1968

УДК – 519.21

ОЦЕНКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ДВУМЕРНОЙ ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ

В. ПАУЛАУСКАС, А. СЛУШНИС

Настоящая заметка является обобщением работы С. М. Садиковой [1] на случай разнораспределенных независимых двумерных величин. Рассматривается также случай, когда все слагаемые вырождены, т. е. распределены на прямых. Этот случай рассмотрен де Баррой [2], но применение двумерного аналога неравенства Эссена намного упрощает доказательство, причем отпадает требование конечности четвертых моментов.

Пусть (ξ_j, η_j) $j=1, 2, \ldots n$ – независимые двумерные случайные величины с распределениями P_j, $j=1, 2, \ldots n$.

Обозначим:

$$\mu^j_{kl}=\int\int x^k y^l P_j(dx\,dy), \quad \beta^j_{kl}=\int\int |x^k y^l| P_j(dx\,dy),$$

$$\mu^j_{20}=\sigma^2_{j1}, \quad \mu^j_{02}=\sigma^2_{j2}, \quad \rho_j=\frac{\mu^j_{11}}{\sigma_{j1}\sigma_{j2}},$$

$$B^2_{n1}=\sum_{k=1}^n \sigma^2_{k1}, \quad B^2_{n2}=\sum_{k=1}^n \sigma^2_{k2}, \quad S_n=\left(\frac{1}{B_{n1}}\sum_{k=1}^n \xi_k, \ \frac{1}{B_{n2}}\sum_{k=1}^n \eta_k\right),$$

$$L^{(1)}_{3n}=\frac{\sum\limits_{k=1}^n \beta^k_{30}}{B^3_{n1}}, \quad L^{(2)}_{3n}=\frac{\sum\limits_{k=1}^n \beta^k_{03}}{B^3_{n2}}.$$

Не нарушая общности будем считать, что $\mu^j_{10}=\mu^j_{01}=0$ для всех $j=1, 2, \ldots n$. Характеристическую функцию и функцию распределения двумерной случайной величины ξ будем обозначать $f_\xi(s, t)$ и $F_\xi(x, y)$ соответственно.

Пусть величины (ξ'_j, η'_j) распределены по двумерному нормальному распределению Φ_j, имеющему такие же первые два моменты, как и P_j, и

$$S'_n=\left(\frac{1}{B_{n1}}\sum_{k=1}^n \xi'_k, \ \frac{1}{B_{n2}}\sum_{k=1}^n \eta'_k\right), \quad \tilde{\rho}_n=\sum_{k=1}^n \frac{\sigma_{k1}\sigma_{k2}}{B_{n1}B_{n2}}\rho_k.$$

Теорема 1. Если $\beta^i_{30}<\infty$ $\beta^i_{03}<\infty$, $i=1, 2, \ldots, n$, то справедлива оценка

$$\sup_{x,\,y} |F_{S_n}(x, y)-\Phi_{S'_n}(x, y)| \leqslant C\,\frac{L^{(1)}_{3n}+L^{(2)}_{3n}}{(1-\tilde{\rho}^2_n)^2}, \tag{1}$$

где C – абсолютная константа.

Пусть имеем последовательность одномерных величин ζ_j, $j=1, 2, \ldots, n$ и рассмотрим вырожденные двумерные величины (ξ_j, η_j) где $\xi_j=a_j\zeta_j$ и $\eta_j=b_j\zeta_j$. Не ограничивая общности будем считать, что

$$M\zeta_j=0, \quad M\zeta^2_j=1, \qquad j=1, 2, \ldots n.$$

Тогда при наших обозначениях

$$\sigma_{j1}^2=a_j^2,\ \sigma_{j2}^2=b_j^2,\ B_{n1}^2=\sum_{j=1}^{n} a_j^2,\ B_{n2}^2=\sum_{j=1}^{n} b_j^2,$$

$$L_{3n}^{(1)}=\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} M\,|\,a_j\zeta_j\,|^3}{B_{n1}^3},\quad L_{3n}^{(2)}=\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} M\,|\,b_j\zeta_j\,|^3}{B_{n2}^3}.$$

Теорема 2. Если $M\,|\,\zeta_j\,|^3<\infty$, $j=1, 2, \ldots, n$ и

$$\frac{a_1}{b_1}\neq\frac{a_2}{b_2}, \tag{2}$$

то для величин $(a_j\zeta_j,\ b_j\zeta_j)$ $j=1, 2, \ldots, n$ справедлива теорема 1 с

$$\tilde{\rho}_n=\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j b_j}{B_{n1}B_{n2}}.$$

Доказательство. Для удобства обозначим:

$$f_{\xi_j,\eta_j}(s,\ t)=f_j(s,\ t),$$

$$f_{(\xi_j'\eta_j')}(s,\ t)=h_j(s,\ t)=e^{-\frac{1}{2}q_j(s,t)},$$

$$q_j(s,\ t)=s^2\sigma_{j1}^2+2\rho_j\sigma_{j1}\sigma_{j2}st+t^2\sigma_{j2}^2,$$

$$s'=\frac{s}{B_{n1}},\quad t'=\frac{t}{B_{n2}}.$$

В доказательстве теоремы будем пользоваться следующей формулой из [1]:

$$\sup_{x,\,y}|\,F_{S_n}(x,\ y)-\Phi_{S_n'}(x,\ y)\,|\leqslant\frac{2}{(2\pi)^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\left|\frac{A_n}{st}\right|ds\,dt+$$
$$+2\sup_{x}|\,F_{S_n}(x,\ \infty)-\Phi_{S_n'}(x,\ \infty)\,|+$$
$$+2\sup_{y}|\,F_{S_n}(\infty,\ y)-\Phi_{S_n'}(\infty,\ y)\,|+\frac{C}{T}, \tag{3}$$

где

$$A_n=(z_1z_2\ldots z_n-w_1w_2\ldots w_n)-(u_1u_2\ldots u_n-t_1\ldots t_n),$$
$$z_k=f_k(s',\ t'),\quad w_k=f_k(s',\ 0)f_k(0,\ t'),$$
$$u_k=h_k(s',\ t'),\quad t_k=h_k(s',\ 0)\,h_k(0,\ t').$$

В доказательстве теорем будем также предполагать, что выполнено условие

$$\frac{L_{3n}^{(1)}+L_{3n}^{(2)}}{(1-|\,\tilde{\rho}_n|\,)^{3/2}}\leqslant\frac{1}{32}. \tag{4}$$

Оно может не выполняться для первых n, но утверждение теоремы 1 останется в силе, если в (1) взять $C_1=\max\,(C,\ 32)$.

Лемма 1. *Пусть $u_i,\ t_i,\ z_i,\ w_i$ — любые комплексные числа. Тогда справедливо следующее неравенство*

$$|\,A_n\,|=|\,(z_1\ldots z_n-w_1w_2\ldots w_n)-(u_1u_2\ldots u_n-t_1\ldots t_n)\,|\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{j=1}^{n}|\,z_j-w_j\,|\left|\prod_{k=1}^{j-1}z_k\prod_{k=j+1}^{n}w_k-\prod_{k=1}^{j-1}u_k\prod_{k=j+1}^{n}t_k\right|+$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\left|\prod_{k=1}^{j-1}u_k\right|\,|\,(z_j-w_j)-(u_j-t_j)\,|\left|\prod_{k=j+1}^{n}t_k\right|=I_1+I_2. \tag{5}$$

Доказательство леммы следует из легко проверяемого тождества:

$$A_n=(z_1 z_2 \ldots z_n-w_1 \ldots w_n)-(u_1 u_2 \ldots u_n-t_1 \ldots t_n)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(z_k-w_k)\prod_{j=1}^{k-1} z_j \prod_{j=k+1}^{n} w_j-\sum_{k=1}^{n}(u_k-t_k)\prod_{j=1}^{k-1} u_j \prod_{j=k+1}^{n} t_j.$$

Лемма 2. *Во всей плоскости справедлива оценка*

$$|z_k-w_k|\leqslant \frac{2|s||t|\sigma_{k1}\sigma_{k2}}{B_{n1}B_{n2}}. \tag{6}$$

Лемма 3. *Для всех s и t имеет место неравенство*

$$|(z_k-w_k)-(u_k-t_k)|\leqslant|s||t|\left(\frac{\beta_{30}^k}{B_{n1}^3}+\frac{\beta_{03}^k}{B_{n2}^2}\right)\left[2|s|+2|t|+\right.$$

$$\left.+\frac{s^2}{2}\frac{\sigma_{k2}}{B_{n2}}+\frac{t^2}{2}\frac{\sigma_{k1}}{B_{n1}}\right]. \tag{7}$$

Доказательство обеих лемм аналогично доказательству соответствующих лемм в работе [1], и мы не будем его приводить здесь.

Лемма 4. *В области*

$$\max(|s|,|t|)\leqslant\frac{1-|\tilde\rho_n|}{64\,(L_{3n}^{(1)}+L_{3n}^{(2)})} \tag{8}$$

справедлива оценка

$$|D_k|=\left|\prod_{j=1}^{k-1} z_j\prod_{j=k+1}^{n} w_j-\prod_{j=1}^{k-1} u_j\prod_{j=k+1}^{n} t_j\right|\leqslant$$

$$\leqslant 64\,(|s|^3+|t|^3)\,(L_{3n}^{(1)}+L_{3n}^{(2)})\cdot\exp\left\{-\frac{1}{12}\sum_{j=1}^{n} q_j(s',t')\right\} k=1,2,\ldots,n. \tag{9}$$

Доказательство. Обозначим через $(\tilde\xi_j, \tilde\eta_j)$ двумерный вектор, компоненты которого независимы между собой и не зависят от (ξ_j, η_j). Тогда D_k является значением разности характеристических функций $\varphi_k(\lambda)-\psi_k(\lambda)$ при $\lambda=1$, где

$$\varphi_k(\lambda)=\prod_{j=1}^{k-1} f_j(\lambda s', \lambda t')\prod_{j=k+1}^{n} f_j(\lambda s', 0)f_j(0, \lambda t')$$

является характеристической функцией величины

$$(s'\xi_1+t'\eta_1)+\ldots(s'\xi_{k-1}+t'\eta_{k-1})+$$

$$+(s'\tilde\xi_{k+1}+t'\tilde\eta_{k+1})+\ldots(s'\tilde\xi_n+t'\tilde\eta_n), \tag{10}$$

а

$$\psi_k(\lambda)=\prod_{j=1}^{k-1} h_j(\lambda s', \lambda t')\prod_{j=k+1}^{n} h_j(\lambda s', 0)\, h_j(0, \lambda t')$$

есть характеристическая функция соответствующей нормальной величины.

Обозначив через L_k и σ_k^2 ляпуновское отношение и дисперсию величины (10), как и в лемме 2 из [1], можем написать, что при $\lambda\leqslant\frac{1}{4L_k\sigma_k}$

$$|\varphi_k(\lambda)-\psi_k(\lambda)|\leqslant 16\,L_k\sigma_k^3|\lambda|^3 e^{\frac{-\lambda^2\sigma_k^2}{3}}. \tag{11}$$

Оцениваем L_k и σ_k^2

$$\sigma_k^2=\sum_{j=1}^{k-1} M(s'\xi_j+t'\eta_j)^2+\sum_{j=k+1}^{n} M(s'\tilde\xi_j+t'\tilde\eta_j)^2=$$

$$=\sum_{j=1}^{k-1} q_j(s',t')+\sum_{j=k+1}^{n}[(s')^2\sigma_{j1}^2+(t')^2\sigma_{j2}^2]\geqslant\frac{1}{2}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} q_j(s't')=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} q_j(s',t')-\frac{1}{2}q_k(s',t')\geqslant\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} q_j(s',t')-\frac{1}{2}\max_{k\leqslant n} q_k(s',t')=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} q_j(s',t')\left[1-\frac{\max_{k\leqslant n} q_k(s't')}{s^2+2\tilde\rho_n st+t^2}\right]\geqslant\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n} q_j(s't'),$$

так как из условия (4) вытекает

$$\frac{\max_{k\leqslant n} q_k(s't')}{s^2+2\tilde\rho_n st+t^2}\leqslant\frac{1}{2}, \tag{12}$$

$$L_k=\frac{1}{\sigma_k^3}\sum_{j=1}^{k-1} M|s'\xi_j+t'\eta_j|^3+\sum_{j=k+1}^{n} M|s'\tilde\xi_j+t'\tilde\eta_j|^3\leqslant$$

$$\leqslant\frac{4}{\sigma_k^3}(|s|^3+|t|^3)(L_{3n}^{(1)}+L_{3n}^{(2)}).$$

Условие $L_k\sigma_k\leqslant\frac{1}{4}$ в области (8) выполняется для всех k, так что можем в (11) взять $\lambda=1$ и получить требуемую оценку, которая будет справедлива при всех k.

Лемма 5. *Для всех k и s, t справедлива оценка*

$$\prod_{j=1}^{k-1}|u_j|\prod_{j=k+1}^{n}|t_j|\leqslant\exp\left\{-\frac{1}{8}\sum_{j=1}^{n} q_j(s',t')\right\}.$$

Эта оценка очевидным образом следует из неравенства

$$|t_j|=e^{-\frac{(s')^2\sigma_{j1}^2+(t')^2\sigma_{j2}^2}{2}}\leqslant e^{-\frac{1}{4}q_j(s',t')}$$

и неравенства (12).

Лемма 6.

$$\int\int|s|^i e^{-(s^2+2\rho st+t^2)}\,ds\,dt\leqslant\frac{C}{(1-\rho^2)^{\frac{i+1}{2}}}\qquad i=1,\ 2,\ 3.$$

Результат получается при помощи простого интегрирования.

Теперь приступим к доказательству первой теоремы.

Из (6) и (9) получаем

$$I_1\leqslant 128|s||t|(|s|^3+|t|^3)(L_{3n}^{(1)}+L_{3n}^{(2)})\exp\left\{-\frac{1}{12}\sum_{j=1}^{n} q_j(s't')\right\}. \tag{14}$$

Из (17) и (13) имеем

$$I_2\leqslant 64|s||t|\left[2|s|+2|t|+\frac{s^2}{2}\frac{\max_{i\leqslant n}\sigma_{i2}}{B_{n2}}+\frac{t^2\max_{i\leqslant n}\sigma_{i1}}{2B_{n2}}\right]\times$$

$$\times(L_{3n}^{(1)}+L_{3n}^{(2)})\exp\left\{-\frac{1}{8}\sum_{j=1}^{n} q_j(s',t')\right\}. \tag{15}$$

В формуле (3) положим

$$T=\frac{1-|\tilde{\rho}_n|}{64\,(L_{3n}^{(1)}+L_{3n}^{(2)})}.$$

Из (14) и (15) при помощи леммы 6 получаем

$$\int\limits_{-T}^{T}\int\limits_{-T}^{T}\left|\frac{A_n}{st}\right|ds\,dt\leqslant C\,\frac{L_{3n}^{(1)}+L_{3n}^{(2)}}{(1-\tilde{\rho}_n^2)^2}.$$

Применяя ко второму и третьему члену одномерную теорему Ляпунова, получаем утверждение теоремы 1.

Для доказательства второй теоремы сперва заметим, что условие (2), которое обозначает, что первые две величины распределены на различных прямых, обеспечивает условие

$$\tilde{\rho}_n^2=\frac{\left(\sum\limits_{j=1}^{n}a_j b_j\right)^2}{B_{n1}^2\,B_{n2}^2}\neq 1.$$

Далее заметим, что леммы 2 и 3 справедливы и для вырожденных величин. В доказательстве леммы 4 поясним, что обозначает $\tilde{\xi}_j$ и $\tilde{\eta}_j$. Берем величину $\tilde{\zeta}_j$, которая распределена так же как и ζ_j, но не зависит от нее (обычный прием симетризации величин).

Теперь положим $\tilde{\xi}_j=a_j\,\tilde{\zeta}_j$, $\tilde{\eta}_j=b_j\,\tilde{\zeta}_j$ и получим те величины $(\tilde{\xi}_j,\ \tilde{\eta}_j)$, которые употребляются в доказательстве леммы 4.

Остальные рассуждения в доказательстве теоремы 1 остаются справедливыми и для величин $(a_j\zeta_j,\ b_j\zeta_j)$, поэтому теорема 2 доказана.

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
5. II. 1968

Литература

1. С. М. Садикова, Двумерные аналоги неравенства Эссена с применением к центральной предельной теореме, Теория вероят. и ее прим. II, 3 (1965).
2. G. de Barra, The convergence of a sum of independent random variables, Proc. Cambr. Philos. Society., 59, part. 2 (1963), 411—416.

KONVERGAVIMO GREIČIO ĮVERTINIMAS DVIMATĖJE CENTRINĖJE RIBINĖJE TEOREMOJE

V. PAULAUSKAS, A. SLUŠNYS

(*Reziumė*)

Straipsnyje gautas S. Sadikovos darbo [1] apibendrinimas nevienodai pasiskirsčiusiems dvimačiams dydžiams. Taip pat išnagrinėtas atvejis, kai visi sumuojami dėmenys yra išsigimę, ta yra pasiskirstę ant tiesių.

ON THE ESTIMATION OF THE RATE OF CONVERGENCE IN THE TWO-DIMENSIONAL CENTRAL LIMIT THEOREM

V. PAULAUSKAS, A. SLUŠNYS

(*Summary*)

In the paper the generalization of S. M. Sadikova's rezult [1] for non-equal distributed two dimensional random variables is given. The case, when the values of summands are concentrated on lines is also discussed.