LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VIII Nr. 1, 1968
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VIII № 1, 1968

УДК–519.21

ОДИН КЛАСС ПРЕДЕЛЬНЫХ ТЕОРЕМ ДЛЯ УСЛОВНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

В. Ф. КОЛЧИН

1. Введение. В последние годы появился ряд работ, в которых рассматривались задачи, связанные с размещением частиц по ячейкам. Пусть n частиц размещаются в N ячеек и η_i обозначает число частиц в ячейке с номером i. Будем считать способ размещения частиц по ячейкам заданным, если для всех n и N известно совместное распределение величин $\eta_1, \ldots, \eta_N$, т. е. известны вероятности $\mathbf{P}\{\eta_i=k_i,\ i=1, \ldots, N\}$, где $k_1, \ldots, k_N$ – целые неотрицательные числа и

$$\sum_{k_1+\ldots+k_N=n} \mathbf{P}\{\eta_i=k_i,\ i=1,\ \ldots,\ N\}=1.$$

Подробно исследовался способ размещения частиц, при котором

$$\mathbf{P}\{\eta_i=k_i,\ i=1,\ \ldots,\ N\}=\frac{n!}{N^n k_1!\ldots k_N!},$$

где $k_1+\ \ldots\ +k_N=n$. Реализацией этого способа может служить последовательное размещение частиц, при котором каждая из n частиц попадает независимо от других в любую из N ячеек с равной вероятностью. Этот способ размещения получил название классической задачи о дробинках. Основное внимание при исследовании этого способа размещения уделялось случайным величинам $\mu_r(n, N)$, равным числу ячеек, содержащих ровно r частиц. Оказалось, что случайные величины $\mu_r(n, N)$ при $n, N \to \infty$ ведут себя единообразно и их распределения сближаются либо с нормальным распределением, либо с распределением Пуассона (см. [1], [2], [3]). Для общего способа размещения частиц возникает естественное желание выяснить, от каких свойств совместного распределения случайных величин $\eta_1, \ldots, \eta_N$ зависит такой характер предельного поведения $\mu_r(n, N)$. Это удается установить для следующей довольно общей схемы, охватывающей большой класс размещений частиц по ячейкам, в том числе и классическую задачу о дробинках.

Пусть $\xi_{N1},\ \xi_{N2}, \ldots, \xi_{NN}$ – последовательность серий независимых целочисленных одинаково распределенных в каждой серии случайных величин. Обозначим через $A_{k,r}^{(N)}$ событие, состоящее в том, что ровно k случайных величин в серии с номером N приняли значение r. Введем случайную величину $\mu_r(n, N)$ следующим образом:

$$\mathbf{P}\{\mu_r(n,\ N)=k\}=\mathbf{P}\{A_{k,r}^{(N)} \mid \xi_{N1}+\ldots+\xi_{NN}=n\},$$

где n – некоторое целое число, для которого $\mathbf{P}\{\xi_{N1}+\ \ldots\ +\xi_{NN}=n\}>0$.

Пример 1. Классическая задача о дробинках получается из этой схемы, если случайные величины ξ_{Ni} имеют распределение Пуассона с произвольным параметром. Действительно, при $k_1+\ldots+k_N=n$, где $k_1,\ldots,k_N$ — целые неотрицательные числа

$$\mathbf{P}\{\xi_{N1}=k_1,\ \ldots,\ \xi_{NN}=k_N\mid\xi_{N1}+\ldots+\xi_{NN}=n\}=\frac{n!}{N^n k_1!\ldots k_N!}\,.$$

В физических задачах такое распределение частиц по ячейкам называют статистикой Максвелла—Больцмана.

Пример 2. Пусть ξ_{Ni} с равными вероятностями принимают значения $0,1,\ldots,s$. В этом случае при $k_1+\ldots+k_N=n$, где $k_1,\ldots,k_N$ — целые неотрицательные числа, не превосходящие s,

$$\mathbf{P}\{\xi_{N1}=k_1,\ \ldots,\ \xi_{NN}=k_N\mid\xi_{N1}+\ldots+\xi_{NN}=n\}=\frac{1}{c(n,\ N,\ s)}\,,$$

где $c(n,\ N,\ s)$ — число разбиений n на N целых неотрицательных слагаемых, не превосходящих s. Этому случаю соответствует способ размещения частиц по ячейкам, при котором все возможные размещения имеют одинаковую вероятность, т. е. для целых неотрицательных $k_1,\ \ldots,\ k_N$, не превосходящих s, таких, что $k_1+\ \ldots\ +k_N=n$

$$\mathbf{P}\{\eta_i=k_i,\ i=1,\ \ldots,\ N\}=\frac{1}{c(n,\ N,\ s)}\,.$$

При $n\leqslant s$ число разбиений $c(n,\ N,s)=C_{N+n-1}^{n-1}$ и получающийся способ приводит к статистике Бозе—Эйнштейна.

В настоящей работе получены предельные теоремы (теоремы 1, 2 и 3) из которых следует, что в рассматриваемой общей схеме распределения случайных величин $\mu_r(n,\ N)$ при $n,\ N\to\infty$, как правило, сближаются с нормальным или пуассоновским распределениями. Предельные теоремы в классической задаче о дробинках, а также в условиях примера 2 оказываются частными случаями общих теорем.

Следующая лемма сводит изучение асимптотического поведения случайных величин $\mu_r(n,\ N)$ при $n,\ N\to\infty$ к изучению локальных предельных теорем для независимых слагаемых. Обозначим $\xi_{Ni}^{(r)}$ случайные величины, распределение которых задается следующими вероятностями

$$\mathbf{P}\{\xi_{Ni}^{(r)}=k\}=\mathbf{P}\{\xi_{Ni}=k\setminus\xi_{Ni}\neq r\};$$

обозначим также

$$p_r=\mathbf{P}\{\xi_{Ni}=r\},$$
$$\zeta_N=\xi_{N1}+\ldots+\xi_{NN},$$
$$\zeta_{Nk}^{(r)}=\xi_{N1}^{(r)}+\ldots+\xi_{Nk}^{(r)}.$$

Лемма. *Справедливо равенство*

$$\mathbf{P}\{\mu_r(n,\ N)=k\}=C_N^k p_r^k(1-p_r)^{N-k}\,\frac{\mathbf{P}\{\zeta_{N,N-k}^{(r)}=n-kr\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N=n\}}\,. \qquad (1)$$

Доказательство. Согласно определению $\mu_r(n,\ N)$ имеем

$$\mathbf{P}\{\mu_r(n,\ N)=k\}=\frac{\mathbf{P}\{A_{k,r}^{(N)},\ \zeta_N=n\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N=n\}}\,.$$

Равенство (1) получается с помощью очевидных преобразований числителя этого выражения:

$$\mathbf{P}\{A_{k,r}^{(N)},\ \zeta_N=n\}=C_N^k\ p_r^k\ \mathbf{P}\{\xi_{N1}+\ldots+\xi_{N,\ N-k}=n-kr;\ \xi_{N1}\neq r,\ \ldots,$$
$$\xi_{N,\ N-k}\neq r\}=C_N^k p_r^k(1-p_r)^{N-k}\,\mathbf{P}\{\xi_{N1}+\ldots+\xi_{N,\ N-k}=n-kr\setminus\xi_{N1}\neq r,\ldots,$$
$$\xi_{N,\ N-k}\neq r\}=C_N^k p_r^k(1-p_r)^{N-k}\,\mathbf{P}\{\zeta_{N,\ N-k}^{(r)}=n-kr\}.$$

Из леммы следует, что для получения предельного распределения $\mu_r(n, N)$ достаточно знать поведение сумм независимых слагаемых ζ_N и $\zeta^{(r)}_{N, N-k}$ при $N\to\infty$. В этой работе мы рассмотрим случай, когда для этих сумм справедливы локальные теоремы о сходимости к нормальному распределению.

2. Предельные теоремы. Пусть случайные величины ξ_{Ni} имеют первые и вторые моменты, положим

$$\mathbf{M}\,\xi_{Ni}=\alpha,\quad \mathbf{D}\,\xi_{Ni}=\sigma^2,\quad \mathbf{P}\{\xi_{Ni}=r\}=p_r>0,$$

$$u=\frac{k-Np_r}{\sqrt{Np_r\left(1-p_r-\frac{(\alpha-r)^2}{\sigma^2}p_r\right)}}$$

(зависимость этих характеристик от N в обозначениях не указывается). Как легко подсчитать,

$$\mathbf{M}\,\xi^{(r)}_{Ni}=\frac{\alpha-rp_r}{1-p_r},\quad \mathbf{D}\,\xi^{(r)}_{Ni}=\frac{\sigma^2}{(1-p_r)^2}\left(1-p_r-\frac{(\alpha-r)^2}{\sigma^2}p_r\right).$$

Мы скажем, что для схемы серий $\xi_{N1},\ldots,\xi_{NN}$ выполнено условие А, если существуют

$$\mathbf{M}\,\xi_{Ni},\ \mathbf{D}\,\xi_{Ni},\ p_r>0 \text{ и при } N\to\infty$$

$$\mathbf{P}\{\zeta_N=n\}=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi N}}\,e^{-\frac{(n-\alpha N)^2}{2N\sigma^2}}\left(1+o(1)\right) \tag{2}$$

равномерно относительно $\dfrac{n-\alpha N}{\sigma\sqrt{N}}$ в любом конечном интервале и

$$\mathbf{P}\{\zeta^{(r)}_{N,\,N-k}=n\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi(N-k)\,\mathbf{D}\xi^{(r)}_{Ni}}}\,e^{-\frac{\left(n-(N-k)\,\mathbf{M}\xi^{(r)}_{Ni}\right)^2}{2(N-k)\,\mathbf{D}\xi^{(r)}_{Ni}}}\left(1+o(1)\right) \tag{3}$$

равномерно относительно $\dfrac{n-(N-k)\,\mathbf{M}\xi^{(r)}_{Ni}}{\sqrt{(N-k)\,\mathbf{D}\xi^{(r)}_{Ni}}}$ и u в любых конечных интервалах.

Теорема 1. *Если выполнено условие* А *и* $Np_r(1-p_r)\to\infty$, *то при* $n=\alpha N+ +\beta\sqrt{N}$ *равномерно относительно* u *и* v, *лежащих в любых конечных интервалах,*

$$\mathbf{P}\{\mu_r(n,\ N)=k\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi Np_r\left(1-p_r-\frac{(\alpha-r)^2}{\sigma^2}p_r\right)}}\,e^{-\frac{(u+a)^2}{2}}\left(1+o(1)\right),$$

где

$$a=\frac{\beta(\alpha-r)p_r}{\sigma^2\sqrt{p_r\left(1-p_r-\frac{(\alpha-r)^2}{\sigma^2}p_r\right)}},\quad v=\frac{\beta}{\sigma\sqrt{1-p_r-\frac{(\alpha-r)^2}{\sigma^2}p_r}}.$$

Доказательство. Используя нормальное приближение биномиального распределения, при $Np_r(1-p_r)\to\infty$ имеем:

$$C^k_N p^k_r(1-p_r)^{N-k}=\frac{1}{\sqrt{2\pi Np_r(1-p_r)}}\,e^{-\frac{u^2\left(1-p_r-\frac{(\alpha-r)^2}{\sigma^2}p_r\right)}{2(1-p_r)}}\left(1+o(1)\right) \tag{4}$$

равномерно относительно u в любом конечном интервале, так как

$$\left(1-p_r-\frac{(\alpha-r)^2}{\sigma^2}p_r\right)\Big/(1-p_r)\leqslant 1.$$

В силу условия А

$$\mathbf{P}\{\zeta_N=\alpha N+\beta\sqrt{N}\}=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi N}}e^{-\frac{\beta^2}{2\sigma^2}}\left(1+o(1)\right) \tag{5}$$

равномерно относительно $\frac{\beta}{\sigma}$ в любом конечном интервале. Поскольку

$$\frac{p_r\left(1-p_r-\frac{(\alpha-r)^2}{\sigma^2}p_r\right)}{N(1-p_r)^2}<\frac{1}{N(1-p_r)},$$

то

$$N-k=N(1-p_r)\left(1-u\sqrt{\frac{p_r\left(1-p_r-\frac{(\alpha-r)^2}{\sigma^2}p_r\right)}{N(1-p_r)^2}}\right)=N(1-p_r)\left(1+o(1)\right). \tag{6}$$

Используя условие А, выражения для $\mathbf{M}\xi_{Ni}^{(r)}$ и $\mathbf{D}\xi_{Ni}^{(r)}$, а также соотношение (6), получаем

$$\mathbf{P}\{\zeta_{N,\,N-k}^{(r)}=\alpha N+\beta\sqrt{N}-kr\}=$$

$$=\frac{\sqrt{1-p_r}}{\sigma\sqrt{2\pi N\left(1-p_r-\frac{(\alpha-r)^2}{\sigma^2}p_r\right)}}\,e^{-\frac{u^2(\alpha-r)^2p_r}{2\sigma^2(1-p_r)}-\frac{u(\alpha-r)\beta\sqrt{p_r}}{\sigma^2\sqrt{1-p_r-\frac{(\alpha-r)^2}{\sigma^2}p_r}}-\frac{(1-p_r)\beta^2}{2\sigma^2\left(1-p_r-\frac{(\alpha-r)^2}{\sigma^2}p_r\right)}}\times$$

$$\times\left(1+o(1)\right). \tag{7}$$

Для доказательства равномерности относительно u и v равенств (5) и (7) заметим, что для любого распределения $0\leqslant(\alpha-r)^2p_r/\sigma^2\leqslant 1$. Подставляя оценки (4), (5) и (7) в (1), получаем утверждение теоремы.

Если вместо схемы серий рассмотреть последовательность независимых одинаково распределенных целочисленных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N, \ldots$, то условие А можно заменить условием, достаточным для справедливости соответствующих локальных теорем. Не изменяя обозначений, заменим в определении $\mu_r(n, N)$ случайные величины ξ_{Ni} на ξ_i, а также положим $\xi_i^{(r)}=\xi_{ii}^{(r)}$. Мы скажем, что выполнено условие В, если существуют $\mathbf{M}\xi_i=\alpha$, $\mathbf{D}\xi_i=\sigma^2$, $p_r=\mathbf{P}\{\xi_i=r\}>0$ и распределение случайных величин $\xi_i^{(r)}$ невырождено и имеет максимальный шаг, равный единице. Условие В достаточно для выполнения условия А и теорему 1 можно сформулировать в этом случае следующим образом.

Теорема 2. *Если для последовательности независимых одинаково распределенных целочисленных случайных величин* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N, \ldots$ *выполнено условие* В, *то при* $N\to\infty$ *и* $n=\alpha N+\beta\sqrt{N}$ *равномерно относительно* u *и* a, *лежащих в любых конечных интервалах,*

$$\mathbf{P}\{\mu_r(n, N)=k\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi Np_r\left(1-p_r-\frac{(\alpha-r)^2}{\sigma^2}p_r\right)}}e^{-\frac{(u+a)^2}{2}}\left(1+o(1)\right).$$

где

$$a=\frac{\beta(\alpha-r)p_r}{\sigma^2\sqrt{p_r\left(1-p_r-\frac{(\alpha-r)^2}{\sigma^2}p_r\right)}}.$$

Рассмотрим теперь случай сходимости к распределению Пуассона.

Теорема 3. *Если выполнено условие* А *и при* $N\to\infty$ $n=\alpha N+\beta\sqrt{N}$ *и* $\left(1+\frac{(\alpha-r)^2}{\sigma^2}\right)p_r\to 0$, *то равномерно относительно* $\frac{k-Np_r}{\sqrt{Np_r}}$ *и* $\frac{\beta}{\sigma}$ *в любых конечных интервалах*

$$\mathbf{P}\{\mu_r(n_1 N)=k\}=\frac{1}{k!}(Np_r)^k e^{-Np_r}\left(1+o(1)\right).$$

Доказательство. При выполнении условий теоремы

$$C_N^k p_r^k(1-p_r)^{N-k}=\frac{1}{k!}(Np_r)^k e^{-Np_r}\left(1+o(1)\right),$$

$$\mathbf{P}\{\zeta_N=\alpha N+\beta\sqrt{N}\}=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi N}}e^{-\frac{\beta^2}{2\sigma^2}}\left(1+o(1)\right),$$

$$\mathbf{P}\{\zeta_{N,N-k}^{(r)}=\alpha N+\beta\sqrt{N}-kr\}=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi N}}e^{-\frac{\beta^2}{2\sigma^2}}\left(1+o(1)\right)$$

равномерно относительно $\frac{k-Np_r}{\sqrt{Np_r}}$ и $\frac{\beta}{\sigma}$ в любых конечных интервалах. Подставляя эти оценки в равенство (1), получаем утверждение теоремы.

3. Примеры. Применим теоремы 1 и 3 к описанным в начале работы способам размещения частиц по ячейкам. Для этого покажем, что для последовательностей серий, соответствующих этим способам [размещения, выполняется условие А. Известные локальные предельные теоремы для схем серий не охватывают целиком этих простейших случаев.

Для удобства проверки условия А в случае классической задачи о дробинках выделим следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть* $\xi_{N1},\ldots,\xi_{Nk_N}$ — *последовательность серий независимых целочисленных одинаково распределенных в каждой серии случайных величин с конечными математическими ожиданиями* $\mathbf{M}\xi_{Ni}=\alpha_N$ *и дисперсиями* $\mathbf{D}\xi_{Ni}=\sigma_N^2$, *и пусть для характеристической функции* $f_N(t)$ *распределения случайной величины* ξ_{Ni} *при* $N\to\infty$ *выполнены следующие условия:*

1. *Равномерно относительно* t *в любом конечном интервале*

$$e^{-\frac{it\alpha_N\sqrt{k_N}}{\sigma_N}}f_N^{k_N}\left(\frac{t}{\sigma_N\sqrt{k_N}}\right)\to e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

2. *Существует* $\varepsilon_N>0$ *такое, что при* $0\leqslant|t|\leqslant\varepsilon_N$

$$|f_N(t)|\leqslant e^{-c\sigma_N^2 t^2},$$

где c — *положительная постоянная.*

3. *Для того же* ε_N *при* $\varepsilon_N\leqslant|t|\leqslant\pi$

$$|f_N(t)|\leqslant e^{-c_N},$$

где c_N *таково, что* $\sigma_N\sqrt{k_N}\,e^{-c_N k_N}\to 0$.

Тогда

$$\mathbf{P}\{\xi_{N1}+\ldots+\xi_{Nk_N}=k\}=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi k_N}}e^{-\frac{(k-k_N\alpha_N)^2}{2k_N\sigma_N^2}}\left(1+o(1)\right)$$

равномерно относительно $\frac{k-k_N\alpha_N}{\sigma_N\sqrt{k_N}}$ *в любом конечном интервале.*

Доказательство. Следуя доказательству локальной теоремы, предложенному Б. В. Гнеденко (см., например, [4]) представим вероятность $P_N(k) = \mathbf{P}\{\xi_{N1} + \ldots + \xi_{Nk_N} = k\}$ в виде следующего интеграла

$$P_N(k) = \frac{1}{2\pi\sigma_N\sqrt{k_N}} \int\limits_{-\pi\sigma_N\sqrt{k_N}}^{\pi\sigma_N\sqrt{k_N}} e^{-izx}\left[f_N^*\left(\frac{x}{\sigma_N\sqrt{k_N}}\right)\right]^{k_N} dx,$$

где

$$z = \frac{k - k_N\alpha_N}{\sigma_N\sqrt{k_N}} \quad \text{и} \quad f_N^*(t) = e^{-it\alpha_N} f_N(t).$$

Поскольку

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-izx - \frac{x^2}{2}} dx,$$

то разность

$$R_N = 2\pi\left[\sigma_N\sqrt{k_N}\,P_N(k) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}\right]$$

можно представить в виде суммы четырех интегралов:

$$R_N = I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

где

$$I_1 = \int\limits_{-A}^{A} e^{-izx}\left[\left(f_N^*\left(\frac{x}{\sigma_N\sqrt{k_N}}\right)\right)^{k_N} - e^{-\frac{x^2}{2}}\right] dx,$$

$$I_2 = \int\limits_{A \leqslant |x| \leqslant \varepsilon_N\sigma_N\sqrt{k_N}} e^{-izx}\left[f_N\left(\frac{x}{\sigma_N\sqrt{k_N}}\right)\right]^{k_N} dx,$$

$$I_3 = \int\limits_{\varepsilon_N\sigma_N\sqrt{k_N} \leqslant |x| \leqslant \pi\sigma_N\sqrt{k_N}} e^{-izx}\left[f_N^*\left(\frac{x}{\sigma_N\sqrt{k_N}}\right)\right]^{k_N} dx,$$

$$I_4 = -\int\limits_{A \leqslant |x|} e^{-izx - \frac{x^2}{2}} dx.$$

Используя при оценке интегралов I_1, I_2 и I_3 соответственно условия 1, 2 и 3, получаем, что величину $|R_N|$ при $N \to \infty$ можно сделать сколь угодно малой.

Рассмотрим размещение частиц по ячейкам, описанное в примере 1.

Теорема 5. *Пусть в последовательности серий $\xi_{N1}, \ldots, \xi_{NN}$ независимые случайные величины распределены по закону Пуассона с параметром α. Условие А выполняется при $r = 0$, если $\alpha^2 N \to \infty$; при $r = 1$, если $\alpha^3 N \to \infty$ и при любом $r \geqslant 2$, если $\alpha N \to \infty$.*

Доказательство. Соотношение (2) в этом случае, очевидно, выполняется, так как $\alpha N \to \infty$. Проверим выполнение условия (3). Характеристическая функция $\xi_{Ni}^{(r)}$ равна

$$f_N^{(r)}(t) = \frac{e^{\alpha(e^{it} - 1)} - e^{itr} p_r}{1 - p_r},$$

где

$$p_r = \frac{\alpha^r e^{-\alpha}}{r!}.$$

Покажем, что при $k_N = N(1-p_r)\left(1+o(1)\right)$ для $\xi_{N1}^{(r)}, \ldots, \xi_{Nk_N}^{(r)}$

выполняются условия теоремы 4. Условие 1 равносильно справедливости интегральной предельной теоремы о сходимости к нормальному закону и при условиях теоремы 5 выполняется (при этом для $r=0$ используется условие $\alpha^2 N \to \infty$). Условие 2 при $\varepsilon_N = \varepsilon$, где ε — положительная постоянная, не зависящая от N, проверяется непосредственным вычислением производных $f_N^{(r)}(t)$. Нетрудно проверить, что для $\varphi_r(t) = \log f_N^{(r)}(t)$ выполняются следующие условия:

$$\frac{d^2\varphi_r(0)}{dt^2} = -D\xi_{Ni}^{(r)} = -\frac{\alpha\left(1-p_r-\frac{(\alpha-r)^2}{\alpha}p_r\right)}{(1-p_r)^2}$$

и $\left|\frac{1}{D\xi_{Ni}^{(r)}}\frac{d^3\varphi_r(t)}{dt^3}\right|$ ограничена в окрестности нуля. Отсюда, очевидно, следует выполнение условия 2.

Для проверки условия 3 заметим, что

$$|f_N^{(r)}(t)| \leqslant \frac{e^{-\alpha(1-\cos t)}+p_r}{1-p_r} = e^{-\frac{\alpha(1-\cos t)}{3}}\;\frac{e^{-\frac{2}{3}\alpha(1-\cos t)}+\frac{\alpha^r}{r!}e^{-\frac{2}{3}\alpha\left(1+\frac{1}{2}\cos t\right)}}{1-p_r}.$$

При $\alpha\to\infty$ и $\varepsilon\leqslant|t|\leqslant\pi$ второй множитель стремится к нулю, поэтому можно выбрать α_1 так, что при $\alpha>\alpha_1$ и $\varepsilon\leqslant|t|\leqslant\pi$

$$|f_N^{(r)}(t)| \leqslant e^{-\frac{\alpha(1-\cos t)}{3}} \leqslant e^{-\frac{\alpha\delta_\varepsilon}{3}} = q^\alpha,$$

где

$$0<\delta_\varepsilon\leqslant 1-\cos t, \quad q = e^{-\frac{1}{3}\delta_\varepsilon} < 1.$$

При $\alpha\to 0$

$$|f_N^{(r)}(t)| \leqslant e^{-\alpha(1-\cos t)}\left(1+O(\alpha^r)\right)$$

для $r\geqslant 2$ и

$$|f_N^{(0)}(t)| = \frac{|e^{\alpha e^{it}}-1|}{e^\alpha-1} = 1-\frac{\alpha(1-\cos t)}{2}+O(\alpha^2).$$

Поэтому при $\alpha\to 0$ можно выбрать α_0 так, что при $\alpha<\alpha_0$ и $\varepsilon\leqslant|t|\leqslant\pi$ для всех $r\neq 1$

$$|f_N^{(r)}(t)| \leqslant e^{-\frac{\alpha(1-\cos t)}{3}} \leqslant q^\alpha.$$

При $\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1$ оценка характеристической функции $|f_N^{(r)}(t)|<q^\alpha$, где $0<q<1$, следует из того, что максимальный шаг распределений равен единице и семейство распределений с параметром α, $0<\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1<\infty$ компактно.

Итак, условия теоремы 4 проверены во всех случаях, за исключением условия 3 при $r=1$ и $\alpha\to 0$. Поскольку при $r=1$ и $\alpha\to 0$

$$|f_N^{(1)}(t)| = \frac{|e^{\alpha e^{it}}-\alpha e^{it}|}{-\alpha} = 1-\frac{\alpha^2}{2}(1-\cos 2t)-\frac{\alpha^3}{6}(1-\cos 3t)+O(\alpha^4), \qquad (8)$$

то существуют такие α_0 и q, $0<q<1$, что при $\alpha<\alpha_0$ и $\varepsilon\leqslant|t|\leqslant\pi$

$$|f_N^{(1)}(t)|<q^{\alpha^2}$$

и условие 3 выполняется, если $\alpha^2 N q^{\alpha^3 N}\to 0$. Для того, чтобы показать, что это требование излишне ограничительно и для сходимости к нормальному распределению в этом случае достаточно условия $\alpha^3 N\to\infty$, проведем более точную оценку интеграла I_3 теоремы 4. Представим I_3 как сумму двух интегралов: G_1 область интегрирования которого равна $\{x\colon \varepsilon\sigma_N\sqrt{k_N}\leqslant|x|\leqslant\leqslant(\pi-\delta)\,\sigma_N\sqrt{k_N}\}$ и G_2, область интегрирования которого равна $\{x:(\pi-\delta)\sigma_N\sqrt{k_N}\leqslant|x|\leqslant\pi\sigma_N\sqrt{k_N}\}$, где $\delta>0$ будет выбрано позднее. Из (8) следует, что при $\varepsilon\leqslant|t|\leqslant\pi-\delta$ найдутся α_0 и q, $0<q<1$ такие, что при $\alpha<\alpha_0$

$$|f_N^{(1)}(t)|<q^{\alpha^2}$$

и для G_1 также, как для I_3 в доказательстве теоремы 4, получаем оценку

$$|G_1|<\alpha^2 N e^{-c\alpha^3 N},$$

где

$$c>0.$$

Для оценки G_2 найдем производные $\varphi_1(t)=\log f_N^{(1)}(t)$ в точке π. Нетрудно проверить, что при достаточно малом α

$$\varphi_1(\pi)<-c_1\alpha^3,\qquad \frac{d^2\varphi_1(\pi)}{dt^2}<-c_2\mathbf{D}\xi_{Ni}^{(1)},$$

где c_1 и c_2 некоторые положительные постоянные, и

$$\left|\frac{1}{\mathbf{D}\xi_{Ni}^{(1)}}\;\frac{d^3\varphi_1(t)}{dt^3}\right|$$

ограничена в окрестности π. Отсюда следует, что можно выбрать α_0 и δ так, что при $\alpha<\alpha_0$ и $\pi-\delta\leqslant|t|\leqslant\pi$

$$|f_N^{(1)}(t)|<e^{-c_1\alpha^3 N-\frac{1}{2}c_2\mathbf{D}\xi_{Ni}^{(1)}(\pi-t)^2}.$$

Используя этот результат, для G_2 также, как для I_2 в доказательстве теоремы 4, получаем оценку

$$|G_2|<e^{-c\alpha^3 N},$$

где $c>0$. Это завершает доказательство теоремы 5.

Применяя теоремы 1 и 3 к схеме серий $\xi_{N1},\ldots,\xi_{NN}$ случайных величин, распределенных по закону Пуассона с параметром α, для $\mu_r(\alpha N, N)$ в случае классической задачи о дробинках получаем известные локальные предельные теоремы о сходимости к нормальному и пуассоновскому распределениям во всей области изменения параметра α, где они справедливы ([1], [2], [3]). Исключение составляет лишь случай сходимости к распределению Пуассона при $\alpha\to 0$ для $r=0$ и $r=1$, в котором поведение $\mu_r(\alpha N, N)$ зависит от более тонких свойств распределений и не охватывается теоремами 1 и 3.

Такой подход к классической задаче о дробинках позволяет получить и некоторые новые результаты. Так, поскольку при $r\to\infty$ условие А выполняется и $\left(1+\frac{(\alpha-r)^2}{\alpha}\right)p_r\to 0$ при любом характере изменения α, из теоремы 3 вытекает следующее утверждение.

Теорема 6. *В классической задаче о дробинках при n, N, $r \to \infty$*

$$\mathbf{P}\{\mu_r(n, N) = k\} = \frac{1}{k!}(Np_r)^k e^{-Np_r}\Big(1 + o(1)\Big)$$

равномерно относительно $\frac{k - Np_r}{\sqrt{Np_r}}$ *в любом конечном интервале.*

Обратимся теперь к схеме размещения частиц по ячейкам, приведенной в примере 2. Справедлива следующая теорема.

Теорема 7. *Пусть* $\xi_{N1}, \ldots, \xi_{NN}$ — *последовательность серий независимых случайных величин, принимающих в серии с номером* N *значения* $0, 1, \ldots$ $\ldots, m_N - 1$ *с равными вероятностями. Условие А выполняется для любого* r, *если, начиная с некоторого* N, $m_N \geqslant 4$.

Доказательство. Справедливость соотношения (2) следует из результатов работ [5] и [6].

Для того, чтобы показать, что в этом случае для сумм $\zeta^{(r)}_{Nk_N}$ последовательности серий $\xi^{(r)}_{N1}, \ldots, \xi^{(r)}_{Nk_N}$ при $k_N = N\Big(1 - \frac{1}{m_N}\Big)\Big(1 + o(1)\Big)$ и $m_N \geqslant 4$ имеет место локальное сближение с нормальным распределением, воспользуемся следующим приемом. Введем случайные величины $\nu^{(r)}_{Ni}$ и $\eta^{(r)}_{Ni}$ равенствами

$$\mathbf{P}\{\nu^{(r)}_{Ni} = k\} = \mathbf{P}\{\xi_{Ni} = k \mid \xi^{(r)}_{Ni} < r\}, \quad k = 0, 1, \ldots, r-1;$$

$$\mathbf{P}\{\eta^{(r)}_{Ni} = k\} = \mathbf{P}\{\xi_{Ni} = k \mid \xi^{(r)}_{Ni} > r\}, \quad k = r+1, \ldots, m_N - 1.$$

Тогда

$$\mathbf{P}\{\zeta^{(r)}_{Nk_N} = n\} =$$

$$= \sum_{l=0}^{k_N} C^l_{k_N}(\mathbf{P}\{\xi^{(r)}_{Ni} < r\})^l(\mathbf{P}\{\xi^{(r)}_{Ni} > r\}^{k_N - l}\mathbf{P}\{\nu^{(r)}_{N1} + \ldots + \nu^{(r)}_{Nl} + \eta^{(r)}_{N,l+1} + \ldots + \eta^{(r)}_{Nk_N} = \eta\}.$$

Используя для

$$C^l_{k_N}(\mathbf{P}\{\xi^{(r)}_{Ni} < r\})^l(\mathbf{P}\{\xi^{(r)}_{Ni} > r\})^{k_N - l} = C^l_{k_N}\Big(\frac{r}{m_N - 1}\Big)^l\Big(1 - \frac{r}{m_N - 1}\Big)^{k_N - l}$$

нормальное или пуассоновское приближения и для

$$\mathbf{P}\{\nu^{(r)}_{N1} + \ldots + \nu^{(r)}_{Nl} + \eta^{(r)}_{N,l+1} + \ldots + \eta^{(r)}_{Nk_N} = n\}$$

нормальное приближение, нетрудно показать, что равенство (3) в этом случае выполняется.

Применяя теоремы 1 и 3, получаем следующие утверждения.

Теорема 8. *Пусть n частиц размещены в N ячейках так, что каждое из размещений $k_1, \ldots, k_N$ таких, что $k_1 + \ldots + k_N = n$ и $0 \leqslant k_i \leqslant m_N - 1$, $i = 1, \ldots, N$, равновероятно.*

Тогда при $\frac{N}{m_N} \to \infty$, $m_N \geqslant 4$ *и* $n = \frac{m_N - 1}{2}N + \beta\sqrt{N}$ *равномерно относительно и и* $\frac{\beta}{m_N}$

$$\mathbf{P}\{\mu_r(n, N) = k\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{N}{m_N}\Big(1 - \frac{1}{m_N} - \frac{(\alpha - r)^2}{m_N\sigma^2}\Big)}}\, e^{-\frac{(u+a)^2}{2}}\Big(1 + o(1)\Big),$$

где

$$\alpha = \frac{m_N - 1}{2}, \quad \sigma^2 = \frac{m_N^2 - 2m_N + 3}{12}, \quad a = \frac{\beta(\alpha - r)}{\sigma^2 \sqrt{m_N - 1 - \frac{(\alpha - r)^2}{\sigma^2}}},$$

$$u = \frac{k - \frac{N}{m_N}}{\sqrt{\frac{N}{m_N}\left(1 - \frac{1}{m_N} - \frac{(\alpha - r)^2}{m_N \sigma^2}\right)}};$$

при

$$N \to \infty, \quad m_N \to \infty, \quad n = \frac{m_N - 1}{2} N + \beta \sqrt{N},$$

$$\mathbf{P}\{\mu_r(n, N) = k\} = \frac{1}{k!}\left(\frac{N}{m_N}\right)^k e^{-\frac{N}{m_N}}\left(1 + o(1)\right)$$

равномерно относительно $\frac{m_N k - N}{\sqrt{m_N N}}$ *и* $\frac{\beta}{m_N}$ *в любых конечных интервалах.*

4. Дальнейшие исследования. В работе рассмотрен случай, когда в условии $\xi_{N1} + \ldots + \xi_{NN} = n$ величина $\frac{n - NM\xi_{Ni}}{\sqrt{ND\xi_{Ni}}}$ ограничена. Представляет интерес изучить поведение $\mu_r(n, N)$ при условии, что значения суммы ζ_N выходят в область больших уклонений. Так, изучение размещения частиц по ячейкам, подчиненного статистике Бозе — Эйнштейна не охватывается теоремой 8, так как условие $n = \frac{m_N - 1}{2} N + \beta\sqrt{N}$ в этом случае должно быть заменено условием $n = m_N$, которое приводит к локальным теоремам в области больших уклонений.

Представляет интерес рассмотреть также случаи, когда сумма ζ_N притягивается не к нормальному распределению.

Может оказаться полезным и следующее обобщение схемы на случай не обязательно целочисленных распределений слагаемых. Пусть $\xi_{N1}, \ldots, \xi_{NN}$ последовательность серий независимых одинаково распределенных в каждой серии случайных величин с функцией распределения $F_N(x)$. Обозначим через $A_{k,S}^{(N)}$ событие, состоящее в том, что ровно k случайных величин в серии с номером N примут значения из некоторого измеримого множества S. Случайную величину $\mu_S(A_N, N)$ введем следующим образом:

$$\mathbf{P}\{\mu_S(A_N, N) = k\} = \mathbf{P}\{A_{k,S}^{(N)} \mid \xi_{N1} + \ldots + \xi_{NN} \in A_N\},$$

где A_N — некоторое множество значений суммы $\xi_{N1} + \ldots + \xi_{NN}$ положительной вероятности. Основная лемма принимает в этом случае следующий вид.

Лемма. *Справедливо равенство*

$$\mathbf{P}\{\mu_S(A_N, N) = k\} =$$

$$= C_N^k p_S^k (1 - p_S)^{N-k} \frac{\mathbf{P}\{\xi_{N1}^{(S)} + \ldots + \xi_{N,N-k}^{(S)} + \xi_{N,N-k+1}^{(\bar{S})} + \ldots + \xi_{NN}^{(\bar{S})} \in A_N\}}{\mathbf{P}\{\xi_{N1} + \ldots + \xi_{NN} \in A_N\}},$$

где $p_S = \mathbf{P}\{\xi_{Ni} \in S\}$, $\xi_{Ni}^{(S)}$ *— независимые случайные величины, для которых* $\mathbf{P}\{\xi_{Ni}^{(S)} \in B\} = \mathbf{P}\{\xi_{Ni} \in B \backslash \xi_{Ni} \in \bar{S}\}$ *и* $\bar{S}$ *— дополнение множества* S.

Наконец, весь круг задач, связанных с этой схемой, можно рассматривать для неодинаково распределенных в каждой серии случайных величин.

г. Москва

Поступило в редакцию
2.VI.1967

Литература

1. Б. А. Севастьянов, В. П. Чистяков, Асимптотическая нормальность в классической задаче о дробинках, Теория вероятн. и ее применен., **IX**, 2 (1964), 223–237.

2. Békéssy, On classical occupancy problem, I. Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl., **8**, 1–2 (1963), 59–71.

3. В. Ф. Колчин, Скорость приближения к предельным распределениям в классической задаче о дробинках, Теория вероятн. и ее применен., **XI**, 1 (1966), 144–156.

4. Б. В. Гнеденко, Курс теории вероятностей, Физматгиз, М., 1961.

5. С. Х. Сиражлинов, Т. А. Азларов, Об одной равномерной локальной теореме, Изв. АН Уз ССР, сер. физ.-матем., 1963, № 2, 32–37.

6. А. Г. Постников, Аддитивные задачи с растущим числом слагаемых, Изв. АН СССР, сер. матем., **20**, 1956, № 6, 751–764.

VIENA RIBINIŲ TEOREMŲ KLASĖ SĄLYGINIAMS PASISKIRSTYMAMS

V. KOLČINAS

(*Reziumė*)

Sakykime, $\xi_{N1}, \ldots, \xi_{NN}$ — nepriklausomų atsitiktinių dydžių, įgyjančių sveikas skaitines reikšmes, serijų seka. Dydžiai vienodai pasiskirstę kiekvienoje serijoje. Darbe nagrinėjami atsitiktiniai dydžiai $\mu_r(n, N)$, kurių pasiskirstymas šitoks:

$$P\{\mu_r(n, N) = k\} = P\{A_{k,r}^{(N)} \mid \xi_{N1} + \ldots + \xi_{NN} = n\};$$

čia $A_{k,r}^{(N)}$ — žymi įvykį, kai serijoje N lygiai k atsitiktinių dydžių įgyja reikšmę r. Atsitiktinių dydžių $\mu_r(n, N)$ nagrinėjimas susijęs su nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių dėmenų sumų tyrimu→ serijų schemoje. Ištirtas atvejis, kai šioms sumoms galioja konvergavimo į normalinį dėsnį lokalinė teorema. Parodyta, kad šiuo atveju, kaip taisyklė, $\mu_r(n, N)$ pasiskirstymai, kai n, N и ∞, yra normalinis ir Puassono dėsnis. Ribinės teoremos apie dalelių išsidėstymą ląstelėse seka iš bendrų teoremų.

A CLASS OF LIMIT THEOREMS FOR CONDITIONAL DISTRIBUTIONS

V. KOLCHIN

(*Summary*)

Let $\xi_{N1}, \xi_{N2}, \ldots, \xi_{NN}$ be a sequence of series of integer-valued identecally distributed in each series random variables. We study the random variables $\mu_r(n, N)$ whose distributions are defined as

$$P\{\mu_r(n, N) = k\} = P\{A_{k,r}^{(N)} \mid \xi_{N1} + \ldots + \xi_{NN} = n\}$$

where the event $A_{k,r}^{(N)}$ means thet exactly k random variables out of N-th series are equal to r. The study of $\mu_r(n, N)$ is reduced to a study of sums of identically distributed random variables in case of series. We consider the case in which a local convergence of distributions of the sums to normal law holds. In this case as a rule the distributions of $\mu_r(n, N)$ converge to either normal or Poisson distribution as $n, N \to \infty$. The corresponding limit theorems in the problems concerning the distribution of particles into cells are the particular cases of general theorems obtained in this paper.