VIII LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 4
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1968

УДК – 513

О СЕМЕЙСТВАХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ КОРРЕЛЯТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

К. И. ГРИНЦЕВИЧЮС

В этой заметке рассматривается расслоенное пространство $K_5(T_4, F_l)$, базисом которого является четырехмерное многообразие T_4 прямых l трехмерного точечного проективного пространства P_3, а одномерный слой F_l – однопараметрическое многообразие коррелятивных элементов. Группа проективных преобразований пространства P_3 индуцирует в слое группу движений. Исследуется дифференциальная окрестность первого порядка семейства секущих гиперповерхностей в K_5, определяемого вполне интегрируемым уравнением (2). Аппаратом исследования является инвариантный метод Г. Ф. Лаптева [1].

1. Пусть ребро $l=(A_1A_2)$ подвижного тетраэдра $\{A_i\}$ $(i, j, k=1, 2, 3, 4)$ описывает в трехмерном проективном пространстве P_3 четырехмерное многообразие прямых T_4.

Если обозначить [1]

$$dA_i=\omega_i^j A_j,$$

то дифференциальные формы ω_i^j удовлетворяют уравнениям структуры

$$D\omega_i^j=[\omega_i^k\,\omega_k^j],$$

и независимыми формами будут

$$\omega_p^\alpha \quad (p,\ q,\ r,\ s,\ t=1,\ 2;\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \varepsilon,\ \iota=3,\ 4).$$

Каждому лучу l пространства P_3 сопоставляется одномерный слой F_l коррелятивных элементов (коррелятивным элементом называем луч l и один класс корреляций $U_{ij}x^i y^j=0$), определяемый уравнением [2]

$$e^{2\rho}\left|\det\|U_{ij}\|\right|=\left\{\begin{vmatrix} U_{11} & U_{12}\\ U_{21} & U_{22}\end{vmatrix}\right\}^2,$$

$$\det\|U_{ij}\|\neq 0,\qquad \begin{vmatrix} U_{11} & U_{12}\\ U_{21} & U_{22}\end{vmatrix}\neq 0;$$

x^i и y^i координаты точек в P_3 относительно подвижного тетраэдра $\{A_i\}$. Все коррелятивные элементы образуют пятимерное пространство K_5 слоев. Тогда четырехмерное многообразие прямых T_4 является базисом.

Уравнения $\omega_p^\alpha=0$ означают неподвижность луча l, а уравнения

$$\omega_p^\alpha=0, \quad d\rho+\omega_\alpha^\alpha-\omega_p^p=0$$

– неподвижность коррелятивного элемента – „точки“ пространства K_5.

2. Секущая гиперповерхность в пространстве K_5, имеющая с каждым слоем только одну общую „точку“, определяется линейным дифференциальным уравнением

$$d\rho+\omega_\alpha^\alpha-\omega_p^p=F_\alpha^p\,\omega_p^\alpha \tag{1}$$

и соответствующим внешним квадратичным уравнением.

В пятимерном пространстве K_5 коррелятивных элементов рассмотрим однопараметрическое семейство секущих гиперповерхностей, имеющих с каждым слоем только одну общую „точку“, т.е. будем требовать, чтобы линейное дифференциальное уравнение (1) было вполне интегрируемым. В этом случае будем считать, что коэффициенты F_α^p являются многочленами второй степени относительно ρ, т.е.

$$F_\alpha^p=A_\alpha^p\,\rho^2+2B_\alpha^p\,\rho+C_\alpha^p,$$

где коэффициенты A_α^p, B_α^p и C_α^p являются функциями луча l.

Тогда уравнение (1) примет вид

$$d\rho+\omega_\alpha^\alpha-\omega_p^p=(A_\alpha^p\,\rho^2+2B_\alpha^p\,\rho+C_\alpha^p)\,\omega_p^\alpha. \tag{2}$$

Продифференцировав линейное дифференциальное уравнение (2) внешним образом и исключив $d\rho$, получаем:

$$\begin{aligned}&[\nabla A_\alpha^p+2A_\alpha^p B_\beta^q\,\omega_q^\beta,\ \omega_p^\alpha]\,\rho^2+2\,[\nabla B_\alpha^p+A_\alpha^p(\omega_q^q-\omega_\beta^\beta)+A_\alpha^p\,C_\beta^q\,\omega_q^\beta,\ \omega_\beta^\alpha]\,\rho+\\&+[\nabla C_\alpha^p+2B_\alpha^p\,(\omega_q^q-\omega_\beta^\beta)-2\omega_\alpha^p+2B_\alpha^p\,C_\beta^q\omega_q^\beta,\ \omega_p^\alpha]=0,\end{aligned} \tag{3}$$

где $\qquad \nabla L_\alpha^p=dL_\alpha^p+L_\alpha^q\,\omega_q^p-L_\beta^p\,\omega_\alpha^\beta.$

Так как уравнение (2) должно быть вполне интегрируемым, то из (3) следует, что:

$$\begin{aligned}&[\nabla A_\alpha^p+2A_\alpha^p\,B_\beta^q\,\omega_q^\beta,\ \omega_p^\alpha]=0,\\&[\nabla B_\alpha^p+A_\alpha^p\,(\omega_q^q-\omega_\beta^\beta)+A_\alpha^p\,C_\beta^q\,\omega_q^\beta,\ \omega_p^\alpha]=0,\\&[\nabla C_\alpha^p+2B_\alpha^p\,(\omega_q^q-\omega_\beta^\beta)-2\omega_\alpha^p+2B_\alpha^p\,C_\beta^q\,\omega_q^\beta,\ \omega_p^\alpha]=0.\end{aligned} \tag{4}$$

Система (4) замкнута относительно внешнего дифференцирования и находится в инволюции с характерами $s_1=s_2=s_3=s_4=3$ (если $A\equiv A_3^1A_4^2-A_4^1A_3^2\neq 0$), ибо $Q=N=30$. Следовательно, однопараметрическое семейство секущих гиперповерхностей в пространстве K_5, определяемое вполне интегрируемым уравнением (2), существует с произволом трех функций от четырех аргументов. Так как уравнение (2)-типа Риккати, то сложное отношение $(\rho_1\,\rho_2\,\rho_3\,\rho)$ любых четырех решений $\rho_1(l)$, $\rho_2(l)$, $\rho_3(l)$ и $\rho(l)$ этого уравнения равно постоянному числу c, т.е.

$$\frac{(\rho_3-\rho_1)(\rho-\rho_2)}{(\rho_3-\rho_2)(\rho-\rho_1)}=c.$$

Если три решения $\rho_1(l)$, $\rho_2(l)$ и $\rho_3(l)$ уравнения (2) заданы, то предыдущее уравнение определяет общее решение уравнения (2). Следовательно, семейство секущих гиперпроверностей, определяемое уравнением (2), определяется тремя гиперповерхностями этого семейства (постоянное c в предыдущем уравнении является параметром семейства).

Разбиение пространства K_5, заданное уравнением (2), конечно, не общего вида, так как однопараметрическое семейство гиперповерхностей в пятимерном пространстве задается с произволом одной функции от пяти аргументов.

3. Из уравнений (4) следует, что:

$$\delta A^p_\alpha + A^q_\alpha \pi^p_q - A^p_\beta \pi^\beta_\alpha = 0, \tag{5}$$

$$\delta B^p_\alpha + B^q_\alpha \pi^p_q - B^p_\beta \pi^\beta_\alpha + A^p_\alpha (\pi^q_q - \pi^\beta_\beta) = 0, \tag{6}$$

$$\delta C^p_\alpha + C^q_\alpha \pi^p_q - C^p_\beta \pi^\beta_\alpha + 2B^p_\alpha (\pi^q_q - \pi^\beta_\beta) - 2\pi^p_\alpha = 0, \tag{7}$$

где δ — символ дифференцирования относительно вторичных параметров и $\pi^j_i = \omega^j_i(\delta)$.

Система дифференциальных уравнений (5)—(7) вполне интегрируема и из нее следует, что системы величин:

$$A^p_\alpha, \tag{8}$$

$$A^p_\alpha,\ B^p_\alpha, \tag{9}$$

$$A^p_\alpha,\ B^p_\alpha,\ C^p_\alpha \tag{10}$$

являются линейными геометрическими объектами, причем первые два — однородные.

Из уравнений (5), (6) следует, что величины

$$A = 2A^{[1}_3 A^{2]}_4, \tag{11}$$

$$B = 2B^{[1}_3 B^{2]}_4, \tag{12}$$

$$\lambda = 4A^{\{1}_{[3} B^{2\}}_{4]} \tag{13}$$

удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\begin{gathered} \delta A + A(\pi^p_p - \pi^\alpha_\alpha) = 0, \\ \delta B + (B + \lambda)(\pi^p_p - \pi^\alpha_\alpha) = 0, \\ \delta\lambda + (\lambda + 2A)(\pi^p_p - \pi^\alpha_\alpha), \end{gathered} \tag{14}$$

следовательно, образуют однородные геометрические объекты:

$$A, \tag{15}$$

$$A, \lambda, \tag{16}$$

$$A, B, \lambda. \tag{17}$$

Из уравнений (5)—(7), в силу (14), следует, что система величин:

$$\lambda^p_\alpha = B^p_\alpha - A^p_\alpha \cdot \ln|A| \tag{18}$$

(считая, что $A \neq 0$) удовлетворяет дифференциальным уравнениям (5), а система величин:

$$\mu_\alpha^p = C_\alpha^p - 2B_\alpha^p \ln|A| + A_\alpha^p \{\ln|A|\}^2 \tag{19}$$

— уравнениям

$$\delta\mu_\alpha^p + \mu_\alpha^q \pi_q^p - \mu_\beta^p \pi_\alpha^\beta - 2\pi_\alpha^p = 0. \tag{20}$$

Следовательно, системы величин (18) и (19) образуют геометрические объекты. Тогда система величин:

$$A_\alpha^p + I\lambda_\alpha^p, \tag{21}$$

где I — любой инвариант, также удовлетворяет дифференциальным уравнениям (5) и является геометрическим объектом.

4. Вышеупомянутые геометрические объекты определяют:

1) проективное соответствие

$$A_\alpha^{[1} t^{2]} x^\alpha = 0 \tag{22}$$

между точками $t^p A_p$ луча $l=(A_1A_2)$ и плоскостями, проходящими через l, где x^α-координаты текущей точки плоскости в трехмерном проективном пространстве P_3;

2) однопараметрическое семейство проективных соответствий

$$A_\alpha^{[1} t^{2]} x^\alpha + I\lambda_\alpha^{[1} t^{2]} x^\alpha = 0 \tag{23}$$

между точками $t^p A_p$ луча l и плоскостями, проходящими через l, где I — параметр семейства;

3) две точки $t^p A_p$, определяемые квадратным уравнением

$$\begin{vmatrix} A_3^{[1} t^{2]} & A_4^{[1} t^{2]} \\ B_3^{[1} t^{2]} & B_4^{[1} t^{2]} \end{vmatrix} = 0, \tag{24}$$

в которых плоскость (23) не зависит от параметра I;

4) две плоскости

$$\begin{vmatrix} A_\alpha^1 x^\alpha & B_\alpha^1 x^\alpha \\ A_\beta^2 x^\beta & B_\beta^2 x^\beta \end{vmatrix} = 0, \tag{25}$$

соответствующие точкам (24) в соответствии (23);

5) прямую

$$x^p = -\frac{1}{2}\mu_\alpha^p x^\alpha, \tag{26}$$

не пересекающуюся с лучом l;

6) две прямые

$$2t^{[1} x^{2]} - C_\alpha^{[1} t^{2]} x^\alpha = 0,$$
$$A_\alpha^{[1} t^{2]} x^\alpha = B_\alpha^{[1} t^{2]} x^\alpha = 0, \tag{27}$$

пересекающие луч l соответственно в точках (24) (уравнения (27) определяют две прямые тогда и только тогда, когда t^p удовлетворяют уравнению (24)).

5. Если в пространстве коррелятивных элементов задана секущая гиперповерхность, пересекающаяся с каждым слоем в одной „точке“, то в проективном пространстве P_3 индуцируется соответствие между прямыми. Когда эта гиперповерхность определяется линейным уравнением (1) (и соответствующим квадратичным), то прямой $l=(A_1 A_2)$ соответствует прямая

$$x^p = -\frac{1}{2} F^p_\alpha x^\alpha$$

(см. (14) в [2]). Но в этой заметке F^p_α являются многочленами второй степени относительно переменного параметра ρ. Таким образом мы имеем в точечном пространстве P_3 одномерное многообразие прямых, определяемое уравнениями

$$x^p = -\frac{1}{2}(A^p_\alpha \rho^2 + 2B^p_\alpha \rho + C^p_\alpha)x^\alpha. \tag{28}$$

Исключая ρ из двух уравнений (28), получаем уравнение

$$4\begin{vmatrix} A^1_\alpha x^\alpha & B^1_\alpha x^\alpha \\ A^2_\beta x^\beta & B^2_\beta x^\beta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} B^1_\gamma x^\gamma & C^1_\gamma x^\gamma + 2x^1 \\ B^2_\varepsilon x^\varepsilon & C^2_\varepsilon x^\varepsilon + 2x^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A^1_\alpha x^\alpha & C^1_\alpha x^\alpha + 2x^1 \\ A^2_\alpha x^\alpha & C^2_\beta x^\beta + 2x^2 \end{vmatrix}^2 = 0. \tag{29}$$

Уравнение (29) определяет линейчатую поверхность четвертого порядка в трехмерном точечном пространстве P_3, образующими которой являются прямые (28).

Точки луча l принадлежат поверхности (29). Поэтому можем рассматривать поведение поверхности (29) вблизи точек луча l (точки луча l не являются изолированными точками поверхности (29)).

Фиксируем некоторую точку $M=t^pA_p$ луча l и точку $N=x^iA_i$ трехмерного проективного пространства P_3. Тогда ищем точки пересечения прямой MN и поверхности (29). Подставляя в (29) координаты

$$t^1+vx^1,\ t^2+vx^2,\ vx^3,\ vx^4$$

точки $M+vN$, получаем уравнение четвертой степени

$$4v^3\begin{vmatrix} A^1_\alpha x^\alpha & B^1_\alpha x^\alpha \\ A^2_\beta x^\beta & B^2_\beta x^\beta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} B^1_\gamma x^\gamma & v(C^1_\gamma x^\gamma + 2x^1) + 2t^1 \\ B^2_\varepsilon x^\varepsilon & v(C^2_\varepsilon x^\varepsilon + 2x^2) + 2t^2 \end{vmatrix} -$$

$$-v^2\begin{vmatrix} A^1_\alpha x^\alpha & v(C^1_\alpha x^\alpha + 2x^1) + 2t^1 \\ A^2_\beta x^\beta & v(C^2_\beta x^\beta + 2x^2) + 2t^2 \end{vmatrix}^2 = 0 \tag{30}$$

относительно v. Так как это уравнение имеет корень $v=0$ не меньше второй кратности, то все точки луча l являются особыми точками поверхности (29). Уравнение (30) имеет корень $v=0$ не меньше третьей кратности, когда $A^{[1}_\alpha t^{2]} x^\alpha = 0$, т.е. тогда, когда прямая MN принадлежит плоскости (22), ассоциированной с точкой M. Таким образом геометрически охарактеризовано соответствие (22).

Уравнение (30) имеет корень $v=0$ четвертой кратности, если

$$A^{[1}_\alpha t^{2]} x^\alpha = 0 \quad \text{и} \quad B^{[1}_\alpha t^{2]} x^\alpha = 0,$$

т.е. тогда, когда точкой M является одна из точек (24).

Все коэффициенты уравнения четвертой степени (30) равны нулю тогда и только тогда, когда

$$A_\alpha^{[1} t^{2]} x^\alpha = 0, \quad B_\alpha^{[1} t^{2]} x^\alpha = 0,$$

$$2t^{[1} x^{2]} - C_\alpha^{[1} t^{2]} x^\alpha = 0,$$

т.е. тогда, когда прямой MN является одна из прямых (27).

Следовательно, прямые (27) лежат на поверхности четвертого порядка (29). Таким образом, поверхность (29) кроме прямых вида (28) содержит еще две прямые (27), т.е. прямая (28) скользит по двум прямым (27), когда параметр ρ меняется в интервале

$$-\infty < \rho < +\infty$$

(при $\rho \to \infty$ прямая (28) стремится к лучу A_1A_2).

6. Так как геометрический объект (8), в силу (5), является однородным, то можно рассматривать разбиение пространства K_5 уравнением

$$d\rho + \omega_\alpha^\alpha - \omega_p^p = (B_\alpha^p \rho + C_\alpha^p)\,\omega_p^\alpha. \tag{31}$$

Требование полной интегрируемости уравнения (31) приводит к квадратичным внешним уравнениям

$$[\nabla B_\alpha^p\, \omega_p^\alpha] = 0,$$

$$[\nabla C_\alpha^p + B_\alpha^p (\omega_q^q - \omega_\beta^\beta) - 2\omega_\alpha^p + B_\alpha^p C_\beta^q\, \omega_q^\beta,\ \omega_p^\alpha] = 0. \tag{32}$$

Система (32) замкнута относительно внешнего дифференцирования и находится в инволюции с характерами $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 2$ (если $B = B_3^1 B_4^2 - B_4^1 B_3^2 \neq 0$), ибо $Q = N = 20$. Следовательно, однопараметрическое семейство секущих гиперповерхностей, определяемое вполне интегрируемым уравнением (31), существует с произволом двух функций от четырех аргументов.

Простое отношение $(\rho\, \rho_2\, \rho_1)$ любых трех решений $\rho_1(l)$, $\rho_2(l)$, $\rho(l)$ уравнения (31) постоянно, т.е.

$$\frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} = c.$$

Если два решения $\rho_1(l)$ и $\rho_2(l)$ уравнения (31) заданы, то предыдущее уравнение определяет общее решение уравнения (31).

Следовательно, семейство секущих гиперповерхностей, определяется двумя гиперповерхностями этого семейства (постоянное c в предыдущем уравнении является параметром семейства).

Из (32) следует, что:

$$\delta B_\alpha^p + B_\alpha^q \pi_q^p - B_\beta^p \pi_\alpha^\beta = 0,$$

$$\delta C_\alpha^p + C_\alpha^q \pi_q^p - C_\beta^p \pi_\alpha^\beta + B_\alpha^p (\pi_q^q - \pi_\beta^\beta) - 2\pi_\alpha^p = 0. \tag{33}$$

Из (33) следует, что величина $B = B_3^1 B_4^2 - B_4^1 B_3^2$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\delta B + B(\pi_p^p - \pi_\alpha^\alpha) = 0,$$

следовательно, является относительным инвариантом.

Величины

$$\nu^p_\alpha = C^p_\alpha - B^p_\alpha \ln I\,|\,B\,|\,,$$

где I – любой инвариант, т.е. $\delta I=0$ и $I>0$, $B\neq 0$, удовлетворяют уравнениям (20) и определяют прямую

$$x^p = -\frac{1}{2}\nu^p_\alpha x^\alpha. \tag{34}$$

Для случая $A^p_\alpha=0$ некоторые из вышеупомянутых понятий вырождаются, а некоторые совсем не имеют смысла. Например, две точки, определяемые уравнением (24), две плоскости, определяемые уравнением (25), и две прямые (27) для случая $A^p_\alpha=0$ совсем не имеют смысла. Если в общем случае геометрическое место прямых (28) есть поверхность четвертого порядка (29), то в случае $A^p_\alpha=0$ геометрическое место тех же прямых есть поверхность второго порядка

$$2B^{[1}_\alpha x^{2]} x^\alpha + B^{[1}_\alpha C^{2]}_\beta x^\alpha x^\beta = 0,$$

кроме того уравнение (34) определяет инвариантное отображение прямых (28) (в случае $A^p_\alpha=0$) на интервал $0<I<+\infty$ значений инварианта I.

6. Так как геометрический объект (9), в силу (5), (6), является однородным объектом, то можно рассматривать разбиение пространства K_5 уравнением

$$d\rho + \omega^\alpha_\alpha - \omega^p_p = C^p_\alpha \omega^\alpha_p, \tag{35}$$

полученным из уравнения (2), подставляя $A^p_\alpha = B^p_\alpha = 0$.

Продифференцировав внешним образом уравнение (35) получим

$$[\nabla C^p_\alpha - 2\omega^p_\alpha,\ \omega^\alpha_p] = 0. \tag{36}$$

Уравнение (36) определяет одномерное семейство секущих гиперповерхностей с произволом одной функции от четырех аргументов.

Так как для любых двух решений $\rho\,(l)$ и $\rho_1\,(l)$ уравнения (35) имеет смысл

$$\rho - \rho_1 = c = const,$$

то в случае $A^p_\alpha = B^p_\alpha = 0$ семейство секущих гиперповерхностей, определяемое уравнением (35), определяется одной гиперповерхностью (постоянное c является параметром семейства).

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
12.IV.1968

Литература

1. Г. Ф. Лаптев, Дифференциальная геометрия погруженных многообразий, Труды Московского математического общества, 1953, 2, 275–382.
2. К. И. Гринцевичюс, О комплексе коррелятивных элементов, Лит. мат. сб., IV, № 3, (1964), 329–335.

APIE HIPERPAVIRŠIŲ ŠEIMĄ KORELIATYVINIŲ ELEMENTŲ ERDVĖJE

K. GRINCEVIČIUS

(*R e z i u m ė*)

Straipsnyje nagrinėjama tokia išsluoksniuota erdvė $K_5(T_4, F_l)$, kurios bazę T_4 sudaro trimatės projektyvinės erdvės P_3 tiesės. Erdvės K_5 sluoksniai yra koreliatyvinių elementų vienparametrinės visumos. Erdvės P_3 projektyvinių atvaizdavimų grupė indukuoja sluoksnyje judėjimų grupę. Reikia, kad (2) diferencialinė lygtis visiškai būtų integruojama. Tuomet toji lygtis definuoja erdvėje K_5 vienparametrinę hiperpaviršių šeimą.

ÜBER SCHAREN VON HYPERFLÄCHEN IM RAUM KORRELATIVER ELEMENTE

K. GRINCEVIČIUS

(*Z u s a m m e n f a s s u n g*)

In diesem Artikel wird ein Faserbündel $K_5(T_4, F_l)$ betrachtet, dessen Basis die vierdimensionale Mannigfaltigkeit T_4 der Geraden der dreidimensionalen projektiven Punktraumes P_3 ist; die Fasern sind einparametrische Mannigfaltigkeiten korrelativer Elemente. Die Gruppe der projektiven Transformationen des Raumes P_3 induziert in der Faser eine Bewegungsgruppe. Es wird die differentielle Umgebung 1. Ordnung einer Schar von Hyperflächen in K_5 untersucht, die durch die vollständig integrable Gleichung (2) definiert ist.