VIII LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 2

1968

УДК–517.919.2

ОЦЕНКА РЕЗОЛЬВЕНТЫ ПРОИЗВОДЯЩЕГО ОПЕРАТОРА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Ю. Г. БОРИСОВИЧ, А. Л. БАДОЕВ

Рассмотрим систему n линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом (в векторной форме):

$$x'(t)=A_1 x(t)+B_1 x(t-h), \tag{1}$$

где A_1 и B_1 – постоянные матрицы, а h – положительная константа.

Ниже через $C_{[-h,0]}$ мы будем обозначать пространство непрерывны функций на промежутке $[-h, 0]$, а декартово произведение n пространств $C_{[-h,0]}$ – через $C^n_{[-h,0]}$. Введем норму в $C^n_{[-h,0]}$ следующим образом:

$$\|x\|=\|x_1(t)\|+\cdots+\|x_n(t)\|,$$

где

$$\|x_i(t)\|=\max_{-h\leqslant t\leqslant 0}|x_i(t)| \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

Задача Коши для системы (1) ставится следующим образом:

$$x_{(t\leqslant 0)}=x_0(t), \quad x_0(t)\in C^n_{[-h,0]}. \tag{2}$$

Решением начальной задачи (1), (2) называется функция $x(t)$, принадлежащая $C^n_{[-h,e]}$ $(e>0)$, удовлетворяющая при $t>0$ системе (1), а при $t\leqslant 0$ начальному условию (2).

Задача (1), (2) разрешима однозначно на промежутке $[0, \infty)$ и имеет место непрерывная зависимость решений от начальных условий [1].

Определим на пространстве $C^n_{[-h,0]}$ оператор сдвига равенством:

$$U(t)\,x_0(s)=x(t+s,\ x_0), \quad t\geqslant 0, \quad -h\leqslant s\leqslant 0,$$

где $x(t,\ x_0)$ – решение задачи (1), (2), отвечающее начальной функции $x_0(s)$.

Известно, что неподвижные точки оператора $U(\omega)$ и только они определяют начальные условия, из которых начинаются ω – периодические решения исходной системы [2, 3].

Оператор сдвига $U(t)$ линеен и непрерывен; совокупность линейных ограниченных операторов $U(t)$ $(t\geqslant 0)$ образует сильно непрерывную полугруппу (определение см. [4]), а ее производящий оператор A есть оператор дифференцирования: $Ax_0(s)=\frac{dx_0(s)}{ds}$, $x_0(s)\in D(A)$, с областью определения $D(A)$, состоящей из непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих краевому условию

$$x_0'(0)=A_1 x_0(0)+B_1 x_0(-h).$$

Спектр производящего оператора A состоит только из собственных значений и определяется характеристическим уравнением

$$\Delta(\lambda)=|A_1+B_1e^{-\lambda h}-\lambda I|=0. \tag{3}$$

Пусть λ является регулярным значением производящего оператора A. Тогда уравнение

$$(A-\lambda I)\,x(s)=y(s), \quad x(s)\in D(A),$$

разрешимо однозначно для любой функции $y(s)$, принадлежащей $C^n_{[-h,\,0]}$. В силу определения производящего оператора A находим:

$$(A-\lambda I)^{-1}y(s)=x(s)=ce^{\lambda s}+\int_0^s e^{\lambda(s-\tau)}y(\tau)\,d\tau, \tag{4}$$

где вектор C определяется из системы

$$(A_1+B_1e^{-\lambda h}-\lambda I)\,c=y(0)+B_1\int_{-h}^{0}e^{-\lambda(h+\tau)}y(\tau)\,d\tau. \tag{5}$$

В общей теории полугрупп известна оценка (6) резольвенты $(A\ \lambda\ I)^{-1}$. Наша цель — вывести эту оценку элеменарным путем.

Сформулируем два вспомогательных предложения.

Лемма 1. *Пусть $\Delta(\lambda)\neq0$ при $\lambda\in[0,\infty)$, а $P(\lambda)$ — полином n-ой степени относительно λ с коэффициентами, являющимися линейными комбинациями функций $e^{-k\lambda h}$ $(k=1,\ldots,n)$. Тогда функция $f(\lambda)=\left|\frac{P(\lambda)}{\Delta(\lambda)}\right|$ ограничена на промежутке $[0,\infty)$.*

Лемма 2. *Если характеристическое уравнение (3) не имеет нулей на промежутке $[0,\infty)$, то вектор $c=c(\lambda,y)$, определяемый из уравнения (5), линейно и непрерывно зависит от функции $y(s)$ при каждом фиксированном λ, и непрерывно зависит от λ при каждой фиксированной функции $y(s)$.*

Доказательства очевидны.

Сформулируем и докажем основное утверждение.

Теорема 1. *Если характеристическое уравнение (3) не имеет вещественных корней на промежутке $[0,\infty)$, то справедлива оценка*

$$\|(A-\lambda I)^{-1}\|\leqslant\frac{\alpha}{1+\lambda}, \quad \lambda\geqslant0, \tag{6}$$

где α — постоянная, не зависящая от λ.

Доказательство. Пусть $\lambda\geqslant\varepsilon>0$, где ε — фиксированное число. Тогда, в силу равенства (4), имеем

$$\|(A-\lambda I)^{-1}y(s)\|=\|ce^{\lambda s}+\int_0^s e^{\lambda(s-\tau)}y(\tau)\,d\tau\|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left[\|c_ie^{\lambda s}\|+\|\int_0^s e^{\lambda(s-\tau)}y(\tau)\,d\tau\|\right]\leqslant\sum_{i=1}^{n}|c_i|+\|y\|\cdot\frac{1}{\lambda}.$$

Для оценки $|c_i|$ воспользуемся формулой (5). Имеем линейную неоднородную систему n уравнений с n неизвестными c_i $(i=1,\ldots,n)$, у которой определитель отличен от нуля. Воспользовавшись правилом Крамера, получим

$$|c_i| = \left|\frac{\Delta_i(\lambda)}{\Delta(\lambda)}\right|,$$

где $\Delta_i(\lambda)$ — определитель n-го порядка, у которого i-ый столбец есть столбец из свободных членов. Разложив определитель $\Delta_i(\lambda)$ по i-ому столбцу и оценивая по модулю, получим неравенство

$$|c_i| \leqslant \|y\| \frac{|F_i(\lambda)|}{|\Delta(\lambda)|},$$

где $F_i(\lambda)$ — полином $(n-1)$-ой степени относительно λ с коэффициентами, являющимися линейными комбинациями функций вида $e^{-\lambda hk}$ $(k=1,\ldots, n)$.

Умножив и разделив правую часть последнего неравенства на λ и применив лемму 1, получим

$$|c_i| \leqslant \frac{\|y\|}{\lambda} k_i \text{ для } \lambda > 0 \ (i=1, \ \ldots, \ n).$$

Используя полученное неравенство, имеем

$$\|(A-\lambda I)^{-1} y(s)\| \leqslant \frac{\|y\|}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} k_i + \frac{\|y\|}{\lambda}, \quad \lambda > 0.$$

Применив очевидное неравенство

$$\frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{1+\frac{1}{\varepsilon}}{1+\lambda}, \quad \lambda \in [\varepsilon, \ \infty),$$

где $\varepsilon > 0$, получим

$$\|(A-\lambda I)^{-1}\| \leqslant \frac{\alpha_1}{1+\lambda}, \quad \lambda \in [\varepsilon, \ \infty), \tag{7}$$

где

$$\alpha_1 = \left(\sum_{i=1}^{n} k_i + 1\right)\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

При $\lambda \in [0, \ \varepsilon]$ выполняется неравенство

$$\|(A-\lambda I)^{-1}\| \leqslant k_\varepsilon \tag{8}$$

ввиду непрерывной зависимости нормы резольвенты от $\lambda \in [0, \ \varepsilon]$. Из (7) и (8) следует оценка $\|(A-\lambda I)^{-1}\| \leqslant \frac{\alpha}{1+\lambda}$, $\lambda \geqslant 0$, где $\alpha = \max\{k_\varepsilon(1+\varepsilon), \alpha_1\}$. Теорема доказана.

Оценка (6) играет существенную роль в понятии позитивного оператора [5]. Мы сформулируем в этой связи такое предложение:

Теорема 2. *Если выполнены условия теоремы* 1, *то оператор* A *позитивен.*

Доказательство. Так как полугруппа $U(t)$ сильно непрерывна, то производящий оператор A замкнут и имеет в пространстве $C^n_{[-h, 0]}$ плотную область определения $D(A)$; в силу теоремы 1 справедлива оценка (6), следовательно, оператор A позитивен.

Замечание. Полученный результат имеет место для систем n линейных дифференциальных уравнений с различными запаздываниями.

Орловский Государственный
педагогический институт

Поступило в редакцию
10.VIII.1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Э. Эльсгольц, Качественные методы в математическом анализе, М., Гостехиздат, 1955.
2. Ю. Г. Борисович, ДАН СССР, № 4, 152 (1963).
3. А. Халанай, Асимптотическая устойчивость и малые возмущения периодических систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, УМН 17, 1 (103), 1962, 231–233.
4. Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц, Линейные операторы, Общая теория, ИЛ, 1963.
5. М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, П. Е. Соболевский, Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций, М., Наука, 1966.

TIESINIŲ SISTEMŲ SU VĖLAVIMU GENERUOJANČIO OPERATORIAUS REZOLVENTOS ĮVERTINIMAS

J. Borisovičius, A. Badojevas

(*Reziumė*)

Darbe gautas tiesinių sistemų su vėlavimu generuojančio operatoriaus rezolventos normos įvertinimas.

THE EVALUATION OF RESOLVENT OF GENERATING OPERATOR FOR THE LINEAR SYSTEMS WITH DELAY

J. Borisovitch, A. Badojev

(*Summary*)

In this paper the evaluation of the norm of the generating operator for the linear system with delay is obtained.