LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VIII Nr. 1, 1968
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VIII № 1, 1968

УДК–330.115:62.50

СУЩЕСТВОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНО-РАВНОВЕСНЫХ ТОЧЕК В ЗАДАЧЕ ВЕКТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Э. Й. ВИЛКАС

Рассматривается некоторая двухступенчатая экономико-математическая модель. Предполагается, что оптимизация в первой ступени происходит по нескольким критериям, а оптимум здесь понимается как эффективная точка (см. [1], стр. 253). Во второй ступени целевые функции отнесены к различным самостоятельным органам, и оптимумом здесь поэтому считается равновесная точка.

Более детальную постановку вопросов векторной оптимизации можно найти в работе [2].

В статье доказывается существование (при весьма общих предположениях) эффективно-равновесных решений, а также централизованных и децентрализованных эффективно-равновесных решений.

1. Обозначения и определения

$F(x, z)=\left(F_1(x, z), \ldots, F_n(x, z)\right)$ – вещественнозначная вектор-функция $x \in Z(x)$, зависящая от параметра z;

$f(x, z)=\left(f_1(x, z), \ldots, f_N(x, z)\right)$ – вещественнозначная вектор-функция $z \in X(z)$, зависящая от параметра x;

$(x, z) \in R$;

$z=(z_1, \ldots, z_N)=(z_k, z^k)$;

$z^k=(z_1, \ldots, z_{k-1}, z_{k+1}, \ldots, z_N)$;

$Z^k(x)=\{ z^k : z \in Z(x) \}$;

$Z_k(x, \bar{z}^k)=\{ z_k : (z_k, \bar{z}^k) \in Z(x) \}$.

Задача $\alpha(z)$: найти эффективную точку функции $F(x, z)$ при фиксированном z в множестве $X(z)$;

задача $\beta(z)$: найти точку равновесия функции $f(x, z)$ по $z \in Z(x)$ при фиксированном x. Напомним, что $\bar{z}$ называется точкой равновесия, если

$$f_k(\bar{z})=\max_{z_k \in Z_k(\bar{z}^k)} f_k(z_k, \bar{z}^k)$$

для всех $k=1, \ldots, N$.

Эффективно-равновесная точка (сокращенно ЭР): такая точка $(\bar{x}, \bar{z})$, что $\bar{x}$ является эффективной точкой задачи $\alpha(\bar{z})$, а z – равновесной задачи $\beta(\bar{x})$;

Ux – это такое решение z задачи $\beta(x)$, что x является решением задачи $\alpha(z)$;

Vz – это такое решение x задачи $\alpha(z)$, что z является решением задачи $\beta(x)$;

R^* – множество всех ЭР точек;

$X^* = \{x : (x, z) \in R^*\}$;

$Z^* = \{z : (x, z) \in R^*\}$;

централизованная ЭР точка: эффективная точка функции $F(x, Ux)$ по $x \in X^*$;

децентрализованная ЭР точка: эффективная точка функции $f(Vz, z)$ по $z \in Z^*$.

2. Докажем несколько утверждений об эффективных и равновесных точках.

Вопрос существования эффективных точек решается весьма просто. Но автору неизвестно опубликованное доказательство существования, и поэтому мы его здесь приведем.

Теорема 1. *Пусть $F(x)$ – непрерывная вектор-функция, определенная на непустом замкнутом множестве X счетно-компактного пространства. Тогда множество эффективных точек непусто.*

Доказательство. Берем произвольные $x_0 \in X$. Если x_0 – эффективная точка, то теорема доказана. Пусть она таковой не является. Тогда существует такое $x_1 \in X$, что

$$F_i(x_1) \geqslant F_i(x_0), \quad i = 1, \ldots, n,$$

и для некоторых i выполняется строгое неравенство. Положим

$$K_1 = \{x : F(x) \geqq F(x_1), \ x \in X\}.$$

Очевидно, K_1 замкнуто, $K_1 \subset X$ и непусто.

Далее, либо x_1 – эффективная точка, либо можем построить непустое, замкнутое

$$K_2 = \{x : F(x) \geqq F(x_2), \ x \in X\},$$

причем $K_2 \subset K_1$.

Продолжая этот процесс, мы построим строго монотонную последовательность непустых замкнутых множеств $K_1, K_2, \ldots$

По теореме Кантора (см. [3], стр. 203) предел K этой последовательности есть непустое замкнутое множество.

По построению последовательности все $x \in K$ суть эффективные точки.

В следующей лемме мы обобщим неймановский метод симметризации, который уже использовался в подобной ситуации Х. Никайдо и К. Исода [4] и др.

Лемма. *Пусть Z — замкнутое множество линейного топологического пространства, вещественнозначные функции $\varphi_i(z)$, $i = 1, \ldots, N$, непрерывны на $Z = \{z = (z_1, \ldots, z_N)\}$,*

$$\varphi(z, z') = \sum_i \varphi_i(z'_1, \ldots, z'_{i-1}, z_i, z'_{i+1}, \ldots, z'_N).$$

Точка $\bar{z}$ является равновесной для системы функций $\{\varphi_i(z)\}$, $z \in Z$ тогда и только тогда, когда

$$\varphi(\bar{z}, \bar{z}) = \max_{z \in Z(\bar{z})} \varphi(z, \bar{z}),$$

где

$$Z(\bar{z}) = \left\{ z : (z_i, \bar{z}^i) \in Z \quad \text{для всех} \quad i = 1, \ldots, N \right\}.$$

Доказательство. Если $\bar{z}$ — точка равновесия, то по определению

$$\max_{z_i \in Z_i(\bar{z}^i)} \varphi_i(z_i, \bar{z}^i) = \varphi_i(\bar{z}). \tag{1}$$

Суммируя (1) по i, получаем

$$\sum_i \varphi_i(\bar{z}) = \sum_i \max_{z_i \in Z_i(\bar{z}^i)} \varphi_i(z_i, \bar{z}^i) = \max_{z \in Z(\bar{z})} \sum_i \varphi_i(z_i, \bar{z}^i) = \max_{z \in Z(\bar{z})} \varphi(z, \bar{z}). \tag{2}$$

Но это означает, что

$$\varphi(\bar{z}, \bar{z}) = \max_{z \in Z(\bar{z})} \varphi(z, \bar{z}). \tag{3}$$

Обратно, если верно (3), то верно и (2). А так как в (2) максимум достигается по каждому слагаемому отдельно, то

$$\varphi_i(\bar{z}) = \max_{z_i \in Z_i(\bar{z}^i)} \varphi_i(z_i, \bar{z}^i)$$

для всех i.

3. Займемся непосредственно вопросом существования ЭР точек.

Сначала заметим, что лемма С. Карлина (см. [1], стр. 254) остается в силе и при более общих условиях, в частности, при формулируемых ниже условиях 1) и 2) теоремы 2 (доказательство проводится с очевидными изменениями). По этой лемме для любой эффективной точки $x^0 \in X$ существуют такие

$$\lambda_i \geqslant 0, \ \sum_i \lambda_i = 1,$$

что

$$\max_{x \in X} \sum_i \lambda_i F_i(x) = \sum_i \lambda_i F_i(x^0).$$

Будем говорить при этом, что x^0 *соответствует* весам λ_i.

Теорема 2. *Пусть*

1) R — *замкнутое выпуклое множество локально выпуклого хаусдорфова линейного пространства,*

2) $F_i(x, z)$ *непрерывны по* $(x, z) \in R$ *и строго вогнуты по* $x \in X(x)$ *для каждого* z *и* $i = 1, \ldots, n$,

3) $f_k(x, z_k, z^k)$ *непрерывны по* $(x, z) \in R$ *и вогнуты по* $z_k \in Z_k(x, z^k)$ *для каждого* (x, z^k) *и* $k = 1, \ldots, N$,

4) *для любого* z *существует эффективная точка* $x^0(z)$, *соответствующая некоторым весам* λ_i^0, *не зависящим от* z.

Тогда множество R^* *непусто и замкнуто.*

Доказательство. Положим

$$\varphi_1(x, z, \lambda) = \sum_i \lambda_i F_i(x, z),$$

$$\varphi_{k+1}(x, z) = f_k(x, z), \ k = 1, \ldots, N,$$

$$y = (x, z_1, \ldots, z_N) \in R,$$

$$\varphi(y', y) = \sum \varphi_i(y'_i, y^i).$$

Точка $\bar{y}$ по лемме будет равновесной для системы функций

$$\left\{ \sum \lambda_i F_i,\ f_k \right\},$$

если

$$\varphi(\bar{y},\ \bar{y}) = \max_{y \in R(\bar{y})} \varphi(y,\ \bar{y}). \tag{4}$$

Пусть

$$\Phi(y) = \{y' : \varphi(y',\ y) = \max_{v \in R(y)} \varphi(v,\ y)\}.$$

Любая неподвижная точка $\bar{y}$ отображения Φ удовлетворяет соотношению (4). Существование же неподвижной точки отображения Φ следует из теоремы И. Л. Гликсберга (см. [5], стр. 498). Действительно, Φ является замкнутым отображением в локально выпуклом хаусдорфовом линейном пространстве, переводящем замкнутое выпуклое множество этого пространства R в себя. Кроме того, множество $\Phi(y)$ для любого $y \in R$ в силу вогнутости φ_i по y_i является выпуклым. Следовательно, все условия теоремы И. Л. Гликсберга выполняются.

Итак, для любого λ существует равновесное решение системы $\{\Sigma \lambda_i F_i,$ $f_k\}$, в частности, и для λ^0, удовлетворяющего условию теоремы 4). В силу строгой вогнутости функций $F_i(x)$ максимум в соотношении (4) достигается только для одного x^0, которое при $\lambda = \lambda^0$ по условию 4) является эффективной точкой.

Следовательно,

$$\bar{y} = \left(\bar{x}(\lambda^0),\ \bar{z}(\lambda^0)\right) \in R^*.$$

Замкнутость множества R^* можно установить непосредственно из определения ЭР точек, основываясь на непрерывности F_i и f_k.

Следствие. *Если выполняются условия* 1)–3) *теоремы* 2 *и* R *счетно-компактно, а* R^* *непусто, то существуют централизованная и децентрализованная ЭР точки.*

Доказательство. Множества X^* и Z^*, очевидно, замкнутые и счетно-компактные, а все функции $F_i\left(x,\ U(x)\right)$ и $f_k(Vz,\ z)$ непрерывны по $x \in X^*$ и $z \in Z^*$. Поэтому применима теорема 1, откуда следует справедливость утверждения.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
10.X.1967

Литература

1. С. Карлин, Математические методы в теории игр, программировании и экономике, „Мир", М., 1964.

2. Э. Й. Вилкас, Е. З. Майминас, О принятии сложных решений (постановка и подходы), I Конференция по экономической кибернетике в Батуми в 1966 г., М., 1966.

3. К. Куратовский, Топология, т. I, „Мир", М., 1966.

4. Х. Никайдо, К. Исода, Заметка о бескоалиционных выпуклых играх, в сб. „Бесконечные антагонистические игры", Физматгиз, М., 1963.

5. И. Л. Гликсберг, Дальнейшее обобщение теоремы Какутани о неподвижной точке с приложением к ситуациям равновесия в смысле Нэша, в сб. „Бесконечные антагонистические игры", Физматгиз, М., 1963.

VEKTORINĖS OPTIMIZACIJOS UŽDAVINIO EFEKTYVIŲ-PUSIAUSVYROS TAŠKŲ EGZISTENCIJA

E. VILKAS

(*Reziumė*)

Nagrinėjami du susiję vektorinės optimizacijos uždaviniai, viename iš kurių optimumu laikomas efektyvus taškas, kitame – pusiausvyros taškas. Įrodoma efektyvaus-pusiausvyros taško egzistencija lokališkai iškilioje Hausdorfo tiesinėje erdvėje.

EXISTENCE OF EFFICIENT-EQUILIBRIUM POINT OF VECTOR OPTIMIZATION

E. VILKAS

(*Summary*)

Two connected vector optimization problems are investigated. The efficient point is optimal partial decision in one problem, and the equilibrium point – in the another one. The existence of efficient-equilibrium point is proved in the local convex Hausdorff linear space.