LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VIII Nr. 1, 1968
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VIII № 1, 1968

УДК – 519.21

ОЦЕНКА УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОЙ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ЗАКОНА

ХОАНГ ХЫУ НЬЫ

Вопросы, связанные с характеризацией распределений, привлекают внимание многих авторов (см. обзор Е. Лукача [1] и статью Ю. В. Прохорова [2]). Однако, прежде чем перейти к практическому использованию характеризаций в статистике, необходимо изучить вопросы, связанные с их устойчивостью. В этом направлении уже выполнено несколько работ [3], [4], [5].

Целью настоящей заметки является оценка устойчивости известной характеризации экспоненциального закона с помощью равенства

$$\mathbf{P}\{\zeta<x+y\mid\zeta\geqslant y\}=\mathbf{P}\{\zeta<x\},$$

а именно будет доказана теорема*.

Теорема. *Если для неотрицательной непрерывно распределенной случайной величины ζ для всех $x\geqslant 0$ и $y\geqslant 0$ имеет место равенство*

$$|\mathbf{P}\{\zeta<x+y\mid\zeta\geqslant y\}-\mathbf{P}\{\zeta<x\}\leqslant\varepsilon, \qquad (1)$$

то найдется такое экспоненциальное распределение $G(x)$, что

$$\operatorname*{Sup}_x|\mathbf{P}\{\zeta<x\}-G(x)\leqslant 2\sqrt{\varepsilon}.$$

Доказательство.

1. $h(x, y)=\mathbf{P}\{\zeta<x+y\mid\zeta\geqslant y\}-\mathbf{P}\{\zeta<x\}$.

2. $\Phi(x)=\mathbf{P}\{\zeta\geqslant x\}$,

тогда (1) можно переписать в более удобном виде

$$\Phi(x+y)=\Phi(y)[\Phi(x)+h(x, y)]. \qquad (2)$$

Используя непрерывность $\Phi(x)$, можно найти такую точку x_0 и такое число λ чтобы имели место равенства

$$\Phi(x_0)=1-\sqrt{\varepsilon}=e^{-\lambda x_0}. \qquad (3)$$

В дальнейшем мы покажем, что за $G(x)$, фигурирующее в теореме, можно взять

$$G(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\geqslant 0\\ 0, & >x<0.\end{cases}$$

---

* Заметка отредактирована и частично сокращена редакцией сборника.

Из (2) следует, что

$$\Phi(x_0)=e^{-\lambda x_0},$$

$$\Phi(2x_0)=e^{-2\lambda x_0}+h(x_0,\ x_0)e^{-\lambda x_0},$$

$$\Phi(3x_0)=e^{-3\lambda x_0}+h(x_0,\ x_0)e^{-2\lambda x_0}+h(2x_0,\ x_0)e^{-\lambda x_0},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\Phi(nx_0)=e^{-n\lambda x_0}+h(x_0,\ x_0)e^{-(n-1)\lambda x_0}+\cdots+h\big((n-1)x_0,\ x_0\big)e^{-\lambda x_0}.$$

Следовательно, при $x=nx_0$, $n=0, 1, 2, \ldots$

$$|\Phi(x)-e^{-\lambda x}|<\varepsilon\frac{e^{-\lambda x_0}}{1-e^{-\lambda x_0}}=\sqrt{\varepsilon}. \tag{4}$$

Из того, что $\Phi(x)$ функция невозрастающая и из (3), (4) следует, что для

$$(n-1)x_0\leqslant x<nx_0 \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

если $\Phi(x)>e^{-\lambda x}$, то

$$0<\Phi(x)-e^{-\lambda x}\leqslant\Phi\big((n-1)\ x_0\big)-e^{-\lambda n x_0}\leqslant$$

$$\leqslant\Phi\big((n-1)\ x_0\big)-e^{-\lambda(n-1)x_0}+e^{-\lambda(n-1)x_0}-e^{-\lambda n x_0}\leqslant 2\sqrt{\varepsilon}, \tag{5}$$

а если $\Phi(x)<e^{-\lambda x}$, то

$$0<e^{-\lambda x}-\Phi(x)\leqslant e^{-\lambda(n-1)x_0}-\Phi(nx_0)\leqslant e^{-\lambda(n-1)x_0}-e^{-\lambda n x_0}+$$

$$+e^{-\lambda n x_0}-\Phi(nx_0)\leqslant 2\sqrt{\varepsilon}. \tag{6}$$

Из (5), (6) и следует утверждение теоремы.

Москва–Ханой

Поступило в редакцию
3.I.1967

Литература

1. E. Lukacs, Characterization of probability distributions by properties of suitable statistics, Proc. Third Berkeley Symp. Math. Statist. Prob., Univ. of Calif. press, 1956, 195–214.

2. Yu. W. Prohorov, Some characterization problems in statistics, Proc. Fifth Berkeley Symp. Math. Statist. Prob., Univ. of Calif. press, 1967.

3. Н. А. Сапогов, „Проблема устойчивости для теоремы Крамера", Изв. АН СССР, 1951, сер. „Математика", № 3, стр. 205–218.

4. Н. А. Сапогов, „О независимых слагаемых суммы случайных величин, распределенных приближенно нормально", „Вестник" ЛГУ, 1959, № 19, вып. 4, стр. 78–105.

5. Хоанг Хыу Ньы, „Об устойчивости некоторых теорем о характеризации нормальной совокупности (Сдано в журнал „Теория вероятностей и ее применение").

VIENO EKSPONENTINIO DĖSNIO CHARAKTERIZACIJOS STABILUMO ĮVERTINIMAS

HOANG HUU NHU

(*Rezium*ė)

Darbe įrodoma, kai ζ yra neneigiamas atsitiktinis dydis, turįs tolydinį pasiskirstymą, ir

$$|\mathbf{P}\{\zeta<x+y\,|\,\zeta\geqslant y\}-\mathbf{P}\{\zeta<x\}|<\varepsilon,$$

ai

$$\inf_{G\in\mathfrak{G}}\sup_x|\mathbf{P}\{\zeta<x\}-G(x)|\leqslant 2\sqrt{\varepsilon};$$

čai $\mathfrak{G}$ yra visų eksponentinių pasiskirstymų aibė.

THE ESTIMATION OF THE STABILITY OF THE CHARACTERIZATION OF THE EXPONENTIAL DISTRIBUTION

HOANG HUU NHU

(*S u m m a r y*)

The result is:
if ζ is nonnegative random variable with continuous distributions and

$$|\mathbf{P}\{\zeta < x + y \mid \zeta \geqslant y\} - \mathbf{P}\{\zeta < x\}| < \varepsilon,$$

then

$$\inf_{G \in \mathfrak{G}} \sup_{x} |\mathbf{P}\{\zeta < x\} - G(x)| \leqslant 2\sqrt{\varepsilon},$$

where $\mathfrak{G}$ is the set of all exponential distributions.