1968

УДК–517.522.2

ОБ ОБЛАСТЯХ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДОВ НЬЮТОНА И ФАКТОРИАЛЬНОГО

Э. В. МОРОЗЮК

В статье устанавливается связь между некоторыми областями равномерной сходимости рядов Ньютона

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\prod\limits_{k=1}^{n} \lambda_k} \prod_{k=1}^{n} (z-\lambda_k) \tag{1}$$

и факториального

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \prod_{k=1}^{n} \lambda_k \frac{(-1)^n}{\prod\limits_{k=1}^{n} (z+\lambda_k)} . \tag{2}$$

Ряды (1) и (2) называют сопряженными.

Известна теорема Е. Ландау [1] о том, что в случае $\lambda_k=k$ сопряженные ряды (1) и (2) сходятся или расходятся одновременно во всех точках, отличных от $z=\pm\lambda_k$, $k=1, 2, 3, \ldots$ Теорема остается верной и в случае, когда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_k|^2} < \infty .$$

Проследив за доказательствами этих теорем, нетрудно заметить, что если факториальный ряд (2) сходится равномерно в некоторой области, то и сопряженный ряд Ньютона (1) сходится равномерно в той же области; и наоборот, если ряд (1) сходится равномерно в некоторой области, то и ряд (2) сходится равномерно в той же области с выброшенными из нее окрестностями точек $-\lambda_k$, попавших в эту область.

В работе М. Гандлера, Э. Голосовой и А. Нафталевича [2] устанавливается связь между сходимостью в точке рядов (1) и (2), если узлы λ_k положительны, $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k=\infty$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_k|^2} = \infty .$$

Незначительно изменив доказательство, получим, что и в этом случае некоторые области равномерной сходимости рядов (1) и (2), удовлетворяющие определенным условиям, совпадают.

Этот результат включается в теорему, которую мы сейчас докажем. Удобно ввести определение.

Определение. Будем говорить, что последовательность $\{\lambda_k\}$ удовлетворяет условиям (γ), если

1) $|\lambda_k|\to\infty$ при $k\to\infty$;

2) $|\arg\cdot\lambda_k|\leqslant\psi_0,\ 0\leqslant\psi_0<\frac{\pi}{4}$;

3) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|\lambda_k|^2}$ расходится.

Теорема 1. *Пусть последовательность* $\{\lambda_k\}$ *удовлетворяет условиям* (γ) *и ряд Ньютона* (1) *сходится равномерно в ограниченной области* G, *не содержащей сколь угодно малой окрестности точки* $z=0$; *все точки* G *довлетворяют одному из неравенств*

$$\left|\arg z-\frac{\pi}{2}\right|<\frac{\pi}{4}-\psi_0-\delta\quad\text{или}\quad\left|\arg z-\frac{3\pi}{2}\right|<\frac{\pi}{4}-\psi_0-\delta,$$

где $0<\delta<\frac{\pi}{4}-\psi_0$. *Тогда и факториальный ряд* (2) *сходится равномерно в той же области.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что согласно условиям теоремы ни один узел λ_k, $k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ не попадает в G.

Используем критерий Коши равномерной сходимости ряда.

Так как ряд (1) сходится равномерно в G, то для $\varepsilon>0$ можно указать такое N_0, что для всех $n>N_0$ и всех z из G выполняется неравенство

$$|R_n(z)|=\left|\sum_{q=n+1}^{\infty}a_q\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{q}\lambda_k}\prod_{k=1}^{q}(z-\lambda_k)\right|<\varepsilon.$$

К отрезку ряда (2) применим преобразование Абеля, считая $N>N_0$ и $M>N_0$.

$$|T_{N,M}(z)|=\left|\sum_{n=N}^{M}(-1)^n a_n\prod_{k=1}^{n}\lambda_k\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}(z+\lambda_k)}\right|=$$

$$=\left|\sum_{n=N}^{M}[R_{n-1}(z)-R_n(z)]\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z^2}{\lambda_k^2}\right)}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon\left[\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{N}\left|1-\frac{z^2}{\lambda_k^2}\right|}+\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{M+1}\left|1-\frac{z^2}{\lambda_k^2}\right|}+\sum_{n=N}^{M}\left|\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n+1}\left(1-\frac{z^2}{\lambda_k^2}\right)}-\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z^2}{\lambda_k^2}\right)}\right|\right].$$

Аргумент $\arg\frac{z^2}{\lambda_k^2}$ лежит в одном из интервалов

$$\left(\frac{\pi}{2}+2\delta,\ \frac{3\pi}{2}-2\delta\right)$$

или

$$\left(\frac{5\pi}{2}+2\delta,\ \frac{7\pi}{2}-2\delta\right).$$ Это означает,

что

$$\left|1-\frac{z^2}{\lambda_k^2}\right|>1$$

для всех k и всех z из G. Следовательно, при всех z из G и всех N дробь

$$\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{N}\left|1-\frac{z^2}{\lambda_k^2}\right|}<1$$

и монотонно убывает с ростом N.

Покажем, что суммы

$$\sum_{n=N}^{M}\left|\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left|1-\frac{z^2}{\lambda_k^2}\right|}-\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n+1}\left|1-\frac{z^2}{\lambda_k^2}\right|}\right|$$

ограничены постоянной, не зависящей от z из G, N и M.

Выражение

$$\sum_{n=N}^{M}\left(\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left|1-\frac{z^2}{\lambda_k^2}\right|}-\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n+1}\left|1-\frac{z^2}{\lambda_k^2}\right|}\right)=$$

$$=\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{N}\left|1-\frac{z^2}{\lambda_k^2}\right|}-\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{M+1}\left|1-\frac{z^2}{\lambda_k^2}\right|}<1 \qquad (3)$$

при всех z из G, N и M.

Покажем, что

$$\left|\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z^2}{\lambda_k^2}\right)}-\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n+1}\left(1-\frac{z^2}{\lambda_k^2}\right)}\right|<a\left(\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left|1-\frac{z^2}{\lambda_k^2}\right|}-\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n+1}\left|1-\frac{z^2}{\lambda_k^2}\right|}\right), \qquad (4)$$

где a — положительная постоянная не зависящая от z и n.

Тогда из неравенств (3) и (4) будет следовать требуемое, а именно

$$\sum_{n=N}^{M}\left|\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z^2}{\lambda_k^2}\right)}-\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n+1}\left(1-\frac{z^2}{\lambda_k^2}\right)}\right|<a.$$

Итак, установим справедливость неравенства (4). Оно равносильно неравенству

$$\frac{|\lambda_{n+1}^2-z^2|-|\lambda_{n+1}^2|}{|z^2|}>\frac{1}{a}>0.$$

Так как область G ограничена, то для всех z из G

$$\frac{1}{|z^2|} > b > 0, \quad b = \mathrm{const}.$$

Оценим

$$|\lambda_{n+1}^2 - z^2| - |\lambda_{n+1}^2| =$$
$$= \frac{-2\operatorname{Re}\lambda_{n+1}^2 \operatorname{Re} z^2 - 2\operatorname{Im}\lambda_{n+1}^2 \operatorname{Im} z^2 + |z^2|}{\sqrt{(\operatorname{Re}\lambda_{n+1}^2 - \operatorname{Re} z^2)^2 + (\operatorname{Im}\lambda_{n+1}^2 - \operatorname{Im} z^2)^2} + \sqrt{(\operatorname{Re}\lambda_{n+1}^2)^2 + (\operatorname{Im}\lambda_{n+1}^2)^2}}.$$

По условию теоремы

$$|\operatorname{Im}\lambda_{n+1}^2| < \operatorname{Re}\lambda_{n+1}^2 \operatorname{tg} 2\psi_0,$$
$$\operatorname{Re} z^2 < 0$$

и

$$|\operatorname{Im} z^2| < -\operatorname{Re} z^2 \operatorname{ctg}(2\psi_0 + 2\delta).$$

Поэтому

$$|\lambda_{n+1}^2 - z^2| - |\lambda_{n+1}^2| >$$
$$> \frac{-2\operatorname{Re}\lambda_{n+1}^2 \operatorname{Re} z^2 + 2\operatorname{Re}\lambda_{n+1}^2 \operatorname{tg} 2\psi_0 \operatorname{Re} z^2 \frac{1}{\operatorname{tg}(2\psi_0 + 2\delta)}}{\sqrt{(\operatorname{Re}\lambda_{n+1}^2 - \operatorname{Re} z^2)^2 + [\operatorname{Re}\lambda_{n+1}^2 \operatorname{tg} 2\psi_0 - \operatorname{Re} z^2 \operatorname{ctg}(2\varphi_0 + 2\delta)]^2} + \sqrt{\operatorname{Re}\lambda_{n+1}^2}\,(1 + \operatorname{tg}^2 2\psi_0)} =$$
$$= \frac{-2\operatorname{Re} z^2 \left[1 - \frac{\operatorname{tg} 2\psi_0}{\operatorname{tg}(2\psi_0 + 2\delta)}\right]}{\sqrt{\left(1 - \frac{\operatorname{Re} z^2}{\operatorname{Re}\lambda_{n+1}^2}\right)^2 + \left[\operatorname{tg} 2\psi_0 - \frac{\operatorname{Re} z^2}{\operatorname{Re}\lambda_{n+1}^2} \operatorname{ctg}(2\psi_0 + 2\delta)\right]^2} + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\psi_0}}.$$

Последнее выражение равномерно по z из G стремится к положительному пределу, равному

$$\frac{-\operatorname{Re} z^2 \left[1 - \frac{\operatorname{tg} 2\psi_0}{\operatorname{tg}(2\psi_0 + 2\delta)}\right]}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\psi_0}} > \frac{\eta \left[1 - \frac{\operatorname{tg} 2\psi_0}{\operatorname{tg}(2\psi_0 + 2\delta)}\right]}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\psi_0}} > 0,$$

причем $-\operatorname{Re} z^2 > \eta > 0$ согласно условиям теоремы.

Значит,

$$|\lambda_{n+1}^2 - z^2| - |\lambda_{n+1}^2| > c > 0,$$

где c не зависит от z из G и n; $a = \frac{1}{bc}$.

Итак,

$$|T_{N,M}(z)| < \varepsilon\,(2 + a).$$

Теорема доказана.

Аналогично доказывается следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть последовательность* $\{\lambda_k\}$ *удовлетворяет условиям* (γ), *а факториальный ряд* (2) *сходится равномерно в ограниченной области* G, *не содержащей окрестности точки* $z=0$; *все точки области* G *удовлетворяют одному из неравенств*

$$|\arg z| < \frac{\pi}{4} - \psi_0 - \delta \quad \text{или} \quad |\arg z - \pi| < \frac{\pi}{4} - \psi_0 - \delta,$$

где $0<\delta<\frac{\pi}{4}-\psi_0$. *Тогда ряд Ньютона* (1) *сходится равномерно в той же области.*

В заключение приношу благодарность професору М. Г. Хапланову за внимание к работе.

Ростовский Государственный
университет

Поступило в редакцию
12. II. 1968

Литература

1. E. Landau, Über die Grundlagen der Theorie der Fakultätenreihen, Stzgsber. Akad. München, t. 36 (1906), 151–218.
2. М. Гандлер, Э. Голосова, А. Нафталевич, О сходимости факториальных рядов, Лит. мат. сб., I, 1–2 (1961), 41–57.

NIUTONO IR FAKTORIALINIŲ EILUČIŲ TOLYGIOS KONVERGENCIJOS SRITYS

E. MOROZIUK

(*Reziumė*)

Darbe yra nagrinėjamos Niutono eilutės

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\prod_{k=1}^{n} \lambda_k} \prod_{k=1}^{n} (z-\lambda_k)$$

ir faktorialinės eilutės

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \prod_{k=1}^{n} \lambda_k \frac{(-1)^n}{\prod_{k=1}^{n} (z+\lambda_k)}$$

tolygios konvergencijos sritys, kai $\lim_{k\to\infty} \lambda_k=\infty$ ir $|\arg \lambda_k| \leqslant \psi_0, 0 \leqslant \psi_0 < \frac{\pi}{4}$.

ÜBER DIE BEREICHE DER GLEICHMÄSSIGEN KONVERGENZ DER NEWTONSCHEN REIHE UND DER FAKULTATENREIHE

E. MOROSJUK

(*Zusammenfassung*)

In diesem Artikel betrachtet man das Verhältnis zwischen den Bereichen der gleichmässigen Konvergenz der Newtonschen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\prod_{k=1}^{n} \lambda_k} \prod_{k=1}^{n} (z+\lambda_k)$$

und der Fakultätenreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \prod_{k=1}^{n} \lambda_k \frac{(-1)^n}{\prod\limits_{k=1}^{n} (z+\lambda_k)}$$

bei $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = \infty$ und $|\arg \lambda_k| \leqslant \psi_0$, $0 \leqslant \psi_0 < \frac{\pi}{4}$.