1968

УДК–517.919.2

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ И ПОСТРОЕНИЕ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В. Б. ОСИПОВ

Рассматривается уравнение с малым параметром ε в банаховом пространстве E.

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = A(t)\, x(t), \quad x(0) = x_0. \tag{1}$$

Оператор $A(t)$ предполагается неограниченным замкнутым оператором с областью определения не зависящей от t. $[D(A(t)) = D(A)]$. Пусть оператор $A(t)$ имеет n-мерное собственное подпространство $\mathfrak{Z}_t$, соответствующее собственному числу нуль. Система $[r_1(t) \ \dots \ r_n(t)]$ – базис из собственных векторов в подпространстве $\mathfrak{Z}$. Предположим, что задача (1) при любом ε равномерно корректна и соответствующий зволюционный оператор удовлетворяет оценке:

$$\| U_\varepsilon(t_1 s) \| \leqslant M. \tag{2}$$

Формальное решение (1) ищется в виде:

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i x_i(t). \tag{3}$$

Подставляя (3) в (1) получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} A(t)\, x_0(t) = \Theta, \\ \dfrac{dx_0}{dt} = A(t)\, x_1(t), \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dx_{n-1}}{dt} = A(t)\, x_n(t). \end{cases} \tag{4}$$

Первое уравнение системы дает нам:

$$x_0(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t)\, r_i(t). \tag{5}$$

Пусть начальное условие задачи (1) $x_0 \in \mathfrak{Z}_0$. За счет выбора $\alpha_i(t)$ можно добиться того, чтобы $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(0)\ r_i(0) = x_0$. Полученное нулевое приближение к решению задачи (1), вообще говоря, не обладает тем свойством, что

$$\frac{dx_0}{dt} \in R[A(t)].$$

Предположим, что нуль есть изолированная точка спектра оператора $A(t)$. Как известно [4], все пространство E может быть разложено в прямую сумму инвариантных относительно $A(t)$ подпространств $\mathfrak{Z}_t$ и M_t, причем сужение $\tilde{A}(t)$ оператора $A(t)$ на подпространство M_t имеет ограниченный обратный $\tilde{A}^{-1}(t)$. Через $P(t)$ обозначим проекционный оператор на $\mathfrak{Z}_t$, порожденный разложением: $E=\mathfrak{Z}_t+M_t$, дополнительный к нему проектор — через $\tilde{P}(t)$: $\tilde{P}(t)=I-P(t)$.

Для разрешимости второго уравнения системы (4) необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{dx_0}{dt}\in M_t, \text{ т. е. } P(t)\frac{dx_0}{dt}=\Theta.$$

Воспользовавшись (5), получим:

$$P(t)\frac{dx_0}{dt}=\sum_{i=1}^{n}L_i^{\bullet}(t)\,r_i(t)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}L_i(t)\,d_k^{(i)}(t)\,r_k(t),$$

где

$$\sum_{k=1}^{n}d_k^{(i)}(t)\,r_k(t)=P(t)\,r_i'(t).$$

Для определения $\alpha_i(t)$ получим систему дифференциальных уравнений:

$$\eta_0'(t)=-D_0(t)\eta_0(t), \tag{6}$$

где

$$\eta_0(t)=[\alpha_1(t),\ldots\alpha_n(t)],\quad D_0(t)=\begin{pmatrix} d_1^{(1)}(t)\ldots d_1^{(n)}(t)\\ \cdots\cdots\cdots\\ d_n^{(1)}(t)\ldots d_n^{(n)}(t)\end{pmatrix}.$$

Система (6) решается при начальных условиях на $\alpha_i(t)$, подобранных таким образом, чтобы $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(0)\,r_i(0)=x_0$.

Если в формуле (5) под $\alpha_i(t)$ понимать решение системы (6), то $x_1(t)$ запишется в виде:

$$x_1(t)=\tilde{A}^{-1}(t)\,\tilde{P}(t)\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{\bullet}(t)r_i(t),$$

или

$$x_1(t)=\sum_{i=1}^{n}L_1(t)\tilde{A}^{-1}(t)\,P'(t)r_i(t).$$

Найденное $x_1(t)$ не обладает тем свойством, что

$$\frac{dx_1}{dt}\in R\,[A(t)].$$

Однако, если $x_1(t)$ удовлетворяет второму уравнению системы (4), то $x_1(t)+\sum_{i=1}^{n}\beta_i(t)r_i(t)$ также будет его решением. Выберем $\beta_i(t)$ таким образом, чтобы

$$P(t)\frac{dx_1}{dt}=-P(t)\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\beta_i(t)\,r_i(t). \tag{7}$$

Так как $x_1(t)\in M_t$, то равенство (7) перепишется в виде:

$$P'(t)\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(t)\,\tilde{A}^{-1}(t)\,P'(t)\,r_i(t)=\sum_{i=1}^{n}\beta_i'(t)\,r_i(t)+P(t)\sum_{i=1}^{n}\beta_i(t)\,r_i'(t).$$

Воспользовавшись (6), получим систему:

$$\eta_1'(t)=-D_0(t)\eta_1(t)+D_1(t)\eta_0(t),\quad \eta_1(0)=0, \tag{8}$$

где

$$\eta_1(t)=[\beta_1(t)\ldots\beta_n(t)],\quad D_1(t)=\begin{pmatrix}\gamma_1^{(1)}(t)\ldots\gamma_1^{(n)}(t)\\ \cdots\cdots\cdots\\ \gamma_n^{(1)}(t)\ldots\gamma_n^{(n)}(t)\end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы $D_1(t)$ определяются соотношением:

$$P'(t)\,\tilde{A}^{-1}(t)\,P'(t)\,r_i(t)=\sum_{k=1}^{n}\gamma_k^{(i)}(t)\,r_k(t).$$

Уточненное $x_1(t)$ запишется в виде:

$$x_1(t)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(t)\,\tilde{A}^{-1}(t)\,P'(t)\,r_i(t)+\sum_{i=1}^{n}\beta_i(t)\,r_i(t), \tag{9}$$

где $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$ удовлетворяют соответственно системам (6) и (8).

Подобный выбор $x_1(t)$ позволяет найти $x_2(t)$.

$$x_2(t)=\sum_{i=1}^{n}\beta_i(t)\,\tilde{A}^{-1}(t)\,P'(t)\,r_i(t)+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(t)\,\tilde{A}^{-2}(t)\,\tilde{P}(t)\,P''(t)\,r_i(t)-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(t)\,\tilde{A}^{-2}(t)\tilde{P}(t)\,A'(t)\,\tilde{A}^{-1}(t)\,P'(t)\,r_i(t). \tag{10}$$

Построенное $x_2(t)$ требует уточнения с целью, чтобы

$$\frac{d}{dt}\left(x_2(t)+\sum_{i=1}^{n}\Gamma_i(t)\,r_i(t)\right)\in M_t.$$

Для определения $\Gamma_i(t)$ получим систему уравнений:

$$\eta_2'(t)=-D_0(t)\eta_2(t)+D_1(t)\eta_1(t)+D_2(t)\eta_0(t),$$

где

$$\eta_2(t)=[\Gamma_1(t)\ \ldots\Gamma_n(t)],\quad D_2(t)=\begin{pmatrix}\rho_1^{(1)}(t)\ldots\rho_1^{(n)}(t)\\ \cdots\cdots\cdots\\ \rho_n^{(1)}(t)\ldots\rho_n^{(n)}(t)\end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы $D_2(t)$ находятся из соотношений:

$$[P'(t)\tilde{A}^{-2}(t)\tilde{P}(t)P''(t)-P'(t)\tilde{A}^{-2}(t)\tilde{P}(t)A'(t)\tilde{A}^{-1}(t)P'(t)]r_i(t)=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\rho_k^{(i)}(t)r_k(t),\ i=1,\ \ldots,\ n.$$

Зная $x_0(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$, запишем второе приближение к решению уравнения (1).

$$X_\varepsilon^{(2)}(t)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(t)r_i(t)+\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(t)\tilde{A}^{-1}(t)P'(t)r_i(t)+\right.$$
$$\left.+\sum_{i=1}^{n}\beta_i(t)r_i(t)\right)+\varepsilon^2\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i(t)\tilde{A}^{-1}(t)P'(t)r_i(t)+\sum_{i=1}^{n}\Gamma_i(t)r_i(t)+\right.$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(t)\tilde{A}^{-2}(t)\tilde{P}(t)P''(t)r_i(t)-$$
$$\left.-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(t)\tilde{A}^{-2}(t)\tilde{P}(t)A'(t)\tilde{A}^{-1}(t)P'(t)r_i(t)\right). \tag{11}$$

В рассматриваемом нами случае нуль является изолированной точкой спектра оператора $A(t)$. Поэтому с помощью интегрального представления проектора $P(t)$ через резольвенту оператора $A(t)$ можно показать, что гладкость операторов $P(t)$ и $A(t)$ одинакова. В связи с этим, полученные результаты сформулируем в следующем виде:

Теорема. *Если оператор $A(t)$, трижды сильно непрерывно дифференцируемый на $D(A)$, имеет изолированное собственное число нуль, которому соответствует n-мерное собственное подпространство, то второе приближение к решению уравнения* (1) *имеет вид* (11).

Если выполнена оценка (2), то обычными методами (см. [2]) можно показать, что имеет место:

$$\|X_\varepsilon^{(2)}(t)-X(t)\|=0(\varepsilon^2).$$

($X(t)$ — некоторое истинное решение уравнения (1)).

Приближения высших порядков строятся аналогично. Дадим рекуррентное описание построения n-го приближения. Методом математической индукции можно показать, что

$$\eta'_{n-1}(t)=-D_0(t)\eta_{n-1}(t)+D_1(t)\eta_{n-2}(t)+\ \ldots\ +D_{n-1}(t)\eta_0(t), \tag{12}$$

где координаты вектора $\eta_{n-1}(t)$ определяют добавку к $x_{n-1}(t)$ так, чтобы

$$P(t)\frac{dx_{n-1}}{dt}=-P(t)\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}q_i(t)r_i(t)\right)$$
$$[q_1(t),\ldots,q_n(t)]=\eta_{n-1}(t). \tag{13}$$

Элементы матрицы $D_{n-1}(t)$ определяются из условия (13).

Для построения $x_n(t)$ надо воспользоваться формулой:

$$x_n(t) = \tilde{A}^{-1}(t) \frac{d}{dt}\left(x_{n-1}(t) + \sum_{i=1}^{n} q_i(t) r_i(t)\right),$$

или

$$x_n(t) = \tilde{A}^{-1}(t) \tilde{P}(t) \frac{dx_{n-1}}{dt} + \sum_{i=1}^{n} q_i(t) \tilde{A}^{-1}(t) P'(t) r_i(t),$$

где $q_i(t)$ находятся из системы (12).

Зная $x_n(t)$, можно выписать n-ое приближение к решению уравнения (1).

$$X_\varepsilon^{(n)}(t) = x_0(t) + \varepsilon\left(x_1(t) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t) r_i(t)\right) + \ldots + \varepsilon^n\left(x_n(t) + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i(t) r_i(t)\right).$$

Построенное таким образом n-ое приближение к решению исходного уравнения будет удовлетворять ему с точностью до членов порядка ε^{n+1}, что проверяется непосредственной подстановкой $X_\varepsilon^{(n)}(t)$ в уравнение (1). Обычными методами (см. [2]) можно показать, что при наличии оценки (2) $X_\varepsilon^{(n)}(t)$ отличается от некоторого истинного решения уравнения (1) на величину порядка ε^n.

Однако, построенные нами асимптотические приближения не удовлетворяют заданным начальным условиям. Требуется ликвидировать невязки в выполнении асимптотическими приближениями начальных условий. Возникает задача построения пограничного слоя для уравнения с параметром в банаховом пространстве, в случае, если оператор $A(t)$ не имеет обратного во всем пространстве. Мы будем решать эту задачу в предположении, что начальное условие задачи (1) — x_0 принадлежит подпространству $\mathfrak{Z}_0$.

Построенное нами нулевое приближение удовлетворяет заданному начальному условию, так как $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(0) r_i(0) = x_0$.

Первое приближение к решению уравнения (1) имеет вид:

$$X_\varepsilon^{(1)}(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t) r_i(t) + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t) \tilde{A}^{-1}(t) P'(t) r_i(t) +$$
$$+ \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \beta_i(t) r_i(t),$$

так как $\beta_i(0) = 0$, то

$$X_\varepsilon^{(1)}(0) = x_0 + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(0) \tilde{A}^{-1}(0) P'(0) r_i(0).$$

Таким образом $X'_\varepsilon(t)$ не удовлетворяет заданному начальному условию. Заметим, что

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(0) \tilde{A}^{-1}(0) P'(0) r_i(0) \in M_0.$$

Для ликвидации возникшей неувязки мы к $X'_\varepsilon(t)$ добавим решение соответствующего однородного уравнения с постоянным оператором $A(0)$.

$$\varepsilon\frac{dy_1}{dt}=A(0)\,y_1(t).$$

$$y_1(0)=-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(0)\,\tilde{A}^{-1}(0)\,P'(0)\,r_i(0). \tag{14}$$

Решение уравнения (14) с начальным условием из подпространства M_0 будет само принадлежать M_0. Покажем это. Пространство E разлагалось в прямую сумму подпространств $\mathfrak{Z}_t$ и M_t инвариантных относительно оператора $A(t)$, поэтому

$$P(t)A(t)=A(t)\,P(t).$$

В частности, при $t=0$ имеем, что

$$P(0)A(0)=A(0)P(0).$$

Обозначим полугруппу, отвечающую задаче (14) — $U_\varepsilon(t)$. Решение уравнения (14) запишется в виде: $y_1(t)=U_\varepsilon(t)\,y_1(0)$.

Из коммутации $P(0)$ и $A(0)$ на области определения оператора $A(0)$ следует коммутация $U_\varepsilon(t)$ и $P(0)$ — это и означает, что $U_\varepsilon(t)$ оставляет M_0 инвариантным. Отсюда вытекает, что $y_1(t)\in M_0$.

В дальнейшем под $\tilde{U}_\varepsilon(t)$ будем понимать сужение полугруппы $U_\varepsilon(t)$ на подпространство M_0. Пусть для $\tilde{U}_\varepsilon(t)$ выполнена оценка:

$$\|U_\varepsilon(t)\|\leqslant Ce^{-\alpha\tau},\quad \tau=\frac{t}{\varepsilon}.$$

Перепишем уравнение (14) в виде:

$$\varepsilon\frac{dy_1}{dt}=\tilde{A}(0)\,y_1(t),\quad y_1(0)=-\sum_{i=1}^{n}\alpha_1(0)\,\tilde{A}^{-1}(0)\,P'(0)\,r_i(0).$$

Покажем, что решение этого уравнения удовлетворяет (1) с точностью до порядка ε. Подставим $y_1(t)$ в уравнение (1) и оценим норму разности:

$$\left\|\left(A(t)-\tilde{A}(0)\right)y_1(t)\right\|\leqslant\left\|A(t)\,\tilde{A}^{-1}(0)-I\right\|\,\left\|\tilde{A}(0)\,y_1(t)\right\|\leqslant$$

$$\leqslant t\max_t\left\|A'(t)\,\tilde{A}^{-1}(0)\right\|\,\left\|\tilde{A}(0)\,\tilde{U}_\varepsilon(t)\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(0)\,\tilde{A}^{-1}(0)\,P'(0)\,r_i(0)\right\|\leqslant$$

$$\leqslant K_1\,C\,\varepsilon\,\tau e^{-\alpha\tau}\left\|\sum_{i=0}^{n}\alpha_i(0)\,P'(0)\,r_i(0)\right\|=O(\varepsilon).$$

Таким образом, в преположениях:

$$1)\left\|\tilde{U}_\varepsilon(t)\right\|\leqslant C^{-\alpha\tau}e\qquad 2)\max_t\left\|A'(t)\,\tilde{A}^{-1}(0)\right\|\leqslant K_1$$

справедливо утверждение, что $X'_\varepsilon(t)+\varepsilon y_1(t)$ удовлетворяет уравнению (1) с точностью до членов порядка ε^2. Заметим, что $X'_\varepsilon(0)+\varepsilon y_1(0)=x_0$.

Пограничный слой второго порядка будем искать в виде:

$$V_\varepsilon^{(2)}(t)=\varepsilon\,y_1(t)+\varepsilon^2\,y_2(t),$$

где $y_1(t)$ — решение уравнения (14), а $y_2(t)$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\varepsilon^2 \frac{dy_2}{dt} = \varepsilon A(0)\, y_2(t) + t A'(0)\, y_1(t) \tag{15}$$

с начальным условием

$$y_2(0) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(0)\, \tilde{A}^{-2}(0)\, \tilde{P}(0)\, A'(0)\, \tilde{A}^{-1}(0)\, P'(0)\, r_i(0) -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(0)\, \tilde{A}^{-2}(0)\, \tilde{P}(0)\, P''(0)\, r_i(0).$$

Очевидно, что $y_2(0) \in M_0$ и $y_2(0) \in D(A^2(0))$. Предположим, что $A'(0) y_1(t) \in M_0$ (для выполнения этого достаточно, чтобы $P'(0)$ аннулировал M_0).

Подставим $V_\varepsilon^{(1)}(t)$ в уравнении (1) и оценим порядок малости по ε следующей разности:

$$\left\| \varepsilon \frac{d}{dt} \Big(\varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) \Big) - A(t) \Big(\varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) \Big) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon^3 \tau^2 C e^{-a\tau} \max_t \left\| A''(t)\, \tilde{A}^{-1}(0) \right\| \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(0)\, P'(0)\, r_i(0) \right\| +$$

$$+ \varepsilon^3 \tau \max_t \left\| A'(t)\, \tilde{A}^{-1}(0) \right\| \left\| \tilde{A}(0)\, y_2(t) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon^3 K_2 C \tau^2 l^{-a\tau} \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(0)\, P'(0)\, r_i(0) \right\| + \varepsilon^3 K_1 \tau \left\| \tilde{A}(0)\, y_2(t) \right\|.$$

Осталось оценить $\| \tilde{A}(0)\, y_2(t) \|$. Функция $y_2(t)$ удовлетворяет уравнению (15), поэтому

$$y_2(t) = \tilde{U}_\varepsilon(t)\, y_2(0) + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^t \tilde{U}_\varepsilon(t-s)\, s\, A'(0)\, y_1(s)\, ds.$$

Проинтегрировав по частям, получим

$$y_2(t) = \tilde{U}_\varepsilon(t)\, y_2(0) + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \tilde{U}_\varepsilon(t-s)\, \tilde{A}^{-1}(0)\, A'(0)\, y_1(s)\, ds +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^t \tilde{U}_\varepsilon(t-s)\, \tilde{A}^{-1}(0)\, s\, A'(0)\, \tilde{A}(0)\, y_1(s)\, ds - \frac{t}{\varepsilon} \tilde{A}^{-1}(0)\, A'(0)\, y_1(t),$$

так как $y_2(0) \in D(\tilde{A}(0))$ (см. 15), поэтому применяя к обеим частям оператор $\tilde{A}(0)$, получим:

$$\|\tilde{A}(0)\, y_2(t)\| \leqslant C e^{-a\tau} \|\tilde{A}(0)\, y_2(0)\| + \frac{C}{\varepsilon} \int_0^t e^{\frac{-a(t-s)}{\varepsilon}} \|\tilde{A}'(0) \tilde{A}^{-1}(0)\| \, \|\tilde{A}(0) y_1(s)\| +$$

$$+ \frac{C}{\varepsilon^2} \int_0^t e^{\frac{-a(t-s)}{\varepsilon}} \| A'(0)\, \tilde{A}^{-1}(0) \| \, \| \tilde{A}^2(0)\, y_1(s) \| \, s\, ds + \tau K_1 \| \tilde{A}(0)\, y_1(t) \| \leqslant$$

$$\leqslant C e^{-a\tau} \| \tilde{A}(0)\, y_2(0) \| + C^2 K_1 \tau e^{-a\tau} \| \tilde{A}(0)\, y_1(0) \| +$$

$$+ C^2 K_1 \tau^2 e^{-a\tau} \| \tilde{A}^2(0)\, y_1(0) \| + \tau K_1 C e^{-a\tau} \| \tilde{A}(0)\, y_1(0) \|.$$

В предположении $y_1(0) \in D\left(\tilde{A}^2(0)\right)$, т. е. $P'(0)\, r_i(0) \in D\left(\tilde{A}(0)\right)$ нужная оценка $\|\tilde{A}(0)\, y_2(t)\|$ получена.

Итак, если выполнены условия необходимые для построения пограничного слоя первого порядка и кроме того:

$$1)\ \max_t \| A''(t)\, \tilde{A}^{-1}(0)\| \leqslant K_2, \quad 2)\ P'(0)\, r_i(0) \in D\left(\tilde{A}(0)\right)$$

и $A'(0)\, y_1(t) \in M_0$,
то выражение $X_\varepsilon^{(2)}(t) + V_\varepsilon^{(2)}(t)$ удовлетворяет уравнению (1) с точностью до порядка ε^3 и $X_\varepsilon^{(2)}(0) + V_\varepsilon^{(2)}(0) = x_0$.

Приведем условия, достаточные для построения пограничного слоя третьего порядка. 1) Условия достаточные для построения пограничного слоя второго порядка.

$$2)\ P'(0)\, r_i(0) \in D\left(\tilde{A}^2(0)\right); \quad 3)\ \max_t \| A'''(t)\, \tilde{A}^{-1}(0) \| \leqslant K_3;$$

$$4)\ \| \tilde{A}(0)\, A'(0)\, \tilde{A}^{-2}(0) \| \leqslant M_1; \quad 5)\ \| [A'(0)]^2 \tilde{A}^{-2}(0) \| \leqslant З_1. \tag{*}$$

Пограничный слой n-го порядка ищется в виде:

$$V_\varepsilon^{(n)}(t) = \varepsilon\, y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + \ldots + \varepsilon^n y_n(t),$$

где $y_i(t)$ является решением уравнения

$$\varepsilon^{i+1} \frac{dy_i}{dt} = \varepsilon^i A(0)\, y_i(t) + \varepsilon^{i-1}\, t\, A'(0)\, y_{i-1}(t) + \ldots + \frac{t^i}{i!} A^{(i)}(0)\, y_1(t).$$

Начальное условие для уравнения (16) подбирается таким образом, чтобы

$$X_\varepsilon^{(i)}(0) + V_\varepsilon^{(i)}(0) = x_0.$$

Предположим, что $A'(0)\, y_{i-1}(t) \in M_0, \ \ldots\ A^{(i)}(0)^{\prime} y_1(t) \in M_0$. (Для этого достаточно, чтобы $P'(0), P''(0), \ldots\ P^{(i)}(0)$ аннулировали M_0.)

Если на всевозможные наборы производных оператора $A(t)$ до порядка $i-1$ наложить условия типа (*) и потребовать, чтобы $P'(0)\, r_i(0) \in D\left(A^{(i)}(0)\right)$, то $V_\varepsilon^{(i)}(t)$ будет удовлетворять уравнению (1) с точностью до порядка $i+1$.

Отметим, что при выполнении оценки (2) выражение $X_\varepsilon^{(n)}(t) + V_\varepsilon^{(n)}(t)$ отличается от истинного решения уравнения (1) на величину порядка ε^n. Это можно показать, подставив $X_\varepsilon^{(n)}(t) + V_\varepsilon^{(n)}(t)$ в исходное уравнение и перейдя к интегральному уравнению, обращением полученного выражения.

Отметим еще, что в случае неоднородного уравнения решение надо искать в виде $x(t) = \sum\limits_{i=-1}^{\infty} \varepsilon^i x_i(t)$. При отыскании приближений возникают системы, аналогичные с рассмотренными. Построение пограничного слоя полностью совпадает с рассмотренным.

Замечание. Любопытно отметить, что при условии $\| U_\varepsilon(t, s) \| \leqslant M e^{\frac{-a(t-s)}{\varepsilon}}$, оператор $A(t)$ не может иметь нуль собственным значением. В самом деле, пусть $A(t) r(t) = \Theta$. Покажем, что $r(t) = \Theta$.

В самом деле:

$$\varepsilon r'(t) = A(t) r(t) + \varepsilon r'(t),$$

или

$$r(t) = U_\varepsilon(t, 0)\, r(0) + \int_0^t U_\varepsilon(t, s) r'(s) ds.$$

Оценим норму собственного вектора

$$\| r(t) \| \leqslant M e^{\frac{-at}{\varepsilon}} + M \int_0^t e^{\frac{-a(t-s)}{\varepsilon}} \| r'(\varepsilon) \| \, ds.$$

Устремляя ε к нулю, получим, что $r(t) = \Theta$ на полуинтервале $(0, T)$. Из непрерывности $r(t)$ следует, что $r(t) = \Theta$ на $[0, T]$.

В заключение автор выражает глубокую благодарность профессору С. Г. Крейну за постоянную помощь в работе, а также Ю. С. Колесову за ценные обсуждения.

Хабаровск

Поступило в редакцию
5.I. 1968

Литература

1. А. Б. Васильева и М. Иманалиев, Асимптотика решения задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения с малым параметром при производной, СМЖ УП, № 1 (1966).
2. С. Г. Крейн, Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, Наука, 1967.
3. М. И. Вишик и Л. А. Люстерник, Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром, УМН XII, вып. 5 (1957).
4. Ф. Рисс и Б. Секефальви-Надь, Лекции по функциональному анализу, 1954.

ASIMPTOTINIS INTEGRAVIMAS IR PASIENIO SLUOKSNIO KONSTRAVIMAS LYGČIAI BANACHO ERDVĖJE

V. OSIPOVAS

(*Reziumė*)

Nagrinėjama diferencialinė lygtis Banacho erdvėje su išsigimusiu neaprėžtu operatoriumi ir mažu parametru prie išvestinės. Gautos sprendinio n-ojo priartėjimo ir n-os eilės pasienio sluoksnio formulės, kai operatoriaus išsigimimas baigtinis.

APROXIMATE INTEGRATION AND CONSTRUCTION OF A BOUNDER LAYER OF EQUATION ON THE BANACH'S SPACE

V. OSIPOV

(*Summary*)

The differencial equation in the Banach's space with the degenerated unbounded operator and the small parameter at derivative is considered. When degeneration of the operator is finite the formulae of the nth aproximation and the 'formulae' of the bounder layer of the nth degree are found.