LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VIII Nr. 1, 1968
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VIII № 1, 1968

УДК–512.25/26+519.3 : 330.115

О СВОЙСТВАХ РАВНОВЕСНЫХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА СЛОЖНЫХ ЗАДАЧ

Р. Ю. ЯСИЛИОНИС

В первой части рассматривается один специальный класс сложных задач математического программирования, когда функции ограничений для всех частичных задач общие. Показывается, какую связь эффективные равновесные решения имеют с решениями соответствующих параметрической задачи и векторной задачи минимизации.

Во второй части рассматривается случай, когда функции ограничений для каждой частичной задачи различны, но имеют специальный вид. Указывается также связь между решениями уже упомянутых задач.

1. Рассматривается сложная задача математического программирования

$$\min F_j(x^j); \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{1}$$

при условиях

$$f_i(x) \leqslant 0 \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

где $F_j(x^j)$ $(j=1, 2, \ldots, n)$ и $f_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ – выпуклые скалярные функции от вектора $x=(x^1, \ldots, x^j, \ldots, x^n)$; x^j – s_j-мерный вектор.

Напомним несколько определений.

Равновесным решением сложной задачи (1) называется система векторов $\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^j, \ldots, \bar{x}^n$, удовлетворяющая условиям

$$F_j(\bar{x}^j) = \min_{x^j \in P[\bar{x}(j)]} F_j(x^j); \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{2}$$

где $P[\bar{x}(j)] = \{x^j \mid f_i(\bar{x} \| x^j) \leqslant 0,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ m\}$, $\bar{x} \| x^j = (\bar{x}^1, \ \ldots,\ \bar{x}^{j-1},\ x^j,\ \bar{x}^{j+1},\ \ldots,\ \bar{x}^n)$ (см. [2]).

Вектор $\bar{x} \in P$ называется *эффективной точкой*, если не существует другого допустимого вектора x, для которого

$$F(x) \leqslant F(\bar{x}) \tag{3}$$

или

$$F_j(x^j) \leqslant F_j(\bar{x}^j), \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

и хотя одно неравенство строгое. Здесь $P=\{x \mid f_i(x) \leqslant 0,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ m\}$, а $F(x)=\left(F_1(x^1),\ \ldots,\ F_j(x^j),\ \ldots,\ F_n(x^n)\right)$.

Задачу нахождения эффективных точек, следуя С. Карлину [1], мы называем задачей векторной минимизации.

Третья задача, которую мы рассмотрим, это задача параметрического программирования

$$\min \sum_{j=1}^{n} p_j F_j(x^j) \tag{4}$$

при условиях

$$f_i(x)\leqslant 0, \qquad i=1,\ 2,\ \dots,\ m,$$

где $p_j\geqslant 0$ $(j=1,\ 2,\ \dots,\ n)$ и $\sum\limits_{j=1}^{n} p_j=1$.

Введем несколько обозначений

$$I=\{1,\ 2,\ \dots,\ n\};\ I_0\subset I \text{ и } I_k\subset I,$$

$x(I_k)$ — вектор, составленный из векторов x^j, где

$$j\in I_k, \tag{5}$$

$\left(\bar{x}\,\|\,x(I_k)\right)$ — вектор, компонентами которого являются $\bar{x}^j$ для $j\in I\setminus I_k$ и x^j для $j\in I_k$,

$$P(\bar{x};\ I_k)=\left\{x(I_k)\mid f_i\left(\bar{x}\,\|\,x(I_k)\right)\leqslant 0,\ i=1,\ 2,\ \dots,\ m\right\}.$$

Определение. Систему подмножеств $I_0,\ I_1,\ \dots,\ I_k$ множества индексов I назовем *упорядоченной*, если она удовлетворяет следующим условиям

1) $I_0\neq\varnothing$ и $I_K\neq\varnothing$,

2) $I_1=I\setminus I_0$,

3) $I_1\supset I_2\supset\dots\supset I_k\supset\dots\supset I_K$, причем $I_k\subset I_{k+1}$.

Определение. Решение $\bar{x}_p=(\bar{x}_p^1,\ \dots,\ \bar{x}_p^j,\ \dots,\ \bar{x}_p^n)$ параметрической задачи (4) для значения параметра $p=(p_1,\ \dots,\ p_j,\ \dots,\ p_n)$ удовлетворяет условию V, если существует упорядоченная система подмножеств $I_0,\ I_1,\ \dots.\ I_{K_p}$, где $I_0=\{j\mid p_j>0\}$, и такой набор неотрицательных векторов $t^1,\ \dots,\ t^{K_p}$, где $t^k=(t_j^k)$, $j\in I_k$, что для $k=1,\ 2,\ \dots,\ K_p$

$$\min_{x(I_k)\in P[\bar{x}_p;\ I_k]}\ \sum_{j\in I_k} t_j^k F_j(x^j)=\sum_{j\in I_k} t_j^k F_j(\bar{x}_p^j), \tag{6}$$

где

$$t_j^k=\begin{cases}>0, & j\in I_k\setminus I_{k+1},\\ 0, & j\in I_{k+1}.\end{cases}$$

Лемма 1. *Если $F_j(x^j)$ и $f_i(x)$ $(j\in I$ и $i=1,\ 2,\ \dots,\ m)$ — выпуклые функции от $x=(x^1,\ \dots,\ x^j,\ \dots,\ x^n)$ и, кроме того, множество P ограниченное, то для любой упорядоченной системы подмножеств $I_0,\ I_1,\ \dots,\ I_k$, а также для любых, ей соответствующих неотрицательных векторов $t^1,\ \dots,\ t^k,\ \dots,\ t^K$, существует решение $\bar{x}_p$ задачи (4), удовлетворяющее условию V.*

Доказательство. Берем любое решение $\bar{x}_p$ и для $k=1$ будем искать решение следующим образом:

$$\min_{x(I_1)\in P[\bar{x}_p;\ I_1]}\ \sum_{j\in I_1} t_j^1 F_j(x^j).$$

Решение существует, так как область изменения $P(\bar{x}_p;\ I_1)$ ограничена (следует из ограниченности P). И пусть решением является вектор $\bar{x}_{p_1}(I_1)$. Теперь берем решение задачи (4) такое

$$\bar{x}_{p_1}=(\bar{x}_p^j,\ \ j\in I_0;\ \bar{x}_{p_1}^j,\ j\in I_1).$$

Аналогичным образом поступаем и дальше. Так, для $k \leqslant K$ мы решаем задачу

$$\min_{x(I_k) \in P(\bar{x}_{p(k-1)};\, I_k)} \sum_{j \in I_k} t_j^k F_j(x^j), \tag{7}$$

где

$$\bar{x}_{p(k-1)} = (\bar{x}_p^j,\ j \in I_0;\ \bar{x}_{p_1}^j,\ j \in I_1 \backslash I_2;\ \ldots;\ \bar{x}_{p(k-1)}^j,\ j \in I_{k-1}).$$

Решив задачу для $k = K$, получаем решение задачи (4)

$$\bar{x}_{pK} = (\bar{x}_p^j,\ j \in I_0;\ \bar{x}_{p_1}^j,\ j \in I_1 \backslash I_2;\ \ldots;\ \bar{x}_{p(K-1)},\ j \in I_{K-1} \backslash I_K;\ \bar{x}_K^j,\ j \in I_K),$$

которое удовлетворяет (6). Лемма доказана.

Для формулировки следующей теоремы нам понадобятся следующие обозначения:

X_1 – множество всех эффективных равновесных решений сложной задачи (1);

X_2 – множество всех эффективных точек векторной задачи минимизации;

X_3 – множество всех решений параметрической задачи (4), удовлетворяющих условию V.

Теорема 1. *Если $F_j(x^j)$ и $f_i(x)$ ($j \in I$ и $i = 1, 2, \ldots, m$) – выпуклые функции от $x = (x^1, \ldots, x^j, \ldots, x^n)$, а $F_j(x^j)$, кроме того, строго и множество P ограниченное, то*

$$X_1 \equiv X_2 \equiv X_3. \tag{8}$$

Доказательство. Покажем, что $X_1 \equiv X_2$ и $X_2 \equiv X_3$.

Для доказательства $X_1 = X_2$ надо показать, что $X_1 \subset X_2$ и $X_2 \subset X_1$. Сначала покажем, что $X_2 \subset X_1$, т. е. если $\bar{x} \in X_2$ является эффективной точкой, то он является и равновесным решением ($\bar{x} \in X_1$). Пусть это не так, и $\bar{x}$ не является равновесным решением. Тогда для какого-нибудь j_0 должно быть

$$F_{j_0}(\tilde{x}^{j_0}) = \min_{x^{j_0} \in P[\bar{x}(j_0)]} F_j(x^j) \text{ и } F_{j_0}(\tilde{x})^{j_0}) < F_{j_0}(\bar{x}^{j_0}).$$

Составим новый вектор $\tilde{x} = (x^1, \ldots, \bar{x}^{j_0-1}, \tilde{x}^{j_0}, x^{j_0+1}, \ldots, \bar{x}^n)$, который принадлежит множеству P. Тогда вектор $F(\bar{x})$ доминируется вектором $F(\tilde{x})$, т. е. $\bar{x}$ не является эффективной точкой. Противоречие.

Теперь покажем, что $X_1 \subset X_2$, т. е. каждое эффективное равновесное решение является также и эффективной точкой. Пусть $\bar{x} \in X_1$, но $\bar{x} \notin X_2$. Тогда существует такая эффективная точка $\tilde{x} \in X_2$, в которой вектор $F(\bar{x})$ доминируется вектором $F(\tilde{x})$ $\left(F(x) \leqslant F(\bar{x})\right)$. По доказанному x является равновесным решением. Следовательно, $\bar{x}$ не является эффективным равновесным решением. Получили противоречие. Значит, $X_1 \subset X_2$. Таким образом, доказали тождество $X_1 \equiv X_2$.

Перейдем к доказательству $X_2 \equiv X_3$. Сначала докажем $X_3 \subset X_2$. Пусть $\bar{x}_p \in X_3$, но $\bar{x}_p \notin X_2$. Тогда существует $x \in X_2$, в которой $F(\bar{x}_p)$ доминируется $F(x)$, а это значит, что для некоторого k_0 и $j_0 \in I_{k_0}$.

$$F_{j_0}(\tilde{x}^{j_0}) < F_{j_0}(\bar{x}^{j_0}) \text{ и } F_j(\tilde{x}^j) \leqslant F_j(\bar{x}^j),\ j \neq j_0. \tag{9}$$

Но так как $F_j(x^j)$ ($j \in I$) строго выпуклы, то

$$P(\tilde{x};\ I_{k_0}) \equiv P(\bar{x}_p;\ I_{k_0}). \tag{10}$$

Но (9) и (10) противоречат тому, что $\bar{x}(I_{k_0})$ – решение задачи (6) для $k=k_0$. Итак, $\bar{x}$ – эффективная точка и $X_3 \subset X_2$.

Противоположное включение $X_2 \subset X_3$ следует из одной леммы С. Карлина (см. [1], стр. 254). Кратко покажем это. Пусть $\bar{x} \in X_2$. Тогда существует $\bar{p}$, что $\bar{x}$ является решением параметрической задачи (6) для $p=\bar{p}$. Упорядоченная система подмножеств определяется так:

$$I_0=\{j \mid p_j>0\}, \text{ а } I_1=\{j \mid p_j=0\}.$$

Далее рассматриваем суженную векторную задачу минимизации

$$F^1(x)=(F_j(x^j),\ j \in I_1)^T \text{ и } x(I_1) \in P(\bar{x};\ I_1). \tag{11}$$

Для задачи (11) $\bar{x}(I_1)$ является эффективной точкой. Поэтому по лемме С. Карлина опять существует такой $\bar{t}^1 \geqslant 0$, что $\bar{x}(I_1)$ является решением параметрической задачи (6) для $k=1$ и $\bar{t}^1=t^1$. Теперь определим

$$I_2=\{j \mid t_j^1>0\}, \text{ а отсюда } I_2 \subset I_1.$$

И так далее. Это дает, что для $\bar{x}$ существует упорядоченная система подмножеств индексов $I_0,\ I_1,\ \ldots,\ I_K$, что $\bar{x}$ является решением задачи (4), удовлетворяющим условию V. Следовательно, $X_2 \subset X_3$.

Теорема доказана.

Теорема дает нам способ нахождения всех эффективных равновесных решений сложной задачи (1), решая параметрическую задачу выпуклого программирования. Но, как нетрудно видеть, нахождение всех этих решений при $n>2$ сталкивается с громадными вычислениями или практически неосуществимы.

Рассмотрим еще одну задачу выпуклого программирования

$$\min \sum_{j=1}^{n} \psi_j\left(F_j(x^j)\right) \tag{12}$$

при условиях

$$f_i(x) \leqslant 0, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m.$$

Теорема 2. *Если*

1) $F_j(x^j)$ *и* $f_i(x)$ $(j \in I$ *и* $i=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$ – *выпуклые функции по* $x=(x^1,\ \ldots,\ x^j,\ \ldots,\ x^n)$, *а*

2) $\psi_j(t)$ $(j \in I)$ – *выпуклые, строго возрастающие функции по* t, *то решение задачи* (12) *является также равновесным решением задачи* (1).

Доказательство. Пусть $\bar{x}$ решение задачи (12), которое не является решением задачи (1). Тогда существует такое j_0, что

$$F_{j_0}(\tilde{x}^{j_0}) < F_{j_0}(\bar{x}^{j_0}) = \min_{x^{j_0} \in P[\bar{x}(j_0)]} F_{j_0}(x^{j_0}).$$

Но тогда из условия 2) следует

$$\sum_{j \neq j_0} \psi_j\left(F_j(\bar{x}^j)\right)+\psi_{j_0}\left(F_{j_0}(\tilde{x}^{j_0})\right)<\sum_{j=1}^{n} \psi_j\left(F_j(\bar{x}^j)\right).$$

А так как $(\bar{x}^1,\ \ldots,\ \bar{x}^{j_0-1},\ \tilde{x}^{j_0},\ \bar{x}^{j_0+1},\ \ldots,\ \bar{x}^n) \in P$, то получили противоречие. Теорема доказана.

1. В этой части исследуется один класс сложных задач, где функции ограничений для каждой частичной задачи различны. Имеем сложную задачу

$$\min F_j(x^j); \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{13}$$

при условиях

$$A_j x^j + \sum_{l\neq j} c_l A_l x^l = a,$$

где $A_j\ (j\in I)$ — $(m\times s_j)$ — матрицы; a — m-мерный вектор-столбец; $c_l\ (l\in I)$ — константы.

Введем обозначения:

$$P_j = \left\{ x \mid A_j x^j + \sum_{l\neq j} c_l A_l x^l = a \right\},$$

$$P[\tilde x(j)] = P_j[\tilde x(j)] = \left\{ x^j \mid A_j x^j + \sum_{l\neq j} c_l A_l \tilde x^l = a \right\},$$

$$P = \prod_{j=1}^{n} P_j.$$

Наряду с задачей (13) рассмотрим задачу векторной минимизации

$$F(x) = \left(F_1(x^1),\ \ldots,\ F_j(x^j),\ \ldots,\ F_n(x^n)\right)^T,\ x\in P \tag{14}$$

и параметрическую задачу

$$\min_{x\in P} \sum_{j=1}^{n} p_j F_j(x^j),\quad p_j \geqslant 0 \ \text{ и } \sum_{j=1}^{n} p_j = 1. \tag{15}$$

Далее укажем одно свойство множеств P и $P_j\ (j\in I)$.

Лемма 2. *Если* $x\in P$ *и* $x^j \in P[x(j)]\ (j\in I)$, *то и*

$$\tilde x = (\tilde x^1,\ \ldots,\ \tilde x^j,\ \ldots,\ \tilde x^n) \in P.$$

Доказательство. Пусть выполняется условие леммы, т. е.

$$A_j \tilde x^j + \sum_{l\neq j} c_l A_l x^l = 0,\ j\in I. \tag{16}$$

Для каждого $j_0\in I$ все равенства (16) умножаем для $j\neq j_0$ на c_j, а для $j=j_0$ на 1 и слагаем.

$$A_{j_0}\tilde x^{j_0} + \sum_{l\neq j_0} c_l A_l \tilde x^l + \sum_{j\neq j_0} c_j A_j x^j + \sum_{j\neq j_0}\sum_{l\neq j} c_l c_j A_l x^l = \Big(1+\sum_{j\neq j_0} c_j\Big) a$$

или

$$A_{j_0}\tilde x^{j_0} + \sum_{l\neq j_0} c_l A_l \tilde x^l + \sum_{j\neq j_0} c_j \Big(A_j x^j + \sum_{l\neq j} c_l A_l x^l\Big) = \Big(1+\sum_{j\neq j_0} c_j\Big) a.$$

Но из условия леммы следует, что

$$A_j x^j + \sum_{l\neq j} c_l A_l x^l = a, \qquad j\in I.$$

Поэтому после сокращения получаем

$$A_{j_0}\tilde x^{j_0} + \sum_{l\neq j_0} c_l A_l \tilde x^l = a.$$

А так как эту процедуру можно проделать для любого $j_0 \in I$, то

$$\tilde{x} \in P_{j_0},\ j_0 \in I \text{ или } \tilde{x} \in P = \bigcap_{j=1}^{n} P_j.$$

Лемма доказана.

Заметим, что в формулировке леммы может быть $\tilde{x}^j = x^j$ для некоторых индексов j.

Если через X_1^1, X_2^1 и X_3^1 обозначим множества решений задач (13), (14) и (15), аналогичные множествам X_1, X_2 и X_3, то имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Если $F_j(x^j)$ и $f_i(x)(j \in I,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$ — выпуклые функции по $x = (x^1,\ \ldots,\ x^j,\ \ldots,\ x^n)$, а $F_j(x^j)$, кроме того, строго, то*

$$X_1^1 \equiv X_2^1 \equiv X_3^1.$$

Доказательство основывается на теореме 1 и лемме 2. Как нетрудно видеть, доказательство $X_2^1 \equiv X_3^1$ полностью совпадает с доказательством $X_2 \equiv X_3$ в теореме 1. Для доказательства $X_1^1 \equiv X_2^1$ достаточно заметить, что если $\bar{x} \in P$, а решением j-той частичной задачи является $\tilde{x}^j$ для $\bar{x}\ (j)$, т. е.

$$\min_{x^j \in P[\bar{x}(j)]} F_j(x^j) = F_j(\tilde{x}^j),$$

то по лемме 2 $(\bar{x}^1,\ \ldots,\ \bar{x}^{j-1},\ \tilde{x}^j,\ \bar{x}^{j+1},\ \ldots,\ \bar{x}^n)$. Далее доказательство $X_1^1 \equiv$ $\equiv X_2^1$ полностью переносится из теоремы 1 для $X_1 \equiv X_2$. Теорема доказана.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
9.X.1967

Литература

1. С. Карлин, Математические методы в теории игр, программировании и экономике, Мир, М., 1964.

2. Р. Ю. Ясилионис, О существовании решений сложных задач математического программирования, Лит. мат. сб., VII, 2 (1967).

APIE VIENOS SUDĖTINGŲ UŽDAVINIŲ KLASĖS PUSIAUSVYROS SRPENDINIŲ SAVYBES

R. JASILIONIS

(*Reziumė*)

Nurodomas ryšys, kuris egzistuoja tarp vienos sudėtingų uždavinių klasės ir jai atitinkančių vektorinės minimizacijos ir parametrinio programavimo uždavinių sprendinių.

THE PROPERTIES OF THE EQUILINIRIUM SOLUTIONS OF ONE CLASS OF THE COMPLEX PROBLEMS

R. JASILIONIS

(*Summary*)

The connection which exist among the solutions of complex, parametric and vector minimizing problems are pointed out.