $\sum\limits_{\nu, k=0}^{\infty} a_\nu^{(k)} x^\nu y^k$ имеет эрмитову матрицу коэффициентов, если $a_\nu^{(k)}=\bar{a}_k^{(\nu)}$ для любых ν и k. Аналитическая функция $f(x, y)$ имеет эрмитову матрицу коэффициентов в области D, если в каждой точке этой области разложение функции $f(x, y)$ в ряд имеет эрмитову матрицу коэффициентов.

Нетрудно показать (см., например, [2]), что сопряженно-аналитическая функция тогда и только тогда вещественна в области D, когда она имеет эрмитову матрицу коэффициентов. Следовательно, функция $\varphi(z)$ из теоремы 2 обладает тем свойством, что функция $i[\varphi(z)-\ln c]$ имеет эрмитову матрицу коэффициентов.

Следствие 1. *Если целая функция $F(z, w)$ комплексных переменных $z=(z_1, z_2, \ldots, z_p)$, $w=(w_1, w_2, \ldots, w_p)$ имеет постоянный модуль $c\neq0$ на неаналитической „плоскости“ $w=\bar{z}$, то она представима в виде:*

$$F(z, w)=\exp\Phi(z, w),$$

причем $i[\Phi(z, w)-\ln c]$ *— целая функция с эрмитовой матрицей коэффициентов.*

Следствие 2. *Если целая функция* $f(z)\not\equiv 0$ *имеет постоянный модуль на „прямой"* $z=\bar{z}$, *то*

$$f(z)=\exp\varphi(z),$$

где $\varphi(z)$ *— целая функция*.*

Доказательство. Рассмотрим целую функцию $2p$ комплексных переменных $F(z, w)=f(z)\cdot f(w)$. На множестве $\{z=\bar{z}\}\times\{w=\bar{w}\}$ функция $F(z, w)$ имеет постоянный модуль. Сделаем замену переменных:

$$Z=z+iw, \quad W=z-iw.$$

Функция

$$\Psi(Z, W)=F\left(\frac{Z+W}{2}, \frac{Z-W}{2i}\right) -$$

целая относительно Z и W и на плоскости $W=\bar{Z}$ имеет постоянный модуль. По следствию 1

$$\Psi(Z, W)=\exp\Phi(Z, W)\neq 0.$$

Значит, и $F(z, w)\neq 0$, то есть $f(z)=\exp\varphi(z)$.

Замечание. Для полианалитических функций порядка $n=(n_1, n_2, \ldots, n_p)$, где хотя бы одно $n_i>1$, последнее свойство уже не имеет места. Так, например, полианалитическая функция порядка $n=(1, 2)$

$$f(z_1, z_2)=\exp(iz_1)+z_2-\bar{z}_2$$

имеет постоянный модуль на „прямой" $z=\bar{z}$, но, тем не менее, принимает нулевые значения.

4. Условия предыдущих теорем можно несколько ослабить на основании следующей простой теоремы.

Теорема 3. *Если две сопряженно-аналитические в области* D *функции* $f(z)$ *и* $\varphi(z)$ *имеют равные модули на подобласти* $\Delta\subset D$, *то*

$$|f(z)|\equiv|\varphi(z)|$$

всюду в D.

5. Теоремы 1 и 3 позволяют получить критерий вырожденности отображения, осуществляемого полианалитическими функциями одного переменного (отображение называется вырожденным, если оно переводит некоторую область в множество без внутренних точек).

Известно, что необходимым и достаточным условием вырожденности отображения** $W=U(x, y)+iV(x, y)$, дифференцируемого в области Δ, является равенство нулю якобиана

$$I_{W|z}=\frac{D(U, V)}{D(x, y)}.$$

* В случае одного переменного здесь достаточно потребовать, чтобы функция $f(z)$ имела постоянный модуль на множестве E, принадлежащем некоторой прямой l и имеющем на l предельную точку.

** В дальнейшем через $z=x+iy$ обозначаем точку комплексно-одномерной плоскости.

Известно также, что

$$I_{W/z}=|W_z|^2-|W_{\bar z}|^2.$$

Пусть функция

$$W=f(z)=\sum_{k=0}^{n} f_k(z)\,\bar z^k,$$

полианалитическая порядка $n+1$ в области D, осуществляет вырожденное отображение. Тогда

$$I_{W/z}=|W_z|^2-|W_{\bar z}|^2\equiv 0$$

в области $\Delta\subset D$. По теореме 3 это тождество распространяется на всю область D, то есть

$$\left|\sum_{k=0}^{n} f_k'(z)\,\bar z^k\right|^2\equiv\left|\sum_{k=0}^{n} kf_k(z)\,\bar z^{k-1}\right|^2$$

в D. Тогда по теореме 1

$$W_z=\psi(z)P(z),\quad W_{\bar z}=\lambda\psi(z)\overline{P(z)}. \tag{7}$$

Отсюда заключаем, что $P(z)$ имеет точную степень не выше $n-1$ по z и не выше n по $\bar z$, то есть

$$P(z)=\sum_{k=0}^{n} p_k(z)\bar z^k,$$

где

$$p_j(z)=\sum_{i=0}^{n-1} a_i^j z^i \qquad (j=0,\ 1,\ \ldots,\ n).$$

Из (7) имеем также

$$\lambda\sum_{k=0}^{n} f_k'(z)\,\bar z^k\cdot\sum_{k=0}^{n-1} q_k(z)\,\bar z^k=\sum_{k=0}^{n} kf_k(z)\,\bar z^{k-1}\cdot\sum_{k=0}^{n} p_k(z)\,\bar z^k,$$

где

$$q_i(z)=\sum_{j=0}^{n} \bar a_j^i z^j \qquad (i=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1).$$

Так как в обеих частях последнего тождества полианалитические функции, то коэффициенты при соответствующих степенях $\bar z$ тождественно равны. Таким образом, компоненты функции $f(z)$ удовлетворяют следующей системе из $2n$ уравнений:

$$\begin{aligned}
&\lambda f_n'(z)\,q_{n-1}(z)=nf_n(z)\,p_n(z),\\
&\lambda f_{n-1}'(z)q_{n-1}(z)+\lambda f_n'(z)q_{n-2}(z)=(n-1)f_{n-1}(z)\,p_n(z)+nf_n(z)p_{n-1}(z),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (8)\\
&\lambda f_0'(z)\,q_1(z)+\lambda f_1'(z)\,q_0(z)=f_1(z)\,p_1(z)+2f_2(z)\,p_0(z),\\
&\lambda f_0'(z)\,q_0(z)=f_1(z)\,p_0(z).
\end{aligned}$$

Обратно, если найдется такая числовая матрица $\|a_i^j\|$ порядка $n\times n+1$, что компоненты $(n+1)$ – аналитической в D функции $f(z)=\sum_{k=0}^{n} f_k(z)\,\bar z^k$ удовлетворяют уравнениям системы (8), где

$$p_j(z)=\sum_{i=0}^{n-1} a_i^j z^i \quad (j=0,\ 1,\ \ldots,\ n), \qquad q_i(z)=\sum_{j=0}^{n} \bar a_j^i z^j \quad (i=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1),$$

то функция $f(z)$ осуществляет вырожденное отображение.

Решая систему (8) в случае бианалитических функций ($n=1$), получим, что бианалитическая функция, осуществляющая вырожденное отображение, представима в одном из следующих видов:

$$W=A\,(e^{i\alpha}z+\bar z)+B,$$

$$W=A\,(z+c)^{\gamma}(\bar z+\bar c)+B,$$

где $A,\ B,\ c,\ \alpha,\ \gamma$ – константы, $\operatorname{Im}\alpha=0$, $|\gamma|=1$. Последнее утверждение получил ранее М. Б. Балк [7].

Смоленский педагогический институт
им. К. Маркса

Поступило в редакцию
15. III. 1968

Литература

1. М. Б. Балк, Полианалитические функции постоянного модуля, Лит. мат. сб., VI, № 1 (1966), 31-36.
2. М. Б. Балк, Полианалитические функции, Диссертация, 1966.
3. С. Бохнер, У. Мартин, Функции многих комплексных переменных, ИЛ, 1951.
4. М. Бохер, Введение в высшую алгебру, ОНТИ, 1933.
5. М. Эрве, Функции многих комплексных переменных, Мир, 1965.
6. В. С. Владимиров, Методы теории функций многих комплексных переменных, „Наука", физ.-мат. ред., 1964.
7. М. Б. Балк, Вырожденные бианалитические отображения, Изв. АН Арм. ССР, серия физ.-мат. наук, 17, № 2 (1964).

APIE POLIANALIZINES FUNKCIJAS, LYGIAS PAGAL MODULĮ

M. ZUJEVAS

(Reziumė)

Funkcija

$$W(z)=f_0(z)+\bar z f_1(z)+\ldots+\bar z^{n-1} f_{n-1}(z)$$

vadinama polianalizine srityje D, kai visos $f_i(z)$ joje analizinės.

Gaunama formulė, surišanti dvi bet kurias polianalizines funkcijas, lygias pagal modulį srityje $d\subset D$.

ABOUT POLYANALYTIC FUNCTIONS OF EQUAL MODULUS

M. ZUYEV

(*Summary*)

A function

$$W(z)=f_0(z)+\bar{z}\cdot f_1(z)+\ldots+\bar{z}^{n-1}f_{n-1}(z)$$

is said to be n-analytic in the domain D, if all $f_i(z)$ $(i=0,1,\ldots,n-1)$ are analytic there.

The present note contains a formula, connecting two arbitrary polyanalytic functions, having the same modulus in some domain $d\subset D$.