VIII LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 4
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК

1968

УДК – 517.43

НОРМАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ УРАВНЕНИЙ В СВЕРТКАХ В ПРСТРАНСТВАХ ГЕЛЬДЕРОВЫХ ФУНКЦИЙ

Е. И. ДОЛГОНОС

В ограниченной области $G\subset R^n$ с гладкой границей Γ рассматриваются уравнения в свертках, которые формально можно записать в виде

$$Au_+ = \int A(x, x-y)\, u_+(y)\, dy + Tu_+ = f(x), \qquad x\in G, \tag{1}$$

где $A(x, z)$ – вообще говоря, обобщенная функция по z, $u_+(y)$ – обобщенная функция с носителем в $\bar G$, Tu_+ – подчиненный оператор в (1). Преобразование Фурье по z функции $A(x, z)$: $F_z A(x, z)=\tilde A(x, \xi)$ $(\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \xi_n)=(\xi', \xi_n))$ называется символом оператора Au_+. Будем предполагать, что символ $\tilde A(x, \xi', \xi_n)$ – однородная функция по ξ порядка α, бесконечно дифференцируемая по $x\in\bar G$ и по ξ при $\xi\neq 0$. Если $\tilde A(x, \xi', \xi_n)$ удовлетворяет еще в локальной системе координат условию

$$\frac{\partial^k}{\partial\xi'^k}\tilde A(x, 0, 1)=(-1)^k e^{-\alpha\pi i}\frac{\partial^k}{\partial\xi'^k}\tilde A(x, 0, -1), \quad x\in\bar G, \tag{2}$$

то будем говорить, что $\tilde A(x, \xi', \xi_n)$ принадлежит классу $D_\alpha^{(0)}$. Уравнения вида (1) подробно изучены М. И. Вишиком и Г. И. Эскиным в [1]. В качестве функционального пространства решений $u(x)$ они рассматривали обычное пространство функций Соболева—Слободецкого $H_s(G)$, продолженных нулем вне $\bar G$, а в качестве правых частей $f(x)$ – $H_{s-\alpha}(G)$, где s – любое число. Мы будем рассматривать уравнение (1) в пространствах гельдеровых функций $C^{l+\delta}(G)$, продолженных нулем вне $\bar G$. Функция $u(x)\in C^{l+\delta}(G)$, если $u(x)$ имеет непрерывные производные до порядка $l\geqslant 0$ включительно в G и производные порядка l удовлетворяют условию Гельдера с показателем δ, $0<\delta<1$. Для $u(x)\in C^{l+\delta}(G)$ определим норму

$$\|u\|_{l+\delta}=\sum_{i=1}^{l}\sup|D^i u(x)|+\sup_{h\neq 0}\frac{|D^l u(x+h)-D^l u(x)|}{|h|^\delta}, \tag{3}$$

где верхняя грань берется по всем производным порядка i и по всей области G. Через u_+ будем обозначать функцию, совпадающую с $u(x)$ в G, продолженную нулем вне $\bar G$, через $p^+u(x)$ – оператор сужения $u(x)\in C^{l+\delta}(R^n)$ на полупространство $x_n>0$, через $\Pi^+\tilde u(\xi)$ – образ Фурье функции $p^+u(x)$, продолженной нулем при $x_n\leqslant 0$ $(\tilde u(\xi)=Fu(x))$.

Пусть область G покрыта конечным числом областей $\{\Omega_j\}$. В каждом Ω_j выберем свою локальную систему координат, причем если $\bar\Omega_j$ содержит часть

Γ_j границы Γ, Γ_j должна задаваться уравнением $x_n^{(j)}=0$ ($\{x_i^{(j)}\}$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ — локальные координаты в Ω_j). Пусть $\{\varphi_j(x)\}$ — разбиение единицы, отвечающее покрытию $\{\Omega_j\}$: $\Sigma\varphi_j(x)=1$, $x\in\overline{G}$. Пусть, далее, $\psi_j(x)\in C_0^\infty(R^n)$ $\psi_j(x)\varphi_j(x)=\varphi_j(x)$, $supp\ \psi_j\subset\Omega_j$.

Тогда $Au_+=\Sigma\psi_j A\varphi_j u_+ + Tu_+$. Преобразуем $\psi_j A\varphi_j$ к локальной системе координат, главную часть этого разложения обозначим через A_j, а символ $A_j-\tilde{A}_j(x^{(j)},\xi)$. Предположим, что в каждой локальной системе координат

а) оператор A_j имеет символ $\tilde{A}_j(x^{(j)},\xi)\neq 0$ при $\xi\neq 0$, причем $\tilde{A}_j(x^{(j)},\xi)$ при $x_n^{(j)}=0$ допускает факторизацию: $\tilde{A}_j(x^{(j)},\xi)=\tilde{A}_j^+(x^{(j)},\xi)\ \tilde{A}_j^-(x^{(j)},\xi)$, где $\tilde{A}_j^+$, $\tilde{A}_j^-$ — аналитические функции по ξ_n в полуплоскостях $\mathrm{Im}\,\xi_n>0$ и $\mathrm{Im}\,\xi_n<0$ соответственно, причем $\tilde{A}_j^+\neq 0$ при $\mathrm{Im}\,\xi_n\geqslant 0$, $\tilde{A}_j^-\neq 0$ при $\mathrm{Im}\,\xi_n\leqslant 0$, $\xi\neq 0$. $\tilde{A}_j^+\tilde{A}_j^-$ — с точностью до ограниченного, отличного от 0 множителя однородные функции порядка $\varkappa$ и $\alpha-\varkappa$ соответственно.

Будем предполагать, что порядок однородности $\tilde{A}_j^+$, $\varkappa=\mathrm{ord}\,\tilde{A}_j^+$ — положительное целое число, не зависящее от x;

б) $\tilde{A}_j(x^{(j)},\xi)\in D_\alpha^{(0)}$, если $\Omega_j\cap\Gamma\neq 0$.

Для корректной постановки задачи для уравнения (1) нужно задать $\varkappa$ дополнительных граничных условий

$$B_j u_+\,|_\Gamma=g_j(x'),\quad x'\in\Gamma,\quad 1\leqslant j\leqslant\varkappa, \tag{4}$$

где B_j — оператор свертки.

Пусть $x_0^{(j)}\in\Omega_j$ — произвольная фиксированная точка в Ω_j, $\tilde{B}_j^0(x_0,\xi)$ — символ главной части оператора B_j в локальной системе координат.

Предположим:

в) $\tilde{B}^0{}_j(x,\xi)\in D_{\alpha j}^{(0)}$ в каждой локальной системе координат, если $\Omega_j\cap\Gamma\neq 0$;

г) $\tilde{B}_j^0(x_0,\xi)$ удовлетворяют условию типа Шапиро—Лопатинского:

$$\det\left\|\int_{-\infty}^{\infty}\Pi^+\frac{\tilde{B}_j^{(0)}(x_0,\xi',\xi_n)\,\xi_n^{k-1}}{\tilde{A}_j^+(x_0,\xi',\xi_n)}\,d\xi_n\right\|_{j,k=1}^{\varkappa}\neq 0,\ \text{при}\ \xi'\neq 0. \tag{5}$$

Теорема 1. *В предположениях а), б), в), г), задача* (1), (4) *нормально разрешима при* $u_+(x)\in C^{l+\delta}(G)$, $f(x)\in C^{l+\delta-\alpha}(G)$, $g_j(x')\in C^{l+\delta-\alpha_j}(\Gamma)$ (*где* $l\geqslant\max(\alpha,\alpha_j)$, $l+\delta-\alpha$ *и* $l+\delta-\alpha_j$ — *положительные нецелые числа*) *и справедлива априорная оценка*

$$\|u_+\|_{l+\delta-\alpha}\leqslant C\left\{\|f\|_{l+\delta-\alpha}+\sum_{j=1}^{\varkappa}\|g_j\|_{l+\delta-\alpha_j}+\|u_+\|^{l}{}_{+\delta-\alpha-1}\right\}. \tag{6}$$

Основным моментом доказательства теоремы (1) является изучение граничной задачи с постоянными символами в полупространстве. Пусть $\tilde{A}(\xi)\in D_\alpha^{(0)}$, $\varkappa=\mathrm{ord}\,\tilde{A}_+(\xi)$ — целое положительное число и $\tilde{B}_j(\xi)\in D_{\alpha j}^{(0)}$. Будем предполагать, что операторы с символами $\tilde{A}(\xi)$, $\tilde{B}_j(\xi)$ удовлетворяют условию типа Шапиро—Лопатинского:

$$\det\|b_{jk}\|_{j,k=1}^{\varkappa}=\det\left\|\int_{-\infty}^{\infty}\prod{}^+\frac{\tilde{B}_j(\xi)\,\xi_n^{k-1}}{\tilde{A}_+(\xi)}\,d\xi_n\right\|_{j,k+1}^{\varkappa}\neq 0\quad\text{при}\quad\xi'\neq 0. \tag{7}$$

Рассмотрим задачу

$$P^+Au_+ (x)=f(x),\ x_n>0,\ f\in C^{l+\delta-\alpha}, \qquad (8)$$

$$B_j u_+ \mid_{x_n=0}=g_j (x'),\ 1\leqslant j\leqslant \varkappa,\ g_j\in C_j^{l+\delta-\alpha}. \qquad (9)$$

Методом Винера—Хопфа находим представление решения задачи (8)—(9)

$$\tilde{u}_+ (\xi)= \frac{1}{\tilde{A}_+ (\xi)} \prod{}^+ \frac{\tilde{lf}(\xi)}{\tilde{A}_-(\xi)} \sum_{j=1}^{\varkappa} \tilde{D}_j(\xi)[\tilde{g}_j(\xi') -f_j\ (\xi')], \qquad (10)$$

где

$$D_j(\xi)=\sum_{j=1}^{\varkappa} \frac{b_{jk}^{(1)}(\xi')\,\xi_n^{k-1}}{\tilde{A}_+ (\xi)}$$

$b_{kj}^{(1)}\,\|_{k,\,j=1}^{\varkappa}$ — обратная матрица к $\|\,b_{jk}(\xi')\,\|_{j,\,k=1}^{\varkappa}$, $lf(x)$ — продолжение $f(x)$ на R^n,

$$f_j(\xi')=\lim_{x_n\to 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \prod{}^+ \frac{\tilde{B}_j(\xi)}{\tilde{A}_+(\xi)} \prod{}^+ \frac{\tilde{lf}(\xi)}{\tilde{A}^-(\xi)}\, e^{ix_n\xi_n}\,d\xi_n.$$

Нормальная разрешимость задачи (1)—(4) следует из существования регуляризатора и априорной оценки для (8)—(9). Регуляризатор строится в явном виде так же, как это сделано в [1]. Для оценки регуляризатора и доказательства априорной оценки решения задачи (8)—(9) используется техника шаудеровских оценок, развитая К. К. Головкиным и В. А. Солонниковым ([3]—[4]) для оценки интегральных операторов с гладкими ядрами. Дополнительные трудности, которые здесь возникают, связаны с тем, что получающиеся ядра обладают меньшей гладкостью, чем это требуется в [3, 4].

Будем говорить, что $\tilde{A}(\xi)\in\bar{D}_\alpha$, если

$$A(\xi)=\sum_{k=0}^{N} \frac{a_k(\xi')}{(\xi_n-i\,|\,\xi'\,|)^{-\alpha+k}}+\tilde{A}_N(\xi), \qquad (11)$$

где $a_k(\xi')\in C^\infty$ по ξ' при $\xi'\neq 0$, $a_k(\xi')$ — однородные функции порядка k, $\tilde{A}_N(\xi)$ — N-раз дифференцируемая функция по ξ при $\xi\neq 0$, однородная порядка α и

$$|\,\tilde{A}_N(\xi)\,|\leqslant C\,\frac{|\,\xi'\,|^{\alpha+N+1}}{(|\,\xi'\,|+|\,\xi_n\,|)^{N+1}}\,. \qquad (12)$$

Можно показать, что если $\tilde{A}(\xi)\in D_\alpha^{(0)}$, то $\tilde{A}_+(\xi)\in\bar{D}_\alpha$, $\tilde{A}_-(\xi)\in\bar{D}_{\alpha-\varkappa}$, $\frac{1}{\tilde{A}_+(\xi)}\in\bar{D}_{-\varkappa}$. Доказательство априорной оценки основано на следующих трех леммах. Пусть $\tilde{r}_M=(\xi_n-i\,|\,\xi'\,|)^M\,(\xi_n-i\,|\xi'\,|-i)^{-M}$ (M — целое, достаточно большое число), r_M — оператор свертки с символом $\tilde{r}_M$.

Лемма 1. *Пусть $\tilde{A}(\xi)\in\bar{D}_\alpha$ и $(l+\delta-\alpha)$ — положительное нецелое число. Тогда*

$$\|\,Ar_M\ u(x)\,\|_{l+\delta-\alpha}\leqslant C\,\|\,u(x)\,\|_{l+\delta}, \qquad (13)$$

где C не зависит от $u(x)$.

Лемма 2. *Пусть* $\tilde{A}(\xi) \in \bar{D}_\alpha$ *и* $(l+\delta-\alpha-1)$ *— положительное нецелое число. Тогда*

$$\| P^+ A r_M^- g(x') \|^+_{l+\delta-\alpha-1} \leqslant C \| g(x') \|_{l+\delta}, \tag{14}$$

где $\| u_+ \|^+_{l+\delta}$ *— норма* $u_+(x)$ *в полупространстве* $x_n > 0$, C *не зависит от* $g(x')$.

Лемма 3. *Пусть* $\tilde{A}(\xi) \in \bar{D}_\alpha$ *и* $(l+\delta-\alpha)$ *— положительное нецелое число. Тогда*

$$\| P^+ A r_M^- u_+(x) \|^+_{l+\delta-\alpha} \leqslant C \| u_+(x) \|^+_{l+\delta}, \tag{15}$$

где C *не зависит от* $u_+(x)$.

Наметим доказательства этих лемм. Так как $\tilde{A}(\xi) | \xi |^{2k} \in \bar{\bar{D}}_{\alpha-2k}$ и $F^{-1}(| \xi |^2) = -\Delta$ (Δ — оператор Лапласа), то можно считать $\alpha < 0$ и, следовательно операторы свертки будут интегральными операторами. Далее

$$\tilde{A}(\xi) \tilde{r}_M^- = \sum_{k=0}^{N} \frac{a_k(\xi')(\xi_n - i|\xi'|)^{M+\alpha-k}}{(\xi_n - i|\xi'| - i)^M} + \frac{\tilde{A}_N(\xi)(\xi_n - i)|\xi'|)^M}{(\xi_n - i|\xi'| - i)^M}.$$

Ограниченность оператора свертки с символом $(\xi_n - i|\xi'|)^\beta (\xi_n - i|\xi'| - i)^{-M}$ (при $\beta > 0$) во всем пространстве устанавливается непосредственно, т.к. можно вычислить обратное преобразование Фурье от функций $(\xi_n - i|\xi'| - i)^\alpha$ и $(\xi_n - i|\xi'|)^\alpha$ ($\alpha < 0$). В силу однородности функции $\tilde{A}_N(\xi)$, гладкой на сфере $|\xi| = 1$, $F^{-1}\tilde{A}_N(\xi)$ будет также однородной функцией, гладкой на сфере $|x| = 1$ ([2]).

Выбирая достаточно большое N и используя оценки К. К. Головкина и В. А. Солонникова ([3]—[4]) для интегральных операторов типа объемного потенциала, получаем лемму 1. Функция

$$\sum_{k=0}^{N} a_k(\xi')(\xi_n - i|\xi'|)^{M+\alpha-k}(\xi_n - i|\xi'| - i)^{-M}$$

допускает аналитическое продолжение в полуплоскость $\mathrm{Im}\,\xi_n < 0$ и, следовательно,

$$P^+ F^{-1}\Big[\sum_{k=0}^{N} a_k(\xi')(\xi_n - i|\xi'|)^{M+\alpha-k}(\xi_n - i|\xi'| - i)^{-M}\tilde{g}(\xi')\Big] = 0.$$

Поэтому при доказательстве леммы 2 можно заменить A на A_N. Легко видеть, что оценку (14) достаточно доказать для $g_{\text{уср}}(x')$ — усредненной функцией по методу Головкина ([5]). Так как A_N — интегральный оператор с гладким ядром, то (14) сразу следует по касательным переменным x'. Для завершения доказательства леммы 2 достаточно показать, что

$$\frac{\partial^p}{\partial x_n^p}[P^+ A_N r_M^- g_{\text{уср}}] = P^+ [A_{N1} r_M^- B\, g_{\text{уср}}(x')],$$

где B — оператор свертки с символом $|\xi'|^p$, A_{N1} — такой же, как и A_N, интегральный оператор. Это вытекает из того факта, что

$$\frac{\partial^p}{\partial x_n^p} A_N(x) = (-i)^p F^{-1}[\xi_n^p \tilde{A}_N(\xi)],$$

$\tilde{A}_N(\xi)\,.\,\xi_n^p \in \bar{D}_{\alpha+p}$, и т. к. $\tilde{A}_N(\xi)\,.\,\xi_n^p \in C^N$, то в силу (11) $\tilde{A}_N(\xi)\,\xi_n^p = |\xi'|^p \times$ $\times \tilde{A}_{N1}(\xi)$.

Доказательство леммы 3 аналогично доказательству лемм 1 и 2. Автор благодарит Г. И. Эскина за внимание к работе.

Воронежский Государственный
университет

Поступило в редакцию
10.IV.1968

Литература

1. М. И. Вишик и Г. И. Эскин, Уравнения в свертках в ограниченной области, УМН 20, вып. 3 (1965), 89–152.
2. Г. Е. Шилов, Математический анализ, второй специальный курс, М, „Наука", 1965.
3. К. К. Головкин, и В. А. Солонников, Оценки интегральных операторов в трансляционно-инвариантных нормах, Тр. МИАН СССР, 1964, т. LXX, 47–58.
4. К. К. Головкин и В. А. Солонников, Оценки интегральных операторов в трансляционно-инвариантных нормах II, Тр. МИАН СССР, 1966, т. ХСII, 5–30.
5. К. К. Головкин, О приближении функций в произвольных нормах, Тр. МИАН СССР, 1964, LXX, 26–37.

KOMPOZICINIŲ LYGČIŲ NORMALUS IŠSPRENDŽIAMUMAS HIOLDERIO FUNKCIJŲ ERDVĖSE

E. DOLGONOS

(Reziumė)

Šiame darbe įrodyta teorema apie vienos klasės elipsinio kraštinio uždavinio kompozicinės lygties normalinį išsprendžiamumą Hiolderio funkcijų erdvėse.

THE NORMAL RESOLVABILITY OF THE EQUATIONS IN CONVOLUTIONS IN THE HÖLDER'S FUNCTIONS SPACES

E. DOLGONOS

(Summary)

In this paper is proved the theorem about normal resolvability for one class of the elliptical boundary value problems in convolutions in the Hölder's functions spaces.