1968

УДК–517.934

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ

А. В. КИБЕНКО, Л. Г. ЧЕПУРНОВА

Многие задачи в теории обыкновенных дифференциальных уравнений приводят к разрешимости операторного уравнения

$$T(x)=y, \tag{1}$$

где T – оператор, действующий в некотором пространстве E, y – фиксированный элемент из E.

В настоящей заметке в конечномерном пространстве E_n доказывается новая теорема существования и единственности решения уравнения (1). В качестве приложения устанавливаются достаточные условия однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи для системы дифференциальных уравнений с векторным параметром λ

$$\frac{dx}{dt}=f(t, x, \lambda), \tag{2}$$

$$x(t_0)=x_0, \; x(t_1)=x_1. \tag{3}$$

1. Пусть $x=(x_1, \ldots, x_n)$ и $y=(y_1, \ldots, y_n)$ векторы из пространства E_n. Кронекеровским или тензорным произведением $x\otimes y$ векторов x и y называется (см., напр., [1]) матрица вида

$$x\otimes y=\begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & & x_1y_n \\ & & & \\ x_ny_1 & x_ny_2 & & x_ny_n \end{pmatrix}.$$

В дальнейшем всюду в E_n через $\|x\|$ обозначается (см. [2]) векторная норма

$$\|x\|=\begin{pmatrix} |x_1| \\ |x_2| \\ \cdot \\ |x_n| \end{pmatrix},$$

а неравенство $x\leqslant y$ понимается покоординатно, т. е. $x_i\leqslant y_i$ $(i=1, 2, \quad n)$.

Если A линейный оператор в пространстве E_n, матрица которого в некотором базисе имеет вид $\|A\|=(a_{ij})$ $(i, j=1, 2, \quad n)$, то легко показать, что $\|A\|=(|a_{ij}|)=|A|$.

Неотрицательную матрицу $S=(s_{ij})\geqslant 0$ $(s_{ij}\geqslant 0)$ будем называть (см. [2]) a — матрицей, если все последовательные главные миноры матрицы I — S (I — единичная матрица) положительны.

Матрицу $T=(t_{ij})$, у которой $t_{ij}\leqslant 0$ $(i\neq j)$, будем называть (см. [3]) κ — матрицей, если все ее последовательные главные миноры положительны. k — матрица T обладает тем свойством, что все элементы обратной матрицы T^{-1} положительны, т. е. $T^{-1}>0$.

Из определения тензорного произведения векторов непосредственно вытекает следующие свойства.

1. $x\otimes y\leqslant \| x \| \| y \|$ для любых x, $y\in E_n$.

2. Из неравенства

$$f(x)\otimes x\geqslant H\| x \|\otimes \| x \|,$$

где $f(x)=(f_1(x), \ldots, f_n(x))$ и H — некоторая матрица следует, что

$$\| f(x) \|\geqslant H\| x \|.$$

3. $\alpha x\otimes y=\alpha (x\otimes y)$ для любого вещественного α и любых векторов x, $y\in E_n$.

Для дальнейшего нам потребуется следующая лемма.

Лемма. *Пусть задано семейство операторов* $F_\mu(x)$ $(0\leqslant\mu\leqslant 1)$, *отображающих* E_n *в себя и удовлетворяющих условиям*:

а) $F_0(x)$ *обратим*;

б) *при всех* $\mu\in[0, 1]$ *и* x, $y\in E_n$ *выполнено неравенство*

$$\| F_\mu(x)-F_\mu(y) \| \geqslant H\| x -y \|, \tag{4}$$

где матрица H *является* k — *матрицей*;

в) при μ, $\mu_0\in[0, 1]$ *и* x, $y\in E_n$ *выполнено неравенство*

$$\| F_\mu(x)-F_\mu(y)-F_{\mu 0}(x)+F_{\mu 0}(y) \| \leqslant S \mid \mu-\mu_0 (\| x-y \|, \tag{5}$$

где S — *положительная матрица.*

Тогда оператор $F_\mu(x)$ *обратим при всех* $0\leqslant\mu\leqslant 1$.

Доказательство. Заметим прежде всего, что из непрерывности оператора $F_0(x)$ и неравенства (5) следует непрерывность $F_\mu(x)$ при всех $0\leqslant\mu\leqslant 1$.

Обозначим через D матрицу $H^{-1}S$. Очевидно $D>0$. Следовательно, в силу теоремы Перрона (см., напр., (4)) у матрицы D существует наибольшее положительное собственное значение $\rho>0$. Тогда спектр матрицы $D_1=\frac{D}{\delta}$ $(\delta>\rho)$ будет лежать внутри единичного круга и поэтому матрица D_1 является (2)a — матрицей.

Покажем теперь, что из обратимости оператора $F_{\mu_0}(x)$ при некотором $\mu_0\in[0, 1]$ вытекает обратимость операторов $F_\mu(x)$ при $\mid\mu-\mu_0\mid<\frac{1}{\delta}$, если только $\delta>p$. Обозначим через $F^{-1}_{\mu_0}(x)$ оператор, обратный к $F_{\mu_0}(x)$. Из условия б) леммы следует, что

$$\| F^{-1}_{\mu_0}(x)-F^{-1}_{\mu_0}(y) \| \leqslant H^{-1} \| x-y \|. \tag{6}$$

Рассмотрим теперь уравнение

$$F_\mu(x)=u, \tag{7}$$

где u фиксированный элемент из E_n. Уравнение (7) эквивалентно следующему

$$x = A(x), \tag{8}$$

где

$$A(x) = F_{\mu_0}^{-1}\{u - F_\mu(x) + F_{\mu_0}(x)\}.$$

Покажем теперь, что оператор $A(x)$ удовлетворяет условиям обобщенного принципа сжатых отображений. [2]. Действительно, из неравенства (6) в силу условия в леммы имеем

$$\|A(x) - A(y)\| = \|F_{\mu_0}^{-1}\{u - F_\mu(x) + F_{\mu_0}(x)\} - F_{\mu_0}^{-1}\{u - F_\mu(y) + F_{\mu_0}(y)\}\| \leqslant H^{-1}\|F_{\mu_0}(x) - F_\mu(x) - F_{\mu_0}(y) + F_\mu(y)\| \leqslant \frac{H^{-1}S}{\delta}\|x - y\| = D_1\|x - y\|,$$

где матрица D_1 по доказанному ранее является a — матрицей.

Разобьем теперь отрезок [0, 1] на части длины, меньшей $\frac{1}{\delta}$ точками $\mu_0 = 0 < \mu_1 < \quad < \mu_p = 1$. По условию а) леммы оператор $F_0(x)$ обратим. Тогда по доказанному будут обратимы операторы $F_\mu(x)$ при $\mu \in [0, \mu_1]$. Из обратимости $F_{\mu 1}(x)$ следует обратимость $F_\mu(x)$ при $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$ и так далее. После p шагов мы исчерпаем весь отрезок. Лемма доказана.

В казестве следствия доказанной леммы получается теорема.

Теорема 1. *Пусть нелинейный оператор $T(x)$ действует в E_n и удовлетворяет условиям*

$$\|T(x) - T(\tilde{x})\| \leqslant S\|x - \tilde{x}\|, \tag{9}$$

где S — положительная матрица и

$$\left(T(x) - T(\tilde{x})\right) \otimes (x - \tilde{x}) \geqslant H(x - \tilde{x}) \otimes (x - \tilde{x}), \tag{10}$$

где матрица H является k — матрицей, причем $h_{ii} \leqslant 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Тогда уравнение (1) однозначно разрешимо при любом $y \in E_n$.

Доказательство. Определим семейство операторов

$$F_\mu(x) = (1 - \mu)\mathrm{I}x + \mu T(x) \quad (0 \leqslant \mu \leqslant 1)$$

и покажем, что для операторов $F_\mu(x)$ выполнены условия предыдущей леммы.

Действительно, оператор $F_0(x) = \mathrm{I}x$ обратим. Далее, в силу неравенства (9)

$$\|F_\mu(x) - F_\mu(\tilde{x}) - F_{\mu_0}(x) + F_{\mu_0}(\tilde{x})\| = \|(\mu - \mu_0)(x - \tilde{x}) + (\mu - \mu_0) \times \{T(x) - T(\tilde{x})\}\| \leqslant |\mu - \mu_0|\{\|x - \tilde{x}\| + S\|x - \tilde{x}\|\} = |\mu - \mu_0|(I + S)\|x - \tilde{x}\|.$$

Из неравенства (10) следует

$$\left(F_\mu(x) - F_\mu(\tilde{x})\right) \otimes (x - \tilde{x}) \geqslant (1 - \mu)(x - \tilde{x}) \otimes (x - \tilde{x}) + \mu H(x - \tilde{x}) \otimes (x - \tilde{x}) = [(1 - \mu I + \mu H](x - \tilde{x}) \otimes (x - \tilde{x}),$$

поэтому

$$\left(F_\mu(x) - F_\mu(\tilde{x})\right) \otimes (x - \tilde{x}) \geqslant [(1 - \mu)I + \mu H](x - \tilde{x}) \otimes (x - \tilde{x}). \tag{11}$$

Так как с другой стороны

$$\left(F_\mu(x)-F_\mu(\tilde{x})\right)\otimes(x-\tilde{x})\leqslant \| F_\mu(x)-F_\mu(x)\|\otimes\| x-\tilde{x}\|, \tag{12}$$

то из оценок (11) и (12) получаем

$$\| F_\mu(x)-F_\mu(\tilde{x})\|\otimes\| x-\tilde{x}\|\geqslant[(1-\mu)I+\mu H](x-\tilde{x})\otimes(x-\tilde{x}). \tag{13}$$

Выписывая неравенства, стоящие на главной диагонали последнего неравенства, приходим к следующим соотношениям:

$$\| F_\mu^i(x)-F_\mu^i(\tilde{x})\|\, |x^i-\tilde{x}^i|\geqslant[(1-\mu)+\mu h_{ii}]\,|x^i-\tilde{x}^i|-$$

$$-\mu\,|x^i-\tilde{x}^i|\cdot\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} h_{ij}\,|x^j-\tilde{x}^j|.$$

Разделив здесь обе части на $|x^i-\tilde{x}^i|$, окончательно получаем

$$\| F_\mu(x)-F_\mu(\tilde{x})\|\geqslant H\cdot\| x-\tilde{x}\|,$$

где H является k – матрицей по условию теоремы.

Таким образом, выполнены все условия леммы и потому оператор $F_1(x)=$ $=T(x)$ обратим. Теорема доказана.

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1, *кроме неравенства* (10), *которое заменено следующим*:

$$(T(x)-T(\tilde{x}))\otimes(x-\tilde{x})\geqslant H\,\| x-\tilde{x}\|\otimes\| x-\tilde{x}\|, \tag{14}$$

где H является k – матрицей и $h_{ii}\leqslant 1$ $(i=1,\ 2,\quad n)$.

Тогда оператор $T(x)$ обратим.

3. В качестве приложения доказанных теорем укажем достаточные услови существования и единственности решения краевой задачи

$$\frac{dx}{dt}=f(t,\ x,\ \lambda), \tag{2}$$

$$x(t_0)=x_0,\ x(t_1)=x_1. \tag{3}$$

Теорема 3. *Пусть вектор – функция $f(t,\ x,\ \lambda)$ определена и непрерывна по совокупности переменных в области $t_0\leqslant t\leqslant t_1$, x, $\lambda\in E_n$ и удовлетворяет условиям*

$$\| f(t,\ x,\ \lambda)-f(t,\ \tilde{x},\ \tilde{\lambda})\|\leqslant A\,\| x-\tilde{x}\|+B(t)\,\|\lambda-\tilde{\lambda}\|, \tag{15}$$

где A постоянная неотрицательная матрица, а $B(t)$ непрерывная при $t_0\leqslant t\leqslant t_1$ положительная матрица и

$$\left(f(t,\ x,\ \lambda)-f(t,\ x,\ \tilde{\lambda})\right)\otimes(\lambda-\tilde{\lambda})\geqslant P(t)\,\|\lambda-\tilde{\lambda}\|\otimes\|\lambda-\tilde{\lambda}\|, \tag{16}$$

где $P(t)$ непрерывная на отрезке $[t_0,\ t_1]$ матрица, причем матрица

$$H=(h_{ij})=P-\int_{t_0}^{t_1}(e^{A(t_1-s)}-I)\,B(s)\,ds, \qquad \left(P=\int_{t_0}^{t_1}P(s)\,ds\right)$$

является k – матрицей и $h_{ii}\leqslant 1$ $(i=1,\ 2,\quad n)$.

Тогда задача (2) – (3) *имеет единственное решение.*

Доказательство. Из неравенства (15) вытекает, что при каждом фиксированном $\lambda \in E_n$ решение $x(t, \lambda)$ задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = (t, x, \lambda), \qquad x(t_0) = x_0 \tag{17}$$

существует и единственно на отрезке $[t_0, t_1]$.

Положим

$$T(\lambda) = x(t_1, \lambda) = x_0 + \int_{t_0}^{t_1} f(s, x(s, \lambda), \lambda)\, ds.$$

Тогда разрешимость задачи (2) – (3) эквивалентна разрешимости операторного уравнения

$$T(\lambda) = x_1,$$

где оператор $T(\lambda)$ каждому $\lambda \in E_n$ ставит в соответствие значение решения $x(t, \lambda)$ задачи (17) при $t = t_1$.

Покажем, что оператор $T(\lambda)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2. Отсюда и будет следовать справедливость доказываемой теоремы.

Обозначим через $x(t) = x(t, \lambda)$ и $\tilde{x}(t) = x(t, \tilde{\lambda})$. Из (17) и неравенства (15) получаем

$$D^* \| x(t) - \tilde{x}(t) \| \leqslant \int_{t_0}^{t} \{ A \| x(s) - \tilde{x}(s) \| + B(s) \| \lambda - \tilde{\lambda} \| \}\, ds,$$

где через D^* обозначено верхнее правое производное число. Отсюда в силу теоремы о дифференциальных неравенствах имеем

$$\| x(t) - \tilde{x}(t) \| \leqslant \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} B(s)\, ds \, \| \lambda - \tilde{\lambda} \|, \tag{18}$$

и, следовательно,

$$\| T(\lambda) - T(\tilde{\lambda}) \| \leqslant \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-s)} B(s)\, ds \, \| \lambda - \tilde{\lambda} \|, \tag{19}$$

где матрица $\int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-s)} B(s)\, ds$ является положительной в силу неотрицательности A и положительности матрицы $B(t)$. Далее

$$\left(T(\lambda) - T(\tilde{\lambda})\right) \otimes (\lambda - \tilde{\lambda}) = \int^{t_1} \left[\left[\left(f\left(s, x(s), \lambda\right) - f\left(s, \tilde{x}(s)\, \tilde{\lambda}\right)\right] \otimes (\lambda - \tilde{\lambda}) \right] ds =$$

$$\int^{t_1} \left[f\left(s, x(s), \lambda\right) - f\left(s, x(s), \tilde{\lambda}\right) \otimes (\lambda - \tilde{\lambda}) \right] ds +$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\left(f\left(s, x(s), \tilde{\lambda}\right) - f\left(s, \tilde{x}(s), \tilde{\lambda}\right) \right) \otimes (\lambda - \tilde{\lambda}) \right] ds.$$

Оценим каждое из слагаемых, стоящих в правой части последнего соотношения. Из условия (16) теоремы имеем

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\left(f\left(s,\ x(s),\ \lambda\right)-f\left(s,\ x(s),\ \tilde{\lambda}\right)\right)\otimes(\lambda-\tilde{\lambda})\right)ds \geqslant P\|\lambda-\tilde{\lambda}\|\otimes\|\lambda-\tilde{\lambda}\|. \quad (20)$$

Из неравенств (15) и (18) получаем

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\left(f\left(s,\ x(s),\ \tilde{\lambda}\right)-f\left(s,\ \tilde{x}(s),\ \tilde{\lambda}\right)\right)\otimes(\lambda-\tilde{\lambda})\right]ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_0}^{t_1}\left[\left(|f|\,s,\ x(s),\ \tilde{\lambda}\right)-f\left(s,\ x(s),\ \tilde{\lambda}\right)\|\otimes\|\lambda-\tilde{\lambda}\|\right]ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_0}^{t_1}[A\,\|x(s)-\tilde{x}(s)\|\otimes\|\lambda-\tilde{\lambda}\|]\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t} Ae^{A(t-s)}B(s)\,ds\,\|\lambda-\tilde{\lambda}\|\otimes\|\lambda-\tilde{\lambda}\|.$$

Отсюда, интегрируя по частям, приходим к оценке

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\left(f\left(s,\ x(s),\ \tilde{\lambda}\right)-f\left(s,\ \tilde{x}(s),\ \tilde{\lambda}\right)\otimes(\lambda-\tilde{\lambda})\right]ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_0}^{t_1}(e^{A(t_1-s)}-I)\,B(s)\,ds\,\|\lambda-\tilde{\lambda}\|\otimes\|\lambda-\tilde{\lambda}\|. \quad (21)$$

Неравенства (20) и (21) приводят к оценке

$$\left(T(\lambda)-T(\tilde{\lambda})\right)\otimes(\lambda-\tilde{\lambda}) \geqslant \left[P-\int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-s)}-I)\,B(s)\,ds\right]\|\lambda-\tilde{\lambda}\|\otimes\|\lambda-\tilde{\lambda}\|. \quad (22)$$

Оценки (19) и (22) показывают, что оператор $T(\lambda)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2. Следовательно, уравнение $T(\lambda)=x_1$, а вместе с ним и задача (2)–(3) имеет единственное решение.

Теорема доказана.

Воронежский государственный университет

Поступило в редакцию 9. I. 1968

Литература

1. П. Халмош, Конечномерные векторные пространства, Физматгиз, 1963.
2. А. И. Перов, О задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, Приближ. методы решения дифференциальных уравнений, Киев, «Наукова думка», 1964, 115–134.
3. M. Fiedler and V. Ptăk, On matrices with non-positive off-diagonal elements and positive principial minors, Чехосл. матем. журнал, **12** (87), (1962), 382–400.
4. Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, ГИТТЛ, М., 1954.

APIE VIENĄ EGZISTENCIJOS IR VIENETINUMO TEOREMĄ

A. KIBENKO, L. ČEPURNOVA

(*Rezi mė*)

Operatorinei lygčiai

$T(x)=y$,

naudojantis vektorių iš n-matės erdvės su apibendrinta norma tenzorine sandauga, įrodomos sprendinio egzistencijos ir vienetinumo sąlygos. Po to šios teoremos panaudojamos, įrodant kraštinio uždavinio paprastų diferencialinių lygčių sistemos su vektoriniu parametru vienareikšmiškam išsprendžiamumui.

ON ONE EXISTENCE AND UNIQUENESS THEOREM

A. KIBENKO, L. CHEPURNOWA

(*Summary*)

The paper contains the proof of some existence and uniqueness theorems for an operator equation

$T(x)=y$.

The tensor product of vectors in a finite dimensional vector space with generalized norms is used to prove these theorems.

On latter developments these theorems are used to prove the unique solution of two extreme problems for the system of ordinary differential equations with vector parameters.