VIII LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 2
1968

УДК–513.88:513.83

О СОПРЯЖЕННОСТИ ВОГНУТО-ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ

Н. Т. ТЫНЯНСКИЙ

1. Пусть даны вещественные локально-выпуклые хаусдорфовы линейные топологические пространства H_1 и H_2, в которых выделены выпуклые множества C_1 и C_2 соответственно. Прямое произведение пространств H_1 и H_2 будем обозначать через $H_1\times H_2$, а через $H\times R$ прямое произведение пространства H на вещественную прямую R с естественной топологией. Для обозначения точек x пространства $H_1\times H_2$ будем пользоваться выражением $(x_1;\ x_2)$, где x_1 и x_2 проекции точки x на пространства H_1 и H_2 соответственно. Подмножества пространства $H_1\times H_2$ будем обозначать через $(C_1;\ C_2)$, если проекции этого подмножества на пространства H_1 и H_2 совпадают с C_1 и C_2 соответственно. Через H^* будем обозначать сопряженное пространство к пространству H, т. е. множество всех линейных непрерывных функционалов на пространстве H. Значение линейного функционала $x^*\in H^*$ в точке $x\in H$ будем называть скалярным произведением элементов x^* и x и обозначать через $(x^*,\ x)$.

Рассмотрим функцию $f(x_1;\ x_2)$, определенную на прямом произведении $(C_1;\ C_2)$ выпуклых множеств C_1 и C_2, вогнутую по переменной $x_1\in C_1$ при фиксированном $x_2\in C_2$, и выпуклую по переменной $x_2\in C_2$ при фиксированном $x_1\in C_1$, такие функции будут называться вогнуто-выпуклыми.

Будем говорить, что вогнуто-выпуклая функция $f(x_1;\ x_2)$ замкнута по x_1 (замкнута по x_2) относительно области своего определения $C_1\times C_2$, если для любой точки $x_1^0\in H_1$ $(x_2^0\in H_2)$, в которой

$$\varlimsup_{x_1\to x_1^0,\ x_1\in C_1} f(x_1;\ x_2)\ \Bigl(\varliminf_{x_2\to x_2^0;\ x_2\in C_2} f(x_1;\ x_2)\Bigr)$$

конечны, значение функции определено и

$$f(x_1^0;\ x_2)=\varlimsup_{x_1\to x_1^0,\ x_1\in C_1} f(x_1;\ x_2) \tag{1.1}$$

$\Bigl(f(x_1;\ x_2^0)=\varliminf_{x_2\to x_2^0,\ x_2\in C_2} f(x_1;\ x_2)\Bigr)$ есть функция, полунепрерывная снизу (сверху) по переменной $x_2\,(x_1)$, т. е. точка x_1^0 принадлежит множеству C_1 (точка x_2^0 принадлежит множеству C_2).

Вогнуто-выпуклая функция $f(x_1;\ x_2)$ называется замкнутой относительно $C_1\times C_2$, если для любой точки $(x_1^0;\ x_2^0)\in H_1\times H_2$, в которой выражения

$\overline{\lim\limits_{x_1\to x_1^0,\ x_1\in C_1}} f(x_1;\ x_2)$ и $\underline{\lim\limits_{x_2\to x_2^0,\ x_2\in C_2}} f(x_1;\ x_2)$ конечны, значение функции определено и

$$f(x_1^0;\ x_2^0)=\overline{\lim_{x_1\to x_1^0,\ x_1\in C_1}} f(x_1;\ x_2^0)=\underline{\lim_{x_2\to x_2^0,\ x_2\in C_2}} f(x_1^0;\ x_2). \tag{1.2}$$

О функции, обладающей всеми перечисленными свойствами, будем говорить, что она удовлетворяет условию (А).

Замечание 1.1. Если в определениях замкнутости вогнуто-выпуклой функции $f(x_1;\ x_2)$ испытанию подвергаются только точки $(x_1^0;\ x_2^0)\in C_1\times C_2$, то будем говорить, что функция $f(x_1;\ x_2)$ замкнута на множестве $C_1\times C_2$.

Отметим, что замкнутая функция $f(x_1;\ x_2)$ полунепрерывна сверху по x_1 для всех $x_1\in C_1$, при всех фиксированных $x_2\in C_2$ и полунепрерывна снизу по x_2 для всех $x_2\in C_2$ при всех фиксированных $x_1\in C_1$.

В пространстве $R\times H_1\times H_2$ рассмотрим множество

$$[f^-;(C_1;\ C_2)]=\{(a;\ x_1;\ x_2)\in R\times H_1\times H_2/(x_1;\ x_2)\in(C_1;\ C_2);$$
$$a\leqslant f(x_1;\ x_2)\}. \tag{1.3}$$

В силу вогнутости функции $f(x_1;\ x_2)$ по переменному $x_1\in C_1$ множество $[f^-;(C_1;\ C_2)]\cap(R\times H_1;\ x_2)$ является выпуклым множеством при каждом $x_2\in C_2$. Его будем обозначать через $[f_{x_2}^-;\ C_1]$. Оно определяется соотношением

$$[f_{x_2}^-;C_1]=\{(a;x_1;x_2)\in R\times(H_1;x_2)/(x_1;x_2)\in(C_1;C_2)\};a\leqslant f(x_1,x_2)\}. \tag{1.4}$$

Очевидно,

$$[f^-;\ (C_1;\ C_2)]=\bigcup_{x_2\in C_2}[f_{x_2}^-;\ C_1].$$

Для множества $[f_{x_2}^-;\ C_1]$ определим сопряженное множество $[f_{x_2}^-;C_1]^*$ как множество всех невертикальных гиперплоскостей пространства $H_1\times R$, расположенных выше множества $[f_{x_2}^-;\ C_1]$. Уравнение каждой такой гиперплоскости может быть записано в виде:

$$a+(x_1^*,\ x_1)=\alpha, \tag{1.5}$$

где $(a;\ x_1)$ текущая точка пространства $H_1\times R$, а $(1;\ x_1^*)$ — некоторый фиксированный элемент пространства $H_1^*\times R$; α — вещественное число, определяющее линию уровня линейного функционала $(1;\ x_1^*)$, которая представляет собой график непрерывной функции на пространстве H_1. Таким образом, каждая невертикальная гиперплоскость однозначно определяется некоторым элементом $x_1^*\in H_1^*$ и вещественным числом α так, что для обозначения гиперплоскости мы будем пользоваться записью $(\alpha;\ x_1^*)$. Для каждой точки, принадлежащей пересечению графика функции $f(x_1;\ x_2)$ с гиперплоскостью (1.5) имеет место соотношение

$$f(x_1;\ x_2)+(x_1^*,\ x_1)=\alpha. \tag{1.6}$$

Для каждой точки $(a;\ x_1)\in[f_{x_2}^-;\ C_1]$ имеет место $a\geqslant f(x_1;\ x_2)$. Таким образом, мы можем сказать, что точка $(\alpha;\ x_1^*)$ пространства $H_1^*\times R$ принадлежит множеству $[f_{x_2}^-;\ C_1]^*$ тогда и только тогда, когда

$$a+(x_1^*,\ x_1)\leqslant\alpha \tag{1.7}$$

для любой точки $(a;\ x_1)\in[f_{x_2}^-;\ C_1]$. Для того, чтобы точка $(\alpha;\ x_1^*)$ принадлежала множеству $[f_{x_2}^-;\ C_1]^*$ достаточно, чтобы

$$f(x_1;\ x_2)+(x_1^*,\ x_1)\leqslant\alpha \tag{1.8}$$

для любого $x_1\in C_1$.

Следующими соотношениями вводятся множества

$$\Gamma'_{1x_2}=\{\ (x_1^*;x_2\in H_1^*;H_2)\mid \sup_{x_1\in C_1}[f(x_1;\ x_2)+(x_1^*,\ x_1)]<\infty\ \} \tag{1.9}$$

и множество

$$(\Gamma'_1;\ C_2)=\bigcup_{x_2\in C_2}\Gamma'_{1x_2}=\{\ (x_1^*;\ x_2)\in(H_1^*\times H_2)\ /\ x_1^*\in\Gamma'_{1x_2},\ x_2\in C_2\ \}. \tag{1.10}$$

На множестве $(\Gamma'_1;\ C_2)$ определим функцию

$$\varphi(x_1^*;\ x_2)=\sup_{x_1\in C_1}[f(x_1;\ x_2)+(x_1^*,\ x_1)]. \tag{1.11}$$

Тогда для фиксированного $x_2\in C_2$ имеем

$$[f_{x_2}^-;\ C_1]^*=[\varphi_{x_2}^+;\ \Gamma'_{1x_2}]=\{(\alpha;\ x_1^*;\ x_2)\in R\times(H_1^*;\ x_2)\ /\ x_1^*\in\Gamma'_{1x_2},\ \alpha\geqslant$$
$$\geqslant\varphi(x_1^*;x_2)\}. \tag{1.12}$$

Множество

$$[f^-,\ (C_1;\ C_2)]_{x_1}^*=]\varphi^+;\ (\Gamma'_1;\ C_2)]=\bigcup_{x_2\in C_2}[f_{x_2}^-;\ C_1]^*=\bigcup_{x_2\in C_2}[\varphi_{x_2}^+;\ \Gamma'_{1x_2}] \tag{1.13}$$

будем называть сопряженным по x_1 множеству $[f^-;\ (C_1;\ C_2)]$. Очевидно

$$[f^-;\ (C_1;\ C_2)]_{x_1}^*=[\varphi^+;\ (\Gamma'_1;\ C_2)]=$$
$$=\{(\alpha;\ x_1^*;\ x_2)\in H_1^*\times H_2\times R\ /\ (x_1^*;\ x_2)\in(\Gamma'_1;\ C_2),\ \alpha\geqslant\varphi(x_1^*;\ x_2)\}. \tag{1.14}$$

Функцию $\varphi(x_1^*;\ x_2)$, определенную на $(\Gamma'_1,\ C_2)$ будем называть сопряженной по x_1 к функции $f(x_1;\ x_2)$.

Лемма 1.1. *Пусть дана вогнуто-выпуклая функция $f(x_1;\ x_2)$, определенная на прямом произведении $(C_1;\ C_2)$, замкнутая на $(C_1;\ C_2)$. Тогда множество $(\Gamma'_1;\ C_2)$, задаваемое* (1.10) *не пусто и выпукло, а функция $\varphi\ (x_1^*;\ x_2)$, определенная на этом множестве соотношением* (1.11), *выпукла и замкнута на множестве* $(\Gamma'_1;\ C_2)$ (см. замечание 1.1).

Доказательство. Для любого фиксированного x_2 из множества C_2 множество Γ'_{x_2} не пусто. Для того, чтобы убедиться в этом нужно рассмотреть точку $(f(x_1;\ x_2)+\varepsilon;\ x_1)$, $\varepsilon>0$, $x_1\in C_1$, которая лежит над выпуклым множеством $[f_{x_2}^-;\ C_1]$, так что в силу теоремы Мазура—Бурджина существует невертикальная гиперплоскость вида (1.5), разделяющая точку и множество. Эта гиперплоскость определяет элемент $x_1^*\in\Gamma'_{1x_2}$. В силу этого множество $(\Gamma'_1;\ C_2)$, определенное в (1.10) как объединение не пустых множеств не пусто.

Для доказательства выпуклости множества $(\Gamma'_1;\ C_2)$ и функции $\varphi(x_1^*;\ x_2)$ рассмотрим точки $(x_1^{*\prime};\ x_2')$ и $(x_1^{*\prime\prime};\ x_2'')$ из множества $(\Gamma'_1;\ C_2)$. Согласно соотношению (1.11) мы имеем

$$\varphi(x_1^{*\prime};\ x_2')=\sup_{x_1\in C_1}[f(x_1;\ x_2')+(x_1^{*\prime},\ x_1)]\geqslant f(x_1;\ x_2')+(x_1^{*\prime},\ x_1),$$

$$\varphi(x_1^{*\prime\prime};\ x_2'')=\sup_{x_2\in C_2}[f(x_1;\ x_2'')+(x_1^{*\prime\prime},\ x_1)]\geqslant f(x_1;\ x_2'')+(x_1^{*\prime\prime},\ x_1).$$

В силу выпуклости функции $f(x_1;\ x_2)$ по переменной x_2 для любого $t\in[0,1]$ можем написать соотношение

$$t\varphi(x_1^{*\prime};\ x_2')+(1-t)\,\varphi(x_1^{*\prime\prime};\ x_2'')\geqslant[tf(x_1;\ x_2')+(1-t)\,f(x_1;\ x_2'')]+$$
$$+([tx_1^{*\prime}+(1-t)\,x_1^{*\prime\prime}],\ x_1)\geqslant f(x_1;\ tx_2'+(1-t)\,x_2'')+([tx_1^{*\prime}+(1-t)\,x_1^{*\prime\prime}],\ x_1).$$

Поэтому имеет место

$$t\varphi(x_1^{*\prime};\ x_2')+(1-t)\,\varphi(x_1^{*\prime\prime};\ x_2'')\geqslant\sup_{x_1\in C_1}\,[f(x_1;\ tx_2'+(1-t)\,x_2'')+$$
$$+([tx_1^{*\prime}+(1-t)\,x_1^{*\prime\prime}],\ x_1)]=\varphi(tx_1^{*\prime}+(1-t)\,x_1^{*\prime\prime};\ tx_2'+(1-t)\,x_2''). \qquad (1.15)$$

Отсюда вытекает, что точка $[tx_1^{*\prime}+(1-t)\,x_1^{*\prime\prime}]$ принадлежит множеству $\Gamma'_{1tx_2'+(1-t)x_2''}$, поэтому точка $[t(x_1^{*\prime};\ x_2')+(1-t)\ (x_1^{*\prime\prime};\ x_2'')]$ принадлежит множеству $\Gamma'_{1tx_2'+(1-t)x_2''}$, поэтому точка

$$[t(x_1^{*\prime};\ x_2')+(1-t)\ (x_1^{*\prime\prime};\ x_2'')]$$

принадлежит множеству $(\Gamma_1';\ C_2)$, и, следовательно, множество $(\Gamma_1';\ C_2)$ выпукло.

Соотношение (1.15) означает, что функция $\varphi\,(x_1^*;\ x_2)$ выпукла.

Для завершения доказательства нужно показать, что функция $\varphi\,(x_1^*;\ x_2)$ замкнута на множестве $(\Gamma_1';\ C_2)$. Покажем это. Пусть $\{(x_1^{*\tau};\ x_2^{\tau})\}$ ($\tau\in T$, где T – направленное множество) – обобщенная последовательность точек множества $(\Gamma_1';\ C_2)$, сходящаяся к некоторой точке $(x_1^{*0};\ x_2^0)$ множества $(\Gamma_1';\ C_2)$. Тогда имеем

$$\varphi(x_1^{*\tau};\ x_2^{\tau})\geqslant f(x_1;\ x_2^{\tau})+(x_1^{*\tau},\ x_1).$$

Следовательно, для всех точек x_1 из множества C_1 имеет место

$$\varliminf_{\tau\in T}\varphi(x_1^{*\tau};\ x_2^{\tau})\geqslant\lim_{\tau\in T}f(x_1;\ x_2^{\tau})+(x_1^{*\tau},\ x_1)=f(x_1;\ x_2^0)+(x_1^{*0};\ x_1).$$

Отсюда получим неравенство

$$\varliminf_{\tau\in T}\ \varphi(x_1^{*\tau};\ x_2^{\tau})\geqslant\sup_{x_1\in C_1}\ [f(x_1;\ x_2^0)+(x_1^{*0},\ x_1)]=\varphi(x_1^{*0};\ x_2^0),$$

а в силу выпуклости функции $\varphi\,(x_1^*;\ x_2)$ всегда имеет место противоположное неравенство.

Поэтому, имеет место равенство

$$\lim_{\tau\in T}\ \varphi(x_1^{*\tau};\ x_2^{\tau})=\varphi\,(x_1^{*0};\ x_2^0),$$

что и требовалось доказать.

Проекция множества $(\Gamma_1';\ C_2)$ на пространство H_1^* есть множество Γ_1' и при любом фиксированном $x_1^*\in\Gamma_1'$ пересечение множества $(\Gamma_1';\ C_2)$ с множеством $(x_1^*;\ H_2)$ есть выпуклое множество

$$C_{2x^*}=\{\,(x_1^*;\ x_2)\in(x_1^*;\ H_2)\,/\,(x_1^*;\ x_2(\in(\Gamma_1';\ C_2)\,\} \qquad (1.16)$$

и мы имеем

$$(\Gamma_1'; C_2) = \bigcup_{x_1^* \in \Gamma_1'} C_{2x_1^*}.$$

В силу выпуклости замкнутой функции $\varphi(x_1^*; x_2)$ на множестве $(\Gamma_1'; C_2)$, пересечение множества $[\varphi+; (\Gamma_1'; C_2)]$ с множеством $(x_1^*; H_2 \times R)$ при любом фиксированном $x_1^* \in \Gamma_1'$ является выпуклым подмножеством

$$[\varphi_{x_1^*}^+; C_{2x_1^*}] = \{\alpha; x_1^*; x_2) \in R \times (x_1^*; H_2) / x_2 \in C_{2x_1^*}, \ \alpha \geqslant \varphi(x_1^*; x_2)\}. \quad (1.17)$$

Очевидно,

$$[\varphi^+; (\Gamma_1'; C_2)] = \bigcup_{x_1^* \in \Gamma_1'} [\varphi_{x_1^*}^+; C_{2x_1^*}].$$

Для сечения $[\varphi_{x_1^*}^+; C_{2x_1^*}]$ определим сопряженное множество $[\varphi_{x_1^*}^+; C_{2x_1^*}]^*$ – как множество всех невертикальных гиперплоскостей пространства $R \times (x_1^*; H_2)$, расположенных ниже множества $[\varphi_{x_1^*}^+; C_{2x_1^*}]$. Уравнение каждой такой гиперплоскости будем записывать в виде

$$\alpha - (x_2^*, x_2) = y. \quad (1.18)$$

В точке соприкосновения гиперплоскости (1.18) с множеством $[\varphi_{x_1^*}^+; C_{2x_1^*}]$ имеет место $\varphi(x_1^*; x_2) - (x_2^*, x_2) = y$. Поскольку для точки $(\alpha; x_2) \in [\varphi_{x_1^*}^+; C_{2x_1^*}]$ имеет место $\alpha \geqslant \varphi(x_1^*; x_2)$, то можно утверждать, что точка $(y; x_2^*)$ принадлежит множеству $[\varphi_{x_1^*}^+; C_{2x_1^*}]^*$ тогда и только тогда, когда имеет место

$$\alpha - (x_2^*, x_2) \geqslant y \quad (1.19)$$

для любой точки $(\alpha; x_2) \in [\varphi_{x_1^*}^+; C_{2x_1^*}]$.

Определим множество

$$\Gamma_{2x_1^*}' = \{x_1^*; x_2) \in (x_1^*; H_2^*) \ / \inf_{x \in C_{2x_1^*}} [\varphi(x_1^*; x_2) - (x_2^*, x_2)] > -\infty\} \quad (1.20)$$

и множество

$$(\Gamma_1'; \tilde{\Gamma}_2') = \bigcup_{x_1^* \in \Gamma_1'} \Gamma_{2x_1}'^* = \{(x_1^*; x_2^*) \in H_1^* \times H_2^* / x_1^* \in \Gamma_1', \ x_2^* \in \Gamma_{2x_1^*}'\}. \quad (1.21)$$

На множестве $(\Gamma_1'; \tilde{\Gamma}_2)$ определим функцию

$$\tilde{g}'(x_1^*; x_2^*) = \inf_{x_2 \in C_{2x_1^*}} [\varphi(x_1^*; x_2) - (x_2^*, x_2)]. \quad (1.22)$$

Тогда для любого фиксированного x_1^* из множества Γ_1', имеет место

$$[\varphi_{x_1^*}^+; C_{2x_1^*}]^* = [(\tilde{g}')_{x_1^*}^-; \Gamma_{2x_1^*}'] = \{(y; x_1^*; x_2^*) \in R \times (x_1^*; H_2^*) / x_2^* \in \Gamma_{2x_1^*}',$$
$$y \leqslant \tilde{g}'(x_1^*, x_2^*)\}. \quad (1.23)$$

Теорема 1.1. *Пусть дано, что функция $\varphi(x_1^*; x_2)$ выпукла и замкнута на множестве своего определения $(\Gamma_1'; C_2)$, тогда множество $(\Gamma_1'; \tilde{\Gamma}_2')$, определенное в (1.21), содержит в качестве непустого подмножества прямое произведение $(\Gamma_1'; \Gamma_2')$, где $\Gamma_2' = \bigcap_{x_1^* \in \Gamma_1'} \Gamma_{2x_1^*}$, а сужение на множество $(\Gamma_1'; \Gamma_2')$ функ-*

ции $\tilde{g}'(x_1^*;\ x_2^*)$, *определенной в* (1.22), *есть выпукло-вогнутая функция* $g'(x_1^*;\ x_2^*)$, *замкнутая по* x_1^* *на* $(\Gamma_1';\ \Gamma_2')$, *если* $g'(x_1^*;\ x_2^*)$ *полунепрерывна снизу по* x_1^*.

Эту теорему мы получим, доказав леммы 1.2 и 1.3.

Лемма 1.2. *Множество* $(\Gamma_1';\ \tilde{\Gamma}_2')$, *определенное в* (1.21), *содержит в качестве непустого подмножества прямое произведение* $(\Gamma_1';\ \Gamma_2')$, *где*

$$\Gamma_2' = \bigcap_{x_1^* \in \Gamma_1'} \Gamma_{2x_1^*}'. \tag{1.24}$$

Доказательство. Введем в рассмотрение множество

$$(\bar{C}_1;\ \tilde{\Gamma}_2) = \{(x_1;\ x_2^*) \in H_1 \times H_2^* \ / \inf_{(x_1^*;\ x_2) \in (\Gamma_1';\ C_2)} [\varphi(x_1^*;\ x_2) - (x_1^*,\ x_1) - -(x_2^*,\ x_2)] > -\infty\} \tag{1.25}$$

множество $\tilde{\Gamma}_2$ есть проекция множества $(\bar{C}_1;\ \tilde{\Gamma}_2)$ на подпространство H_2^*. Для доказательства леммы 1.2 достаточно показать, что $\Gamma_2' = \tilde{\Gamma}_2 \neq 0$

$$\varphi(x_1^*;\ x_2) - (x_2^*,\ x_2) \geqslant \inf_{(x_1^*;\ x_2) \in (\Gamma_1';\ C_2)} [\varphi(x_1^*;\ x_2) - (x_1^*,\ x_1) - (x_2^*,\ x_2)] + +(x_1^*,\ x_1). \tag{1.26}$$

Зафиксируем элемент x_1^{*0} из множества Γ_1' и возьмем произвольный элемент x_2^{*0} множества $\tilde{\Gamma}_2$. Выберем элемент x_1^0 подпространства H_1 такой, чтобы точка $(x_1^0;\ x_2^{*0})$ принадлежала множеству $(\bar{C}_1;\ \tilde{\Gamma}_2)$. Тогда из соотношений (1.25) и (1.26) получаем

$$\inf_{x_2 \in C_2} [\varphi(x_1^{*0};\ x_2) - (x_2^{*0},\ x_2)] \geqslant$$
$$\geqslant \inf_{(x_1^*;\ x_2) \in \Gamma_1';\ C_2} [\varphi(x_1^*;\ x_2) - (x_1^*,\ x_1^0) - (x_2^{*0},\ x_2)] +$$
$$+(x_1^{*0},\ x_1^0) > -\infty.$$

Следовательно, множество $\tilde{\Gamma}_2$ принадлежит множеству Γ_2' (см. (1.24)).

Для доказательства обратного включения $\Gamma_2' \subset \tilde{\Gamma}_2$ возьмем элемент x_1^{*0} из множества Γ_1' и x_2^{*0} из Γ_2' (см. (1.24)). Тогда

$$\varphi(x_1^{*0};\ x_2) - (x_2^{*0},\ x_2) \geqslant \inf_{x_2 \in C_{2x_1^{*0}}} [\varphi(x_1^{*0};\ x_2) - (x_2^{*0},\ x_2)] = g'(x^{*0};\ x_2^{*0}) = y_0.$$

Рассмотрим выпуклое множество

$$[\varphi^+;\ (\Gamma_1';\ C_2)] =$$
$$= \{(\alpha;\ x_1^*;\ x_2) \in H_1^* \times H_2 \times R \,/\, (x_1^*;\ x_2) \in (\Gamma_1';\ C_2),\ \alpha \geqslant \varphi(x_1^*;\ x_2)\}$$

и гиперплоскость H_0 в сечении $(x_1^{*0};\ H_2)$, определяемом элементом x_1^{*0} из множества Γ_1', уравнение которой имеет вид

$$\alpha - (x_2^{*0},\ x_2) = y_0 - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \tag{1.27}$$

Рассмотрим множество

$$\Big[[\varphi^+;\ (\Gamma_1',\ C_2)] - H_0\Big] =$$
$$= \{(\alpha' - \alpha;\ x_1^{*\prime} - x_1^{*0};\ x_2' - x_2) \in H_1^* \times H_2 \times R \ / \ (\alpha';\ x_1^{*1};\ x_2') \in [\varphi^+;$$
$$(\Gamma_1';\ C_2)],\ (\alpha;\ x_1^{*0};\ x_2) \in H_0\}. \tag{1.28}$$

Множество (1.28) выпукло и в силу выпуклости по x_1^* функции $g'(x_1^*;\ x_2^*)$ (см. лемму 1.3) его замыкание не содержит начало координат (0; 0; 0) но содержит точку $(\Delta\alpha;\ 0;\ 0)$ для некоторого $\Delta\alpha = \alpha' - \alpha > \varepsilon > 0$

Поэтому существует невертикальная гиперплоскость $(0;\ x_1;\ x_2^*)$, строго отделяющая множество (1.28) от точки $(0;\ 0;\ 0)$, т. е. существует такой элемент $(1;\ x_1;\ x_2^*)$ пространства $H_1 \times H_2^* \times R$), что имеет место

$$(\alpha' - \alpha) - \left((x_1^{*\prime} - x_1^{*0}),\ x_1\right) - \left(x_2^*,\ (x_2' - x_2)\right) > 0 \tag{1.29}$$

для всех точек

$$(\alpha' - \alpha;\ x_1^{*\prime} - x_1^{*0};\ x_2' - x_2) \in [\varphi^+;\ (\Gamma_1';\ C_2)] - H_0 .$$

Из соотношения (1.29) следует, что для любой точки $(\alpha;\ x_1^{*0};\ x_2)$ гиперплоскости H_0 выполняется соотношение

$$\inf_{(x_1^*;\ x_2) \in (\Gamma_1';\ C_2)} [\varphi(x_1^*;\ x_2) - (x_1,\ x_1^*) - (x_2^*,\ x_2)] \geqslant \alpha - (x_1^{*0},\ x_1) - $$
$$- (x_2^*,\ x_2). \tag{1.30}$$

Из этого соотношения видно, что левая часть ограничена снизу. Следовательно, элемент $(x_1;\ x_2^*)$ принадлежит подмножеству $(\tilde{C}_1;\ \tilde{\Gamma}_2)$. Покажем, что элемент x_2^* равен x_2^{*0}, где $x_2^{*0} \in \Gamma_2'$.

Из (1.27), (1.29) и (1.30) вытекает, что выражение $y_0 - \varepsilon - (x_1^{*0},\ x_1) - \left((x_2^* - x_2^{*0}), x_2\right)$ ограничено сверху. Здесь величины y_0, ε, x_1, x_1^{*0}, x_2^*, x_2^* фиксированы, а величина x_2 может принимать любые значения из подпространства H_2. Поэтому имеет место равенство $\left((x_2^* - x_2^{*0}), x_2\right) = 0$ для всех $x_2 \in H_2$. Отсюда следует, что $x_2^* = x_2^{*0}$. А это означает, что подмножество Γ_2' принадлежит множеству $\tilde{\Gamma}_2$.

Следовательно, $\Gamma_2' = \tilde{\Gamma}_2$, что и требовалось доказать.

Лемма 1.3. *Функция $g'(x_1^*;\ x_2^*)$ определенная на $\Gamma_1' \times \Gamma_2'$ выпукла по x_1^* при фиксированном $x_1^* \in \Gamma_2'$ и вогнута по x_2^* при фиксированном $x_1^* \in \Gamma''_2$. Кроме того, она замкнута по x_1^* на $(\Gamma_1';\ \Gamma_2')$, если полунепрерывна снизу по x_1^*.*

Доказательство. Рассмотрим точки $(x_1^{*\prime};\ x_2')$ и $(x_1^{*\prime\prime};\ x_2'')$ из множества $(\Gamma_1';\ C_2)$. В силу выпуклости функции $\varphi(x_1^*;\ x_2)$ и определения (1.22) для любого фиксированного $x_2^* \in \Gamma'_2$ и для любого $0 \leqslant t \leqslant 1$ имеем

$$t\left(\varphi(x_1^{*\prime};\ x_2') - (x_2^*,\ x_2')\right) + (1-t)\left(\varphi(x_1^{*\prime\prime};\ x_2'') - (x_2^*,\ x_2'')\right) \geqslant$$
$$\geqslant \varphi\left(tx_1^{*\prime} + (1-t)\ x_1^{*\prime\prime};\ tx_2' + (1-t)\ x_2''\right) - \left(x_2^*,\ tx_2' + (1-t)\ x_2''\right) \geqslant$$
$$\geqslant g'\left(tx_1^{*\prime} + (1-t)\ x_1^{*\prime\prime};\ x_2^*\right).$$

Ввиду того, что в этом соотношении x_2' и x_2'' могут выбираться независимыми друг от друга, можем написать

$$tg'(x_1^{*\prime};\ x_2^*) + (1-t)\,g'(x_1^{*\prime\prime};\ x_2^*) \geqslant g'\left((tx_1^{*\prime} + (1-t)x_1^{*\prime\prime});\ x_2^*\right),$$

а это означает, что функция $g'(x_1^*;\ x_2^*)$ выпукла по x_1^* при фиксированном $x_2^* \in \Gamma_2'$.

Теперь зафиксируем $x_1^* \in \Gamma_1'$ и рассмотрим точки

$$(x_1^*;\ x_2^{*\prime}) \in \Gamma_1' \times \Gamma_2' \quad \text{и} \quad (x_1^*;\ x_2^{*\prime\prime}) \in \Gamma_1' \times \Gamma_2'.$$

В силу определения (1.22), имеем

$$g'(x_1^*;\ x_2^{*\prime}) \leqslant \varphi(x_1^*;\ x_2) - (x_2^{*\prime},\ x_2),$$
$$g'(x_1^*;\ x_2^{*\prime\prime}) \leqslant \varphi(x_1^*;\ x_2) - (x_2^{*\prime\prime},\ x_2)$$

для любого $x_2 \in C_{2x_1^*}$.

Для любого t из интервала [0,1] имеем

$$tg'(x_1^*;\ x_2^{*\prime}) + (1-t)\,g'(x_1^*;\ x_2^{*\prime\prime}) \leqslant$$
$$\leqslant t\,[\varphi(x_1^*;\ x_2) - (x_2^{*\prime},\ x_2)] + (1-t)\,[\varphi(x_1^*;\ x_2) - (x_2^{*\prime\prime},\ x_2)] =$$
$$= \varphi(x_1^*;\ x_2) - \left(\left(tx_2^{*\prime} + (1-t)\,x_2^{*\prime\prime}\right),\ x_2\right).$$

Следовательно,

$$tg'(x_1^*;\ x_2^{*\prime}) + (1-t)\,g'(x_1^*;\ x_2^{*\prime\prime}) \leqslant \inf_{x_2 \in C_{2x_1^*}} \Big[\varphi(x_1^*;\ x_2) -$$
$$- \left(\left(tx_2^{*\prime} + (1-t)\,x_2^{*\prime\prime}\right),\ x_2\right)\Big] = g'\left(x_1^{*\prime};\ tx_2^{*\prime} + (1-t)\,x_2^{*\prime\prime}\right).$$

Таким образом, мы получили соотношение, которое означает что функция $g'(x_1^*;\ x_2^*)$ вогнута по x_1^* при фиксированном $x_1^* \in \Gamma_1'$.

Переходим к доказательству замкнутости функции $g'(x_1^*;\ x_2^*)$ по x_1^* на множестве $\Gamma_1' \times \Gamma_2'$. Пусть $\{x_1^{*\tau};\ x_2^{*0}\}_{\tau \in T}$ — обобщенная последовательность точек множества $\Gamma_1' \times \Gamma_2'$, сходящаяся к точке $(x_1^{*0};\ x_2^{*0})$, где $(x_1^{*0},\ x_2^{*0})$ — некоторая фиксированная точка множества $\Gamma_1' \times \Gamma_2'$.

В силу полунепрерывности снизу по x_1^* функции $g'(x_1^*;\ x_2^*)$ имеет место

$$\lim_{\tau \in T} g'(x_1^{*\tau};\ x_2^{*0}) = g'(x_1^{*0};\ x_2^{*0}).$$

Для завершения доказательства леммы, а тем самым и теоремы 1.1 остается показать, что функция $g'(x_1^{*0};\ x_2^*)$ полунепрерывна сверху по x_2^*.

Пусть $\{x_1^{*0};\ x_2^{*\tau}\}$ — последовательность точек, сходящаяся к точке $\{x_1^{*0};\ x_2^{*0}\}$. Тогда имеем $g'(x_1^{*0};\ x_2^{*\epsilon}) \leqslant \varphi(x_1^{*0};\ x_2) - (x_2^{*\tau},\ x_2)$. Поэтому, для всех $x_2 \in C_{2x_1^{*0}}$ имеет место

$$\overline{\lim_{\tau \in T}}\ g'(x_1^{*0};\ x_2^{*\epsilon}) \leqslant \lim_{\tau \in T}\,[\varphi(x_1^{*0};\ x_2) - (x_2^{*\tau},\ x_2)] =$$
$$= \varphi(x_1^{*0};\ x_2) - (x_2^{*0},\ x_2).$$

Отсюда

$$\overline{\lim_{\tau \in T}}\ g'(x_1^{*0};\ x_2^{*\tau}) \leqslant \inf_{x_2 \in C_{2x_1^{*0}}} [\varphi(x_1^{*0};\ x_2) - (x_2^{*0},\ x_2)] = g'(x_1^{*0};\ x_2^{*0}),$$

а в силу вогнутости функции $g'(x_1^*,\ x_2^*)$ по переменной x_2^* при фиксированном x_1^* противоположное неравенство всегда имеет место:

$$\overline{\lim_{\tau \in T}}\ g'(x_1^{*0};\ x_2^{*\tau}) \geqslant g'(x_1^{*0};\ x_2^{*0}).$$

Поэтому имеет место равенство:

$$\overline{\lim_{\tau \in T}}\ g'(x_1^{*0};\ x_2^{*\tau}) = g'(x_1^{*0};\ x_2^{*0}),$$

что и требовалось доказать.

Замечание 1.2. По построению функции $\varphi(x_1^*; x_2)$, определенная с помощью соотношения $\varphi(x_1^*; x_2)=\sup\limits_{x_1\in C_1}[f(x_1; x_2)+(x_1^*, x_1)]$, является конечной во всех точках множества $(\Gamma_1'; C_2)$, задаваемого с помощью соотношения (1.9) и (1.10). Это множество, как правило уже не является прямым произведением. В силу леммы 1.2 множество $(\Gamma_1'; \Gamma_2')$ является прямым произведением выпуклых множеств Γ_1' и Γ_2', лежащих в пространствах H_1^* и H_2^* соответственно. Оно может быть задано следующим соотношением

$$(\Gamma_1'; \Gamma_2')=\{(x_1^*; x_2^*)\in H_1^*\times H_2^* \mid +\infty>\inf_{x_2\in C_2}\sup_{x_1\in C_1}[f(x_1; x_2)+$$

$$+(x_1^*, x_1)-(x_2^*, x_2)]>-\infty,\ x_2^*\in\bigcap_{x_1^*\in\Gamma_1'}\Gamma_{2x_1^*}'\Big(\text{см. (1.10) и (1.20)}\Big), \tag{1.31}$$

а функция $g'(x_1^*; x_2^*)$ на этом множестве определяется формулой

$$g'(x_1^*; x_2^*)=\inf_{x_2\in C_2}\sup_{x_1\in C_1}[f(x_1; x_2)+(x_1^*, x_1)-(x_2^*, x_2)]. \tag{1.32}$$

2. В пространстве $R\times H_1\times H_2$ рассмотрим множество

$$[f^+; (C_1; C_2)]=$$
$$=\{(b; x_1; x_2)\in R\times H_1\times{}_2 \mid x_1\in C_1,\ x_2\in C_2,\ b\geqslant j(x_1; x_2)\}. \tag{2.1}$$

Ввиду выпуклости функции $f(x_1; x_2)$ по переменной $x_2\in C_2$ множество $[f^+; C_{11}\ C_2)]\cap(x_1^*; H_2)$ при каждом фиксированном $x_1\in C_1$ является выпуклым множеством, которое будем обозначать через $[f_{x_1}^+; C_2]$. Оно задается соотношением:

$$[f_{x_1}^+; C_2]=\{(b; x_1; x_2)\in R\times(x_1; H_2) \mid x_2\in C_2;\ b\geqslant f(x_1; x_2)\}. \tag{2.2}$$

Для множества $[f_{x_1}^+; C_2]$ определим сопряженное множество $[f_{x_1}^+; C_2]^*$ как множество всех невертикальных гиперплоскостей пространства $R\times(x_1; H_2)$, расположенных ниже множества $[f_{x_1}^+; C_2]$. Уравнения таких гиперплоскостей будем записывать в виде:

$$b-(x_2^*, x_2)=\beta \tag{2.3}$$

и обозначать через $(\beta; x_2^*)$. Таким образом, каждая невертикальная гиперплоскость $(\beta; x_2^*)$ однозначно определяет точку пространства $H_2^*\times R$, принадлежащую подмножеству $[f_{x_1}^+; C_2]^*$, и, наоборот, каждая точка подмножества $[f_{x_1}^+; C_2]^*$ определяет некоторую невертикальную гиперплоскость в пространстве $R\times(x_1; H_2)$. Для того, чтобы точка $(\beta; x_2^*)$ принадлежала множеству $[f_{x_1}^+; C_2]$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение:

$$\beta\leqslant b-(x_2^*, x_2) \tag{2.4}$$

для всех точек $(b; x_2)$ из множества $[f_{x_1}^+; C_2]$.

Для того, чтобы точка $(\beta; x_2^*)$ принадлежала множеству $[f_{x_1}^+; C_2]^*$ достаточно, чтобы выполнялось соотношение:

$$\beta\leqslant f(x_1; x_2)-(x_2^*, x_2) \tag{2.5}$$

для всех $x_2\in C_2$. Определим множества

$$\Gamma_{2x_1}''=\{x_1; x_2^*)\in(x_1; H_2^*) \mid \inf_{x_2\in C_2}[f(x_1; x_2)-(x_2^*, x_2)]>-\infty\} \tag{2.6}$$

и

$$(C_1; \Gamma_2'')=\bigcup_{x_1\in C_1}\Gamma_{2x_1}''=\{(x_1; x_2^*)\in H_1\times H_2^* \mid x_1\in C_1;\ x_2^*\in\Gamma_{2x_1}''\} \tag{2.7}$$

На множестве (2.7) определим функцию $\psi(x_1;\ x_2^*)$ с помощью соотношения:

$$\psi(x_1;\ x_2^*) = \inf_{x_2 \in C_2} [f(x_1;\ x_2) - (x_2^*,\ x_2)]. \tag{2.8}$$

При каждом фиксированном $x_1 \in C_1$ имеет место соотношение:

$$[f_{x_1}^+;\ C_2]^* = [\psi_{x_1}^-;\ \Gamma_{2x_1}''] =$$
$$= \{ (\beta;\ x_1; x_2^*) \in R \times (x_1; H_2^*) \,/\, x_2^* \in \Gamma_{2x_1}'',\ \beta \leqslant \psi(x_1;\ x_2^*) \}. \tag{2.9}$$

Множество

$$[f^+;\ (C_1;\ C_2)]_{x_2}^* = [\psi^-;\ (C_1;\ \Gamma_2'')] = \bigcup_{x_1 \in C_1} [f_{x_1}^+;\ C_2]^* =$$
$$= \bigcup_{x_1 \in C_1} [\psi_{x_1}^-;\ \Gamma_{2x_1}''] \tag{2.10}$$

будем называть сопряженным по переменной x_2 множеству

$[f^+;\ (C_1;\ C_2)]$.

Очевидно,

$$[f^+;\ (C_1;\ C_2)]_{x_2}^* = [\psi^-;\ (C_1;\ \Gamma_2'')] =$$
$$= \{ (\beta; x_1;\ x_2^*) \in R \times H_1 \times H_2^* \,/\, (x_1;\ x_2^*) \in (C_1;\ \Gamma_2''),\ \beta \leqslant \psi(x_1;\ x_2^*) \}.$$

Функцию $\psi(x_1;\ x_2^*)$, определенную на множестве $(C_1;\ \Gamma_2'')$ будем называть сопряженной к функции $f(x_1;\ x_2)$ по переменной x_2.

Лемма 1.4. *Пусть дана вогнуто-выпуклая функция $f(x_1;\ x_2)$, определенная на прямом произведении выпуклых множеств C_1 и C_2, замкнутая на $C_1 \times C_2$. Тогда множество $(C_1;\ \Gamma_2'')$, определенное в (2.7), не пусто и выпукло, а функция $\psi(x_1;\ x_2^*)$, определенная в (2.8), вогнута и замкнута на множестве своего определения $(C_1;\ \Gamma_2'')$* (см. замечание 1.1).

Доказательство этой леммы совершенно аналогично доказательству леммы 1.1 и поэтому не приводится.

Проекцией множества $(C_1;\ \Gamma_2'')$ на пространство H_2^* является Γ_2'', тогда пересечение множеств $(C_1;\ \Gamma_2'')$ и $(H_1;\ x_2^*)$ при каждом фиксированном $x_2^* \in \Gamma_2''$ есть выпуклое множество, обозначая его через $C_{1x_2^*}$ имеем

$$C_{1x_2^*} = \{ (x_1; x_2^*) \in (H_1; x_2^*) \,/\, (x_1;\ x_2^*) \in (C_1;\ \Gamma_2'') \}. \tag{2.11}$$

Очевидно,

$$(C_1;\ \Gamma_2'') = \bigcup_{x_2^* \in \Gamma_2''} C_{1x_2^*}.$$

В силу вогнутости функции $\psi(x_1;\ x_2^*)$ на выпуклом множестве $(C_1;\ \Gamma_2'')$ пересечение множеств $[\psi^-;\ (C_1;\ \Gamma_2'')]$ и $(H_1;\ x_2^*)$ при каждом фиксированном $x_2^* \in \Gamma_2''$ есть выпуклое множество, для обозначения которого будет использоваться запись

$$[\psi_{x_2^*}^-;\ C_{1x_2^*}] = \{ (\beta; x_1; x_2^*) \in R \times (H_1;\ x_2^*) \,/\, x_1 \in C_{1x_2^*},\ \beta \leqslant \psi(x_1; x_2^*) \}. \tag{2.12}$$

Очевидно имеет место

$$[\psi^-;\ (C_1;\ \Gamma_2'')] = \bigcup_{x_2^* \in \Gamma_2''} [\psi_{x_2^*}^-;\ C_{1x_2^*}].$$

Для выпуклого множества $[\psi_{x_2^*}^{-}; C_{1x_2^*}]$ определяется сопряженное множество $[\psi_{x_2^*}^{-}; C_{1x_2^*}]^*$ как множество всех невертикальных гиперплоскостей пространства $R\times(H_1; x_2^*)$, расположенных выше множества $[\psi_{x^*}^{-}; C_{1x_2^*}]$. Уравнения каждой такой гиперплоскости будем записывать в виде

$$\beta+(x_1^*,\ x_1)=z \tag{2.13}$$

и обозначать по аналогии с предыдущим через $(z;\ x_1^*)$. Для того, чтобы точка $(z;\ x_1^*)$ принадлежала множеству $[\psi_{x_2^*}^{-}; C_{1x_2^*}]$, необходимо и достаточно, чтобы для нее выполнялось соотношение

$$z\geqslant\beta+(x_1^*,\ x_1) \tag{2.14}$$

для всех точек $(\beta;\ x_1)$ из выпуклого множества $[\psi_{x_2^*}^{-}; C_{1x_2^*}]$. Для того, чтобы точка $(z;\ x_1^*)$ принадлежала множеству $[\psi_{x_2^*}^{-}; C_{1x_2^*}]^*$, достаточно, чтобы $z\geqslant\psi(x_1;\ x_2^*)+(x_1^*;\ x_1)$ для всех $x_1\in C_{1x_2^*}$. Определим множества

$$\Gamma'_{1x_2^*}=\{x_1^*; x_2)\in(H_1^*; x_2)\ /\ \sup_{x_1\in C_{1x_2^*}}[\psi\ (x_1; x_2^*)+(x_1^*, x_1)]<\infty\ \} \tag{2.15}$$

и

$$(\bar\Gamma_1'';\ \Gamma_2'')=\bigcup_{x_2^*\in\Gamma_2^*}\Gamma'_{1x_2^*}=\{\,(x_1^*;\ x_2^*)\in H_1^*\times H_2^*\ /\ x_2^*\in\Gamma_2'';\ x_1^*\in\Gamma'_{1x_2^*}\,\}. \tag{2.16}$$

На множестве $(\bar\Gamma_1'';\ \Gamma_2'')$ определим функцию

$$\tilde g''(x_1^*;\ x_2^*)\ =\ \sup_{x_1\in C_{1x_2^*}}[\psi(x_1;\ x_2^*)+(x_1^*,\ x_1)]. \tag{2.17}$$

При каждом фиксированном $x_2^*\in\Gamma_2''$ имеет место соотношение

$$\begin{aligned}&[\psi_{x_2^*}^{-};\ C_{1x_2^*}]^*=[(\tilde g'')^+_{x_2^*};\ \Gamma_1''\,{}_{x_2^*}]=\\&=\{\,(z;\ x_1^*;\ x_2^*)\in R\times H_1^*\times H_2^*\ /\ x_1^*\in\Gamma''_{1x_2^*},\ z\geqslant\tilde g''(x_1'';\ x_2^*\ )\,\}.\end{aligned} \tag{2.18}$$

Сформулируем теперь следующую теорему, доказательство которой получается точно также, как доказательство теоремы 1.1 и поэтому здесь не приводится.

Теорема 1.2. *Пусть дана вогнутая функция $\psi(x_1;\ x_2^*)$, замкнутая на области своего определения $(C_1;\ \Gamma_2'')$. Тогда множество $(\tilde\Gamma_1'';\ \Gamma_2'')$, определенное соотношением (2.16), содержит в качестве непустого подмножества прямое произведение $\Gamma_1''\times\Gamma_2''$, где $\Gamma_1''=\bigcap_{x_2^*\in\Gamma_2^*}\Gamma'_{1x_2^*}$, а ограничение на множество $\Gamma_1''\times\Gamma_2''$ функции $\tilde g''(x_1^*;\ x_2^*)$, определенной в (2.17), есть вогнуто-выпуклая функция $g''(x_1^*;\ x_2^*)$, замкнутая по x_2^* на множестве $\Gamma_1'\times\Gamma_2'$ если $g''(x_1^*;\ x_2^*)$ полунепрерывна сверху по x_2^*.*

Замечание 2.1. Функция $\psi\ (x_1;\ x_2^*)$, введенная соотношением (2.8), имеет конечные значения во всех точках выпуклого множества $(C_1;\ \Gamma_2'')$, определенного соотношением (2.7), которое вообще говоря, уже может не быть прямым произведением выпуклых множеств C_1 и Γ_2''.

Функция $g''\ (x_1^*;\ x_2^*)$, определяемая в (2.17) может быть задана соотношением

$$g''(x_1^*;\ x_2^*)\ =\sup_{x_1\in C_1}\ \inf_{x_2\in C_2}[f(x_1;\ x_2)+(x_1^*,\ x_1)-(x_2^*,\ x_2)] \tag{2.19}$$

так, что множество, на котором функция $g''(x_1^*;\ x_2^*)$ принимает конечные значения, имеет вид:

$$(\Gamma_1'';\ \Gamma_2'')=\{(x_1^*;\ x_2^*)\in H_1^*\times H_2^*\ /\ +\infty>\sup_{x_1\in C_1}\ \inf_{x_2\in C_2}[f(x_1;\ x_2)+$$

$$+(x_1^*,\ x_1)-(x_2^*,\ x_2)]>-\infty,\ x_1^*\in\bigcap_{x_2^*\in\Gamma_2''}\Gamma_{1x_2^*}''\},$$

где Γ_2'' задается соотношением (2.7), а $\Gamma_{1x_2^*}''$ – (2.15).

Это множество уже является прямым произведением своих проекций.

3. В этом пункте мы будем предполагать, что рассматриваемые пространства являются рефлексивными, локально-выпуклыми, хаусдорфовыми, линейными топологическими пространствами. В таком случае, могут быть сформулированы и доказаны следующие утверждения.

Теорема 1.3. *Пусть $f(u)$ – выпуклая функция, полунепрерывная снизу во всех точках выпуклой области определения U, лежащей в пространстве H. Тогда множество*

$$\Gamma=\{\gamma\in H^*\ /\ \inf_{u\in U}[f(u)-(\gamma,\ u)]>-\infty\}$$

не пусто и выпукло, а функция

$$\varphi(\gamma)=\inf_{u\in U}[f(u)+(\gamma,\ u)],$$

определенная на этом множестве вогнута и замкнута, относительно множества Γ.

Кроме того, имеет место

$$[f;\ U]\subset[[f;\ U]^*]^*=[\varphi;\ \Gamma]^*,$$

$$[f;\ U]=[\varphi;\ \Gamma]^*\cap[f;\ U],$$

если функция $f(u)$ замкнута относительно U, то

$$[[f;\ U]^*]^*=[\varphi;\ \Gamma]^*=[f;\ U],$$

т. е. множество, сопряженное к множеству $[f;\ U]^*=[\varphi;\ \Gamma]$ совпадает с исходным множеством $[f;\ U]$.

Доказательство. Первое утверждение теоремы 1.3 вытекает из того, что множество $[\varphi;\ \Gamma]$ – есть выпуклое замкнутое множество. Доказательство этого проводится стандартно. (См. доказательство леммы 1.1).

Множество $[\varphi;\ \Gamma]^*=[[f;\ U]^*]^*$ есть множество всех невертикальных гиперплоскостей в $H_2^*\times R$, лежащих выше выпуклого множества $[\varphi;\ \Gamma]$. Множество $[\varphi;\ \Gamma]^*$ является замкнутым. Уравнение каждой такой гиперплоскости будем писать в виде

$$\alpha-(u,\gamma)=a.$$

Покажем вначале, что

$$[f;\ U]\subset[\varphi;\ \Gamma]^*.$$

Пусть точка $u\in U$, тогда $\varphi(\gamma)\leqslant f(u)+(\gamma,\ u)$ для любого $\gamma\in\Gamma$. Но для всех $(\alpha;\ \gamma)\in[\varphi;\ \Gamma]$ мы имеем неравенство

$$\alpha\leqslant a+(\gamma,\ u),$$

каково бы ни было $a \geqslant f(u)$, следовательно, точка $(a;\ u)$ принадлежит множеству $[\varphi;\ \Gamma]^*$.

Для того, чтобы доказать обратное включение, предположим, что точка $(a_0;\ u_0)$ является точкой множества $[\varphi;\ \Gamma]^*$, но не принадлежит множеству $[f;\ U]$. Поскольку $[f;\ U]$ выпуклое замкнутое множество, то в силу теоремы Мазура—Бурджина существует невертикальная гиперплоскость, отделяющая точку $(a_0;\ u_0)$ от множества $[f;\ U]$. Обозначим эту гиперплоскость через $(\alpha';\ \gamma')$. Тогда $\alpha' \leqslant f(u) + (\gamma',\ u)$ для всех $u \in U$ и $\alpha' \geqslant a_0 + (\gamma',\ u_0)$.

Из первого неравенства следует, что $(\alpha';\ \gamma') \in [\varphi;\ \Gamma]$, а из второго, что $(a_0;\ u_0) \notin [\varphi;\ \Gamma]^*$.

Для того, чтобы снять противоречия, нужно отказаться от сделанного допущения, а это означает, что имеет место включение $[\varphi;\ \Gamma] \subset [f;\ U]$, которое вместе с включением, полученным выше дает последнее соотношение теоремы.

Тем самым теорема 1.3 полностью доказана.

Лемма 1.5. *Пусть дана вогнуто-выпуклая функция $f(x_1;\ x_2)$, определенная на прямом произведении $C_1 \times C_2$, замкнутая на $C_1 \times C_2$. Тогда имеют место следующие соотношения*

$$1)\ [f^-;\ (C_1;\ C_2)] = [\varphi^+;\ (\Gamma_1';\ C_2)]^*_{x_1^*} = \left[[f^-;\ (C_1;\ C_2)]^*_{x_1}\right]^*_{x_1^*}, \tag{3.1}$$

где $[\varphi^+;\ (\Gamma_1';\ C_2)]^*_{x_1^*}$ *определяется соотношением*

$$[\varphi^+;\ (\Gamma_1';\ C_2)]^*_{x^*} = \bigcup_{x_2 \in C_2} ([\varphi^+_{x_2};\ \Gamma'_{1x_2}]^* \cap [f^-_{x_2};\ C_1]), \tag{3.2}$$

$$2)\ [f^+;\ (C_1;\ C_2)] = [\psi^-;\ (C_1;\ \Gamma_2'')]^*_{x_2^*} = \left[[f^+;\ (C_1;\ C_2)]^*_{x_2}\right]^*_{x_2^*}, \tag{3.3}$$

где $[\psi^-;\ (C_1;\ \Gamma_2'')]^*_{x_2^*}$ *определяется соотношением*

$$[\psi^-;\ (C_1;\ \Gamma_2'')]^*_{x_2^*} = \bigcup_{x_1 \in C_1} ([\psi^-_{x_1};\ \Gamma''_{2x_1}]^* \cap [f^+_{x_1};\ C_2]). \tag{3.4}$$

Доказательство этих соотношений проводятся на основе одних и тех же соображений, поэтому мы проследим вывод только соотношения (3.1).

Доказательство. В силу соотношений (1.9) – (1.14) и определения (3.2) имеем:

$$\left[[f^-;\ (C_1;\ C_2)]^*_{x_1}\right]^*_{x_1^*} = [\varphi^+;\ (\Gamma_1';\ C_2)]^*_{x_1^*} = \bigcup_{x_2 \in C_2} ([\varphi^+_{x_2};\ \Gamma'_{1x_2}]^* \cap [f^-_{x_2};\ C_1]) =$$

$$= \bigcup_{x_2 \in C_2} ([[f^-_{x_2};\ C_1]^*]^* \cap [f^-_{x_2};\ C_1]) .$$

В силу теоремы 1.3

$$\overline{[f^-_{x_2};\ C_1]} = [[f^-_{x_2};\ C_1]^*]^* . \tag{3.5}$$

Отсюда получаем

$$\left[[f^-;(C_1;\ C_2)]^*_{x_1}\right]^*_{x_1^*} = \bigcup_{x_2 \in C_2} (\overline{[f^-_{x_2};\ C_1]} \cap [f^-_{x_2};\ C_1]) = [f^-;(C_1;\ C_2)],$$

что и требовалось доказать.

Поскольку множество $[f^-; (C_1; C_2)]$ является сопряженным по переменной x_1^* к множеству $[\varphi^+; (\Gamma_1'; C_2)]$, функция $f(x_1; x_2)$ должна быть сопряженной по переменной x_1^* к функции $\varphi(x_1^*; x_2)$. Множество $\overline{[f_{x_2}^-; C_1]}$ можно определить как множество всех невертикальных гиперплоскостей пространства $R\times(H_1^*; x_2)$, расположенных ниже множества $[\varphi_{x_2}^+; \Gamma_{1x_2}']$ (см. 3.5). Уравнение каждой такой гиперплоскости будем записывать в виде

$$\alpha-(x_1,\ x_1^*)=a \tag{3.6}$$

и будем обозначать эту гиперплоскость через $(a; x_1)$, где a – точка пересечения гиперплоскости с вертикальной осью в пространстве $H_1^*\times R$, а $(1; -x_1)$ – ее нормаль.

Точка $(a; x_1)$ принадлежит множеству $[f_{x_2}^-; C_1]$ тогда и только тогда, когда

$$a\leqslant\alpha-(x_1,\ x_1^*) \tag{3.7}$$

для любой точки $(\alpha; x_1^*)\in[\varphi_{x_2}^+; \Gamma'_{1x_2}]$.

Для того, чтобы точка $(a; x_1)$ принадлежала множеству $\overline{[f_{x_2}^-; C_1]}$ достаточно, чтобы выполнялось соотношение $a\leqslant\varphi(x_1^*; x_2)-(x_1,\ x_1^*)$ для любой точки $x_1^*\in\Gamma'_{1x_2}$. В таком случае при каждом фиксированном $x_2\in C_2$ имеем

$$C_1\subseteq C_{1x_2}=\{x_1; x_2)\in(H_1; x_2)\ /\ \inf_{x_1^*\in\Gamma'_{1x_2}}[\varphi(x_1^*; x_2)-(x_1,\ x_1^*)]>-\infty\} \tag{3.8}$$

и для любой точки $(x_1; x_2)\in(C_1; C_2)$ имеем

$$f(x_1; x_2)=\inf_{x_1^*\in\Gamma'_{1x_2}}[\varphi(x_1^*; x_2)-(x_1,\ x_1^*)]. \tag{3.9}$$

Лемма 1.6. *Пусть дана вогнуто-выпуклая функция $f(x_1; x_2)$, определенная на прямом произведении выпуклых множеств C_1 и C_2 лежащих в пространствах H_1 и H_2 соответственно, замкнутая по $x_2\in C_2$ относительно $C_1\times C_2$. Тогда функция $\varphi(x_1^*; x_2)$ $\big(\psi(x_1; x_2^*)\big)$, определенная на множестве* (1.10) ((2.7)) *соотношением* (1.11) ((2.8)), *выпукла и замкнута относительно* $(\Gamma_1'; C_2)$ $((C_1; \Gamma_2''))$.

Доказательство. По лемме 1.1 функция $\varphi(x_1^*; x_2)$ выпукла и нам нужно только доказать, замкнутость этой функции относительно множества $(\Gamma_1'; C_2)$.

Пусть $\{(x_1^{*\tau}; x_2^\tau)\}$ $\tau\in T$ – обобщенная последовательность точек выпуклого множества $(\Gamma_1'; C_2)$, сходящаяся к некоторой точке $(x_1^{*0}; x_2^0)\in H_1^*\times H_2$, в которой

$$\underline{\lim}_{\tau\in T}\ \varphi(x_1^*; x_2) \text{ конечен.}$$

Положим

$$\alpha=\underline{\lim}_{\tau\in T}\ \varphi(x_1^*; x_2).$$

В таком случае нам нужно показать, что точка

$$(x_1^{*0}; x_2^0)\in(\Gamma_1'; C_2).$$

В силу предполагаемой ограниченности

$$\overline{\lim_{\tau\in T}}\ \varphi(x_1^*;\ x_2)\ \text{в точке}\ (x_1^{*0};\ x_2^0)$$

имеем для любого $x_1 \in C_1$

$$\overline{\lim_{\tau\in T}}\,[\varphi(x_1^{*\tau};\ x_2^\tau)-(x_1^{*\tau},\ x_1)]=\alpha-(x_1^{*0},\ x_1).$$

Отсюда, ввиду (1.9) и (3.9)

$$\overline{\lim_{\tau\in T}}\ \inf_{x_1^*\in\Gamma'_{1x_2^\tau}}\ [\varphi(x_1^{*\tau};\ x_2^\tau)-(x_1^{*\tau},\ x_1)]=\overline{\lim_{\tau\in T}}\,f(x_1;\ x_2^\tau)\leqslant\alpha-(x_1^{*0},\ x_1).$$

Откуда для всех $x_1\in C_1$ вытекает ограниченность $\overline{\lim\limits_{x_2\in C_2,\ x_2\to x_2^0}}\ f(x_1;\ x_2)$. Поэтому, в силу предполагаемой замкнутости функции $f(x_1;\ x_2)$ по x_2, точка $x_2^0\in C_2$.

Отсюда, используя соотношение (1.1), получаем $f(x_1;\ x_2^0)\leqslant\alpha-(x_1^{*0},\ x_1)$ и в силу (1.8) заключаем, что $x_1^{*0}\in\Gamma'_{1x_2^0}$, что означает, что $(x_1^{*0};\ x_2^0)\in(\Gamma'_1;\ C_2)$, что и требовалась доказать.

Теорема 1.4. *Пусть дана функция* $f(x_1;\ x_2)$, *обладающая свойством* А. *Тогда функции* $\varphi(x_1^*;\ x_2)$ и $\psi(x_1;\ x_2^*)$, *определенные соотношением* (1.11) и (2.8), *соответственно, и множества* $[\varphi^+;\ (\Gamma'_1;\ C_2)]$ *и* $[\psi^-;\ (C_1;\ \Gamma''_2)]$, *определенные соотношениями* (1.14) *и* (2.11) *соответственно, сопряжены друг с другом, т. е. имеют место соотношения*

$$[\varphi^+;\ (\Gamma'_1;\ C_2)]=[\psi^-;\ (C_1;\ \Gamma''_2)]^*;$$

$$[\psi^-;\ (C_1;\ \Gamma''_2)]=[\varphi^+;\ (\Gamma'_1;\ C_2)]^*. \tag{3.10}$$

Доказательство. По определению множества $[\varphi^+;\ (\Gamma'_1;\ C_2)]^*$ имеем

$$[\varphi^+;\ (\Gamma'_1;\ C_2)]^*=\{(\beta;\ x_1;\ x_2^*)\in R\times H_1\times H_2^*\ /$$

$$/\ \inf_{(x_1^*;\ x_2)\in(\Gamma'_1;\ C_2)}[\varphi(x_1^*;\ x_2)-(x_1,\ x_1^*)-(x_2^*,\ x_2)]>-\infty;$$

$$\beta\leqslant\inf_{(x_1^*;\ x_2)\in(\Gamma'_1;\ C_2)}[\varphi(x_1^*;\ x_2)-(x_1,\ x_1^*)-(x_2^*,\ x_2)]\}. \tag{3.11}$$

Положим

$$\tilde\psi(x_1;\ x_2^*)=\inf_{(x_1^*;\ x_2)\in(\Gamma'_1;\ C_2)}[\varphi(x_1^*;\ x_2)-(x_1,\ x_1^*)-(x_2,\ x_2^*)]. \tag{3.12}$$

В силу (2.8), имеем:

$$\psi(x_1;\ x_2^*)=\inf_{x_2\in C_2}[f(x_1;\ x_2)-(x_2^*,\ x_2)]. \tag{3.13}$$

В силу определений (2.6), (2.7) и (2.11), имеем

$$[\psi^-;\ (C_1;\ \Gamma''_2)]=\{(\beta;\ x_1;\ x_2^*)\in R\times H_1\times H_2^*\ /$$

$$/\ x_1\in C_1;\ \psi(x_1;\ x_2^*)>-\infty;\ \beta\leqslant\psi(x_1;\ x_2^*)\}. \tag{3.14}$$

Согласно соотношениям (3.11) и (3.12) множество $[\varphi^+;\ (\Gamma'_1;\ C_2)]$ может быть представлено в виде

$$[\varphi^+;\ (\Gamma'_1;\ C_2)]^*=[\psi^-;\ (\tilde C_1;\ \tilde\Gamma_2)]=\{(\beta;\ x_1;\ x_2^*)\in R\times H_1\times H_2^*\ /$$

$$/\ \inf_{(x_1^*;\ x_2)\in(\Gamma'_1;\ C_2)}[\varphi(x_1^*;\ x_2)-(x_1,\ x_1^*)-(x_2^*,\ x_2)]>-\infty,$$

$$\beta\leqslant\tilde\psi(x_1;\ x_2^*)\}. \tag{3.15}$$

В силу леммы 1.2, имеем $\tilde{C}_1 = \bigcap\limits_{x_2 \in C_2} C_{1x_2} = C_1$ $\left(\text{см. (3.8)}\right)$ поэтому ввиду (3.8) и (3.9), мы получаем для данной точки $(\beta;\ x_1;\ x_2^*)$ из множества $[\varphi^+;\ (\Gamma_1';\ C_2)]$

$$\tilde{\psi}(x_1;\ x_2^*) = \inf_{x_2 \in C_2}\Big[\inf_{x_1^* \in \Gamma'_{1x_2}} [\varphi(x_1^*;\ x_2) - (x_1,\ x_1^*)] - (x_2^*,\ x_2)\Big] =$$

$$= \inf_{x_2 \in C_2} [f(x_1;\ x_2) - (x_2^*,\ x_2)] = \psi(x_1;\ x_2^*) > -\infty;\ \beta \leqslant \psi(x_1;\ x_2^*).$$

В силу этого точка $(\beta;\ x_1;\ x_2^*)$ принадлежит множеству $[\psi^-;\ (C_1;\ \Gamma_2'')]$, т. е. имеет место включение $[\varphi^+;\ (\Gamma_1';\ C_2)]^* \subseteq [\psi^-;\ (C_1;\ \Gamma_2'')]$. Для получения противоположного включения нужно провести эти рассуждения в обратном порядке. Итак, мы получили $[\varphi^+;\ (\Gamma_1';\ C_2)]^* = [\psi^-;\ (C_1;\ \Gamma_2'')]$. Доказательство второго соотношения проводится точно так же, тем самым теорема полностью доказана.

Теорема 1.5. *Пусть дана вогнуто-выпуклая функция $f(x_1;\ x_2)$, обладающая свойством* A. *Тогда, если функция $g'(x_1^*;\ x_2^*)$, определенная на множестве $(\Gamma_1';\ \Gamma_2')$ соотношением* (1.22), *полунепрерывна снизу по x_1^** (см. *теорему* 1.1), *а функция $g''(x_1^*;\ x_2^*)$, определенная на множестве $(\Gamma_1'';\ \Gamma_2'')$ соотношением* (2.17) *полунепрерывна сверху по x_2^** (см. *теорему* 1.2), *то множества $(\Gamma_1';\ \Gamma_2')$ и $(\Gamma_1'';\ \Gamma_2'')$ совпадают, а функция $g'(x_1^*;\ x_2^*)$ и функция $g''(x_1^*;\ x_2^*)$ имеют одно и то же значение во всех точках области $(\Gamma_1;\ \Gamma_2) = (\Gamma_1';\ \Gamma_2') = (\Gamma_1'';\ \Gamma_2'')$, т.е соотношения* (1.22) и (2.17) *определяют на множестве $(\Gamma_1;\ \Gamma_2)$ одну и ту же функцию $g(x_1^*;\ x_2^*)$, которая обладает свойством* A.

Имеют место соотношения

$$g(x_1^*;\ x_2^*) = \inf_{x_2 \in C_2} \sup_{x_1 \in C_1} [f(x_1;\ x_2) + (x_1^*,\ x_1) - (x_2^*,\ x_2)] =$$

$$= \sup_{x_1 \in C_1} \inf_{x_2 \in C_2} [f(x_1;\ x_2) + (x_1^*,\ x_1) - (x_2^*,\ x_2)]; \tag{3.16}$$

$$f(x_1;\ x_2) = \sup_{x_2^* \in \Gamma_2} \inf_{x_1^* \in \Gamma_1} [g(x_1^*;\ x_2^*) - (x_1^*,\ x_1) + (x_2^*,\ x_2)] =$$

$$= \inf_{x_1^* \in \Gamma_1} \sup_{x_2^* \in \Gamma_2} [g(x_1^*;\ x_2^*) - (x_1^*,\ x_1) + (x_2^*,\ x_2)]; \tag{3.17}$$

$$[f^-;\ (C_1;\ C_2)] = [g^-;\ (\Gamma_1;\ \Gamma_2)]^*;\ [f^-;\ (C_1;\ C_2)]^* =$$

$$= [g^-;\ (\Gamma_1;\ \Gamma_2)]. \tag{3.18}$$

Доказательство. При выводе леммы 1.2 мы установили, что проекция множества $(\Gamma_1';\ \Gamma_2')$ на подпространство H_2^* совпадает с проекцией множества $(\tilde{C}_1;\ \tilde{\Gamma}_2)$ в силу того, что имеет место $[\varphi^+;\ (\Gamma_1';\ C_2)]^* = [\psi^-;\ (C_1;\ \Gamma_2'')]$ (см. теорему (1.4). Поэтому $\Gamma_2' = \Gamma_2''$.

В силу точно таких же соображений $\Gamma_1' = \Gamma_1''$.

Покажем, что функции $g'(x_1^*;\ x_2^*)$ и $g''(x_1^*;\ x_2^*)$, определенные в одной и той же области, в каждой точке $(x_1^{*0};\ x_2^{*0}) \in (\Gamma_1;\ \Gamma_2)$ принимают одно и то же значение.

В силу (2.17), имеем

$$g''(x_1^{*0};\ x_2^{*0}) = \sup_{x_1 \in C_{1x_2^{*0}}} [\psi(x_1;\ x_2^{*0}) + (x_1^{*0},\ x_1)]. \tag{3.19}$$

Далее, из теоремы 1.4, имеем:

$$\varphi(x_1^*, x_2) = \sup_{(x_1;\, x_2^*) \in (C_1;\, \Gamma_2)} [\psi(x_1;\, x_2^*) + (x_1^*, x_1) + (x_2^*, x_2)] =$$

$$= \sup_{x_2^* \in \Gamma_2} \Big[\sup_{x_1 \in C_{1x_2^*}} [\psi(x_1;\, x_2^*) + (x_1^*, x_1)] + (x_2^*, x_2) \Big] =$$

$$= \sup_{x_2^* \in \Gamma_2} [g''(x_1^*;\, x_2^*) + (x_2^*, x_2)].$$

Отсюда для фиксированного x_1^{*0} имеем

$$[\varphi^+_{x_1^{*0}};\, C_{2x_1^{*0}}] = [g''_{x_1^{*0}};\, \Gamma_2]^*_{x_2^*} \quad \text{(см. теорему (1.3).}$$

В силу полунепрерывности сверху по x_2^* функции $g''(x_1^*;\, x_2^*)$ на множестве $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ при фиксированном x_1^{*0} и соотношения (1.23) заключаем, что:

$$[g''_{x_1^{*0}};\, \Gamma_2] \subset [g'_{x_1^{*0}};\, \Gamma_2].$$

Следовательно,

$$g''(x_1^{*0};\, x_2^{*0}) = g'(x_1^{*0};\, x_2^{*0}).$$

Таким образом, мы доказали, что функции $g'(x_1^{*0};\, x_2^{*0})$ и $g''(x_1^{*0};\, x_2^{*0})$ совпадают. В силу теорем 1.1 и 1.2 функция

$$g(x_1^*;\, x_2^*) = g'(x_1^{*0};\, x_2^{*0}) = g''(x_1^{*0};\, x_2^{*0})$$

замкнута на области определения, которая является прямым произведением выпуклых множеств Γ_1 и Γ_2. Замкнутость функции $g(x_1^*;\, x_2^*)$ относительно множества $(\Gamma_1;\, \Gamma_2)$ доказывается от противного. Предположим, что функция $g(x_1^*;\, x_2^*)$ не замкнута по x_2^* относительно $(\Gamma_1;\, \Gamma_2)$, тогда существует такое $x_2^{*0} \in H_2^*$, $x_2^{*0} \notin \Gamma_2$, в которой выражение $\overline{\lim\limits_{x_2 \to x_2^{*0}}}\, g(x_1^*;\, x_2^*)$ принимает конечные значения. Это означает, что $x_2^{*0} \in \bigcap\limits_{x_1^* \in \Gamma_1} \Gamma_{1x_1^*}$. Но этого не может быть в силу леммы 1.2. Чтобы освободиться от противоречия нужно отказаться от сделанного допущения, тем самым мы получили, что функция $g(x_1^*;\, x_2^*)$ обладает свойством А.

Применяя приведенные построения к функции $g(x_1^*,\, x_2^*)$, получим $f(x_1;\, x_2)$ с областью определения $(C_1;\, C_2)$. Тем самым теорема полностью доказана.

Замечание 3.1. В дальнейшем о функции $f(x_1;\, x_2)$, обладающей свойством А будем говорить, что она удовлетворяет условию B', если функция $g'(x_1^*;\, x_2^*)$, определенная на множестве $(\Gamma_1';\, \Gamma_2')$ с помощью соотношения (1.22) полунепрерывна снизу по x_1^* (см. теорему 1.1), или условию B'', если функция $g''(x_1^*;\, x_2^*)$, определенная на множестве $(\Gamma_1'';\, \Gamma_2'')$ с помощью (2.17) полунепрерывна сверху по x_2^* (см. теорему 1.2).

Определение. Пусть $f(x_1;\, x_2)$ – действительная функция, определенная для всех $x_1 \in A$ и $x_2 \in B$ (A и B – произвольные множества). Точка $(x_1^0;\, x_2^0)$, где $x_1^0 \in A$ и $x_2^0 \in B$ называется седловой точкой, если выполняются следующие условия:

1) $f(x_1;\, x_2^0) \leqslant f(x_1^0;\, x_2^0)$ для всех $x_1 \in A$,

2) $f(x_1^0;\, x_2^0) \leqslant f(x_1^0;\, x_2)$ для всех $x_2 \in B$.

Приведем формулировки теорем, имеющих непосредственное отношение к изучаемому вопросу.

Теорема А. ([7]) *Пусть* $f(x_1;\ x_2)$ *— действительная функция, определенная для* $x_1 \in A$ *и* $x_2 \in B$ *и существуют*

$$\max_{x_1 \in A}\ \min_{x_2 \in B} f(x_1;\ x_2) \quad \text{и} \quad \min_{x_2 \in B}\ \max_{x_1 \in A} f(x_1;\ x_2).$$

Тогда необходимое и достаточное условие того, чтобы

$$\max_{x_1 \in A}\ \min_{x_2 \in B}\ f(x_1;\ x_2) = \min_{x_2 \in B}\ \max_{x_1 \in A} f(x_1;\ x_2)$$

состоит в том, что $f(x_1;\ x_2)$ *должно иметь седловую точку. Кроме того, если* $(x_1^0;\ x_2^0)$ *есть седловая точка функции* $f(x_1;\ x_2)$, *то*

$$f(x_1^0;\ x_2^0) = \max_{x_1 \in A}\ \min_{x_2 \in B} f(x_1;\ x_2) = \min_{x_2 \in B}\ \max_{x_1 \in A} f(x_1;\ x_2).$$

Теорема В. ([3]) *Для того, чтобы функция* $f(x_1;\ x_2)$, *определенная для всех* $x_1 \in A$, $x_2 \in B$ *имела седловую точку, необходимо и достаточно, чтобы существовали и были равны друг другу выражения*

$$\max_{x_1 \in A}\ \inf_{x_2 \in B} f(x_1;\ x_2) \quad \text{и} \quad \min_{x_2 \in B}\ \sup_{x_1 \in A} f(x_1;\ x_2).$$

Теперь сформулируем следствия, непосредственно вытекающие из теоремы 1.5.

Следствие 1. Если функция $f(x_1;\ x_2)$ обладает свойством А и свойством B' или B'', то в силу теоремы 1.5 равенство

$$\inf_{x_2 \in C_2}\ \sup_{x_1 \in C_1} f(x_1;\ x_2) = \sup_{x_1 \in C_1}\ \inf_{x_2 \in C_2} f(x_1;\ x_2)$$

имеет место тогда и только тогда, когда множества Γ_1 и Γ_2, фигурирующие в определениях (1.10) и (2.7), содержат начало координат пространств H_1^* и H_2^* соответственно.

Следствие 2. Если множества C_1 и C_2 компактны, то имеет место равенство

$$\min_{x_2 \in C_2}\ \max_{x_1 \in C_1} f(x_1;\ x_2) = \max_{x_1 \in C_1}\ \min_{x_2 \in C_2} f(x_1;\ x_2).$$

Следствие 3. Если множество $C_1\,(C_2)$ компактно, а множество $\Gamma_2\,(\Gamma_1)$ содержит начало координат пространства H_2^* (H_1^*), и существует точка $(x_1^0;\ x_2^0)$, в которой

$$f(x_1^0;\ x_2^0) = \min_{x_2 \in C_2}\ \sup_{x_1 \in C_1} f(x_1;\ x_2) \quad \left(f(x_1^0;\ x_2^0) = \max_{x_1 \in C_1}\ \inf_{x_2 \in C_2} f(x_1;\ x_2)\right),$$

то имеет место равенство

$$\min_{x_2 \in C_2}\ \max_{x_1 \in C_1} f(x_1;\ x_2) = \max_{x_1 \in C_1}\ \min_{x_2 \in C_2} f(x_1;\ x_2),$$

Следствие 4. Пусть существуют

$$\min_{x_2 \in C_2}\ \sup_{x_1 \in C_1} f(x_1;\ x_2) \quad \text{и} \quad \max_{x_1 \in C_1}\ \inf_{x_2 \in C_2} f(x_1;\ x_2).$$

Тогда для того, чтобы функции $f(x_1;\ x_2)$ имела седловую точку, необходимо и достаточно, чтобы множества Γ_1 и Γ_2 содержали начало координат соответствующих пространств H_1^* и H_2^*.

г. Москва

Поступило в редакцию
10.VII.1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Бурбаки, Топологические векторные пространства, И. Л. 1959.
2. A. Brondsted, Conjugate convex functions in topological vector spaces, Mat. Fys. Medd. Dansk. Vid. Selsk 34 (1964).
3. Н. Н. Воробьёв, Конечные бескоалиционные игры, УМН, 14, № 4 (1959), 21–56.
4. U. Dieter, Optimierung saufgaben in topologischen Vektorräumen I: Dualitätstheorie „Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gieb.", 1966, 5, N 2, 89–117.
5. Л. В. Канторович и Г. П. Акилов, Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, 1959.
6. С. Карлин, Математические методы в теории игр, программировании и экономике, Изд. „Мир", Москва, 1964.
7. Дж. Мак – Кинси, Введение в теорию игр, Физматгиз, 1960.
8. R. T. Rockafellar, Zevel sets and continuity of conjugate convex functions, Trans. Amer. Math. Soc., 123 (1966), 46–63.
9. R. T. Rockafellar, Minimax theorems and conjugate saddle-functions, Math. Scand., 14 (1964), 151–173.
10. W. Fenchel, Convex cones sets and functions, Lecture notes, Dept. of Math. Princeton University, 1953.
11. W. Fenchel, On conjugate convex functions, Canad. J. Math., 1 (1949), 73–77.
12. Эрроу, Гурвиц, Удзава, Исследования по линейному и нелинейному программированию, М. ИЛ, 1962, стр. 334.

APIE IŠKILAI-ĮGAUBTŲ FUNKCIJŲ SUJUNGTINUMĄ

N. Tinianskis

(*Reziumė*)

Darbe nagrinėjamos iškilai-įgaubtų funkcijų sujungtinumo savybės.

Sakykime, $f(x_1;x_2)$ – apibrėžta ant $C_1\times C_2$ iškilai-įgaubta funkcija, kur C_1 ir C_2 iškilos aibės, esančios refleksyvinėse, lokališkai-įgaubtose tiesinėse topologinėse erdvėse atitinkamai H_1 ir H_2. Tuomet

$$\varphi(x_1^*;\ x_2)=\sup_{x_1\in C_1}[f(x_1;\ x_2)+(x_1,\ x_1^*)]$$

ir

$$\psi(x_1;\ x_2^*)=\inf_{x_2\in C_2}[f(x_1;\ x_2^*)-(x_2,\ x_2^*)]$$

turi ant atitinkamai

$$(\Gamma_1;\ C_2)\subseteq H_1^*\times H_2 \quad \text{ir} \quad (C_1;\ \Gamma_2)\subseteq H_1\times H_2^*$$

į gaubtų aibių baigtines reikšmes ir yra tarp savęs sujungtinės Frenchelio prasme funkcijos. Tačiau

$$g'(x_1^*;\ x_2^*)=\inf_{x_2\in C_2}\ \sup_{x_1\in C_1}[f(x_1;\ x_2)+(x_1,\ x_1^*)-(x_2,\ x_2^*)]$$

ir

$$g''(x_1^*;\ x_2^*)=\sup_{x_1\in C_1}\ \inf_{x_2\in C_2}[f(x_1;\ x_2)+(x_1,\ x_1^*)-(x_2,\ x_2^*)]$$

turi ant $\Gamma_1\times\Gamma_2\subseteq H_1^*\times H^*$ baigtines reikšmes ir yra iškilai-įgaubtos funkcijos.

Be to, jei $g'(x_1^*;\ x_2^*)$ pagal kintamąjį x_1^* yra pusiautolydinė iš apačios arba $g''(x_1^*;x_2^*)$ pagal kintamąjį x_2 – pusiau tolydinė iš viršaus, tai $g'(x_1^*;\ x_2^*)=g''(x_1^*;\ x_2^*)$.

ON CONJUGATE OF CONCAVE-CONVEX FUNCTIONS

N. Tinianskij

(*Summary*)

In This article the following result is obtained.

Let H_1, H_2 be two local convex linear topological Hausdorff spaces, and let H_1^*, H_2^* be their conjugate spaces. Suppose that $U \subset H_1$ and $V \subset H_2$ are two convexsubsets, and let $f(u, v)$ be a finite real convex-concave function on the Cartesian product $U \times V$. Define the functions φ, ψ and g by

$$\varphi(\gamma, v) = \inf_{u \in U} [f(u, v) + (\gamma, u)], \quad \gamma \in H_1^*, \; v \in V;$$

$$\psi(u, \delta) = \sup_{v \in V} [f(u, v) - (\delta, v)], \quad \delta \in H_2^*, \; u \in U;$$

$$g(\gamma, \delta) = \inf_{u \in U} \sup_{v \in V} [f(u, v) + (\gamma, u) - (\delta, v)], \quad \gamma \in H_1^*, \; \delta \in H_2^*.$$

Then these functions have the following properties:

1) $\varphi(\gamma, v)$ is a concave function on a convex set $M = \{(\gamma, v) / \varphi(\gamma, v) > -\infty\}$, and $\psi(u, \delta)$ is a convex one on a convex set $N = \{(u, \delta) / \psi(u, \delta) < \infty\}$; furthermore, ψ is a Fenchel conjugate of φ;

2) if Γ and Δ are projections of M and N on H_1^* and H_2^* respectively, then the subset $\{(\gamma, \delta) \,|\, / g(\gamma, \delta) | < \infty\} \subset H_1^* \times H_2^*$ coincides with $\Gamma \times \Delta$ and g is *a* concave-convex function on $\Gamma \times \Delta$.