LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VIII Nr. 1, 1968
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VIII № 1, 1968

УДК-511

О ПРЕДЕЛЬНЫХ ЗАКОНАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

А. БАКШТИС

1. Введение. Арифметической называется комплекснозначная функция $f(m)$, областью определения которой является множество всех целых положительных чисел. В дальнейшем речь будет идти главным образом о мультипликативных функциях. Арифметическая функция $f(m)$ называется мультипликативной, если для всех взаимно простых m, n

$$f(mn)=f(m)f(n).$$

Вещественную мультипликативную арифметическую функцию обозначим через $g(m)$.

Через $\nu_n\{\ldots\}$ будем обозначать частоту тех целых положительных чисел $m\leqslant n$, которые удовлетворяют условиям, указанным в скобках. Через p везде обозначаем простое число.

Функцию распределения

$$\varepsilon(x)=\begin{cases}0 & \text{для} \quad x\leqslant 0,\\ 1 & \text{для} \quad x>0,\end{cases}$$

называем вырожденной в нуле.

Пусть функция распределения $\nu_n\{g(m)<x\}$ при $n\to\infty$ сходится к некоторой функции распределения $F(x)$ в каждой точке непрерывности последней. Если $F(x)$ не вырождена в нуле и

$$\nu_n\{g(m)<0\}\to F(0), \tag{1}$$

$$\nu_n\{g(m)\leqslant 0\}\to F(+0),$$

то говорим, что мультипликативная функция $g(m)$ имеет предельный закон распределения $F(x)$. Если же $F(x)=\varepsilon(x)$, выполнение условий (1) не предполагается.

Цель нашей работы состоит в изучении условий существования предельных законов распределения вещественных мультипликативных арифметических функций. П. Эрдёшом [1, 2] эта задача была решена для неотрицательных мультипликативных функций. Им получено, что необходимым и достаточным условием существования предельного невырожденного в нуле закона распределения мультипликативной функции $g(m)\geqslant 0$ является сходимость рядов

$$\sum_p \frac{(g(p)-1)^*}{p}, \quad \sum_p \frac{\left((g(p)-1)^*\right)^2}{p}.$$

Звездочкой обозначается следующая операция

$$x^* = \begin{cases} x & \text{для} \quad |x| \leqslant 1, \\ 1 & \text{для} \quad |x| > 1. \end{cases}$$

В настоящей заметке мы докажем следующие две теоремы.

Теорема 1. *Вещественная мультипликативная арифметическая функция $g(m)$ имеет несимметрический предельный закон распределения тогда и только тогда, когда ряды*

$$\sum_p \frac{(|g(p)|-1)}{p}, \quad \sum_p \frac{\left((|g(p)|-1)^*\right)^2}{p}, \tag{2}$$

$$\sum_{g(p)<0} \frac{1}{p} \tag{3}$$

сходятся и $g(2^\alpha)$ не принимает значение -1 для всех целых $\alpha \geqslant 1$.

Теорема 2. *Если вещественная мультипликативная арифметическая функция $g(m)$ имеет невырожденный в нуле предельный закон распределения, то он является симметрическим тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

а) *ряд $\sum\limits_{g(p)<0} \frac{1}{p}$ расходится,*

б) $g(2^\alpha) = -1$ *для всех целых* $\alpha \geqslant 1$.

2. Аналитический аппарат. Весьма удобным средством для изучения законов распределения мультипликативных арифметических функций является одна модификация преобразования Меллина, предложенная В. М. Золотаревым [3]. Характеристическим преобразованием функции распределения $F(x)$ называется матрица

$$W(t) = \begin{bmatrix} w_0(t) & 0 \\ 0 & w_1(t) \end{bmatrix}$$

с элементами

$$w_r(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_r(x, t)\, dF(x), \quad r = 0, 1,$$

где

$$\varphi_r(x, t) = \begin{cases} |x|^{it} \operatorname{sgn}^r x & \text{для} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{для} \quad x = 0. \end{cases}$$

Функция распределения $F(x)$ в свою очередь однозначно определяется своим характеристическим преобразованием с помощью формулы обращения: если x — точка непрерывности функции распределения $F(x)$, то

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2} c^+ - \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^\infty \operatorname{Im} \{ x^{-it} [w_0(t) + w_1(t)] \} \frac{dt}{t} & \text{для} \quad x > 0, \\ \frac{1}{2} c^- + \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^\infty \operatorname{Im} \{ |x|^{-it} [w_0(t) - w_1(t)] \} \frac{dt}{t} & \text{для} \quad x < 0, \end{cases}$$

где

$$c^+ = \frac{w_0(0)+w_1(0)}{2}, \quad c^- = \frac{w_0(0)-w_1(0)}{2}.$$

Если при $n\to\infty$ предполагать, что функция распределения $F_n(x)$ сходится к некоторой функции распределения $F(x)$ не только в каждой точке непрерывности последней, но и

$$F_n(0)\to F(0), \quad F_n(+0)\to F(+0),$$

то имеет место непрерывное соответствие между $F_n(x)$ и ее характеристическим преобразованием $W_n(t)$. Поэтому при определении предельного закона распределения мультипликативной функции $g(m)$, кроме слабой сходимости, мы включили еще дополнительное условие (1). Оно становится слишком стеснительным, когда предельный закон распределения вырожден в нуле. Так, когда при $n\to\infty$ функция распределения $\nu_n\{g(m)<x\}$ сходится к $\varepsilon(x)$ для любого $x\neq 0$, то при соблюдении условия (1) получаем, что предельный закон распределения существует только тогда, когда

$$\nu_n\{g(m)=0\}\to 1.$$

Между тем, вырожденный в нуле предельный закон распределения в смысле слабой сходимости может иметь и мультипликативные функции, никогда необращающиеся в нуль, например,

$$g(m)=\frac{1}{m}.$$

Поэтому в случае, когда при $n\to\infty$ для любого $x\neq 0$

$$\nu_n\{g(m)<x\}\to\varepsilon(x),$$

естественно от условия (1) отказаться.

При доказательстве теорем 1, 2 воспользуемся методом Г. Деланжа, развитым в [4]. Мультипликативную арифметическую функцию $f(m)$ отнесем классу $\mathfrak{M}_0$, если $|f(m)|\leqslant 1$. Предел

$$\mathbf{M}(f)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m\leqslant n} f(m)$$

в случае его существования называется средним значением функции $f(m)$.

Для элементов характеристического преобразования функции распределения $\nu_n\{g(m)<x\}$ имеем:

$$_nw_r(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_r(x,\ t)\,d\nu_n\{g(m)<x\}=\frac{1}{n}\sum_{m\leqslant n}\varphi_r\Big(g(m),\ t\Big), \qquad r=0,\ 1.$$

Поэтому вопрос о существовании предельных законов распределения мультипликативных арифметических функций на самом деле является вопросом существования непрерывных относительно t средних значений мультипликативных арифметических функций $\varphi_r\Big(g(m),\ t\Big)\in\mathfrak{M}_0$, $r=0,1$. Условия существования среднего значения функций класса $\mathfrak{M}_0$ исследовались Г. Деланжем в [4, 5]. Приведем его теоремы, которые нам в дальнейшем понадобятся.

Теорема A. *Если* $f(m)\in\mathfrak{M}_0$ *и существует* $\mathbf{M}(f)\neq 0$, *то:*

1° *ряд* $\sum_p \frac{1-f(p)}{p}$ *сходится;*

2° $f(2^\alpha)$ *не может принять значение* -1 *при всех целых* $\alpha \geqslant 1$.

Кроме того, имеет место неравенство:

$$\sum_p \frac{1-\mathrm{Re}\, f(p)}{p} \leqslant \ln \frac{1}{|\mathbf{M}(f)|} + B, \tag{4}$$

где B — *абсолютная константа.*

Теорема В. *Если* $g(m) \in \mathfrak{M}_0$ *и ряд*

$$\sum_p \frac{1-f(p)}{p}$$

сходится, то существует среднее значение $\mathbf{M}(f)$ *и*

$$\mathbf{M}(f) = \prod_p \left(1-\frac{1}{p}\right) \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{f(p^\alpha)}{p^\alpha}. \tag{5}$$

$\mathbf{M}(g)$ *не равно нулю, если* $f(2^\alpha)$ *не принимает значение* -1 *при всех целых* $\alpha \geqslant 1$.

Если, кроме того, $f(m)$ *зависит еще от параметра* t *и при каждом простом* p *функции* $f(p^\alpha)$, $\alpha \geqslant 1$, *являются непрерывными относительно* t, *то*

$$\mathbf{M}(f) = \psi(t) \exp\left\{-\sum_p \frac{1-f(p)}{p}\right\}, \tag{6}$$

где $\psi(t)$ — *непрерывная функция.*

3. Доказательство теоремы 1. Так как предельный закон предполагается несимметрическим, то элементы характеристического преобразования предельного закона $w_r(t)$, $r=0,\ 1$ не могут быть тождественно равными нулю. Поэтому существует такое значение $t=t'$, что

$$w_1(t') = c_1, \quad 0 < |c_1| \leqslant 1.$$

А так как

$$w_0(0) = 1 - F(+0) + F(0),$$

то в случае несимметрического закона распределения

$$w_0(0) = c_0, \quad 0 < c_0 \leqslant 1.$$

Далее, из непрерывности функций $w_r(t)$, $r=0,\ 1$ следует существование таких $T_0 > 0$ и $T_1 > 0$, что

$$|w_0(t)| \geqslant \frac{c_0}{2} \text{ для } |t| \leqslant T_0, \tag{7}$$

$$|w_1(t)| \geqslant \frac{|c_1|}{2} \text{ для } |t-t'| \leqslant T_1. \tag{8}$$

Для сокращения записи введем следующие обозначения:

$$K_c = \left\{p : 0 < |g(p)| < \frac{1}{c}\right\},$$

$$K_c^0 = \left\{p : |g(p)| < \frac{1}{c}\right\},$$

$$L_c = \left\{p : \frac{1}{c} \leqslant |g(p)| \leqslant c\right\},$$

$$M_c = \{p : |g(p)| > c\}.$$

Сперва мы покажем, что при некотором $c>1$ сходимость рядов

$$\sum_{p\in K_c^0\cup M_c}\frac{1}{p}, \tag{9}$$

$$\sum_{p\in L_c}\frac{\ln|g(p)|}{p}, \tag{10}$$

$$\sum_{p\in L_c}\frac{\ln^2|g(p)|}{p} \tag{11}$$

и (3), а также существование такого целого положительного α, что $g(2^\alpha)\neq -1$, является необходимым и достаточным условием существования предельного несимметрического закона распределения, а потом установим их равносильность с приведенными в теореме.

Необходимость. Пусть $g(m)$ имеет предельный несимметрический закон распределения. Тогда существуют пределы

$$w_0(t)=\lim_{n\to\infty}{}_nw_0(t)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m\leqslant n}\varphi_0\Bigl(g(m),\ t\Bigr),$$

$$w_1(t)=\lim_{n\to\infty}{}_nw_1(t)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m\leqslant n}\varphi_1\Bigl(g(m),\ t\Bigr)$$

и имеют место (7) и (8). Так как $\varphi_r\Bigl(g(m),\ t\Bigr)\in\mathfrak{M}_0$, $r=0,\ 1$, то из теоремы А следует сходимость рядов

$$\sum_p\frac{1-\varphi_0\bigl(g(p),\ t\bigr)}{p},\qquad |t|\leqslant T_0, \tag{12}$$

$$\sum_p\frac{1-\varphi_1\bigl(g(p),\ t\bigr)}{p},\qquad |t-t'|\leqslant T_1, \tag{13}$$

а из (4) и (7) – неравенство

$$\sum_p\frac{1-\operatorname{Re}\varphi_0\bigl(g(p),\ t\bigr)}{p}\leqslant H,\qquad |t|\leqslant T_0, \tag{14}$$

где величина H не зависит от t. Но тогда сходятся и ряды вещественных и мнимых частей:

$$\sum_p\frac{1-\operatorname{Re}\varphi_0\bigl(g(p),\ t\bigr)}{p},\qquad |t|\leqslant T_0, \tag{15}$$

$$\sum_p\frac{\operatorname{Im}\varphi_0\bigl(g(p),\ t\bigr)}{p},\qquad |t|\leqslant T_0, \tag{16}$$

$$\sum_p\frac{1-\operatorname{Re}\varphi_1\bigl(g(p),\ t\bigr)}{p},\qquad |t-t'|\leqslant T_1. \tag{17}$$

Так как члены (15) ряда неотрицательны, то вместе с ним сходится и любой его отрезок, т. е. при любом $c>1$ сходятся ряды:

$$\sum_{p\in L_c}\frac{1-\cos t\ln|g(p)|}{p},\qquad |t|\leqslant T_0, \tag{18}$$

$$\sum_{p \in K_c \cup M_c} \frac{1-\cos t \ln |g(p)|}{p}, \qquad |t| \leqslant T_0, \tag{19}$$

$$\sum_{g(p)=0} \frac{1}{p}. \tag{20}$$

При $p \in L_c$ и значениях t, удовлетворяющих условию

$$|t| \leqslant \min\{T_0, \frac{1}{\ln c} \ln c\},$$

имеем:

$$\big| t \ln |g(p)| \big| \leqslant \min\{T_0 \ln c, \ 1\} \leqslant 1.$$

А так как при $|x| \leqslant 1$ имеет место неравенство

$$1-\cos x \geqslant \frac{x^2}{4},$$

то из сходимости ряда (18) следует сходимость ряда (11).

Далее, из (14) следует, что

$$\sum_{p \in K_c \cup M_c} \frac{1-\cos t \ln |g(p)|}{p} \leqslant H, \qquad |t| \leqslant T_0,$$

откуда, взяв среднее значение обеих сторон последнего неравенства в интервале $(0, T_0)$, находим, что

$$\sum_{p \in K_c \cup M_c} \frac{1}{p} \left[1 - \frac{\sin T_0 \ln |g(p)|}{T_0 \ln |g(p)|}\right] \leqslant H.$$

В этом неравенстве

$$\big| T_0 \ln |g(p)| \big| \geqslant T_0 \ln c > 0,$$

поэтому

$$1 - \frac{\sin T_0 \ln |g(p)|}{T_0 \ln |g(p)|} \geqslant c_3 > 0,$$

а отсюда следует сходимость ряда

$$\sum_{p \in K_c \cup M_c} \frac{1}{p}. \tag{21}$$

Наконец, сходимость рядов (20) и (21) влечет за собой сходимость ряда (9).

Далее, для установления сходимости ряда (10) воспользуемся сходимостью (16) ряда. Так как

$$\sum_{p \in L_c} \frac{\sin t \ln |g(p)|}{p} = \sum_{p} \frac{\operatorname{Im} \varphi_0\big(g(p), t\big)}{p} - \sum_{p \in K_c \cup M_c} \frac{\sin t \ln |g(p)|}{p},$$

а ряды в правой стороне сходятся, то ряд

$$\sum_{p \in L_c} \frac{\sin t \ln |g(p)|}{p}, \qquad |t| \leqslant T_0,$$

тоже сходится. Отсюда, так как при $|x| \leqslant 1$ имеет место неравенство

$$|x - \sin x| \leqslant \frac{x^2}{6},$$

следует сходимость ряда (10).

Теперь покажем, что из существования $w_1(t)$, тождественно неравного нулю, следует сходимость ряда (3). Прежде всего из сходимости ряда с неотрицательными членами (17) следует сходимость ряда

$$\sum_{-c\leqslant g(p)\leqslant -\frac{1}{c}} \frac{1-\cos t\ln|g(p)|\operatorname{sgn} g(p)}{p} =$$

$$= \sum_{-c\leqslant g(p)\leqslant -\frac{1}{c}} \frac{1+\cos t\ln|g(p)|}{p}, \quad |t-t'|\leqslant T_1,$$

при любом $c>1$. Отсюда в силу неравенства

$$1-\cos x\leqslant \frac{x^2}{2}$$

заключаем, что сходится и ряд

$$\sum_{-c\leqslant g(p)\leqslant -\frac{1}{c}} \frac{2-\frac{t^2}{2}\ln^2|g(p)|}{p}, \qquad |t-t'|\leqslant T_1.$$

А так как сходимость ряда (11) уже установлена, то отсюда видно, что ряд

$$\sum_{-c\leqslant g(p)\leqslant -\frac{1}{c}} \frac{1}{p}$$

сходится. Это и сходимость ряда (9) влечет за собой сходимость ряда (3). Так как $\mathbf{M}(\varphi_1)\neq 0$ при $t=t'$, то по теореме А $\varphi_1\left(g(2^\alpha),\ t'\right)$ не может принять значение -1 при всех целых $\alpha\geqslant 1$. Поэтому и $g(2^\alpha)$ не может равняться -1 при всех целых $\alpha\geqslant 1$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть при некотором $c>1$ сходятся ряды (3), (9), (10), (11) и при некоторых целых $\alpha\geqslant 1$ имеет место неравенство $g(2^\alpha)\neq -1$. Ясно, что эти ряды сходятся и для мультипликативной арифметической функции

$$g_A(m)=|g(m)|^A\operatorname{sgn} g(m), \qquad A>0,$$

но с другими границами суммирования:

$$c'=c^A.$$

Так как элементы характеристического преобразования закона распределения функции $g_A(m)$ равны ${}_nw_r(At)$, $r=0,\ 1$, то отсюда видно, что $g(m)$ и $g_A(m)$ имеют предельные законы распределения только одновременно. Воспользовавшись вышесказанным, мы можем в рядах (9), (10) и (11) брать любое $c>1$.

Для любого фиксированного $T>0$ при $|t|\leqslant T$ ряд

$$\sum_{p\in K_c^0\cup M_c} \frac{1-\varphi_0\left(g(p),\ t\right)}{p}$$

сходится равномерно, так как он мажорируется сходящимся рядом

$$\sum_{p\in K_c^0\cup M_c} \frac{2}{p}.$$

Если взять $c=\exp\frac{1}{T}$, то каким бы ни был $T>0$, при $p\in L_c$ и $|t|\leqslant T$ выполняется неравенство

$$\bigl|t\ln|g(p)|\bigr|\leqslant 1.$$

Поэтому если иметь в виду, что

$$\frac{1-\varphi_0\bigl(g(p),\,t\bigr)}{p}=-it\,\frac{\ln|g(p)|}{p}+\frac{1-\cos t\ln|g(p)|}{p}+$$
$$+i\left[\frac{t\ln|g(p)|}{p}-\frac{\sin t\ln|g(p)|}{p}\right],$$

то не составляет труда убедиться в том, что ряд

$$\sum_{p\in L_c}\frac{1-\varphi_0\bigl(g(p),\,t\bigr)}{p}$$

сходится равномерно при $|t|\leqslant T$.

Таким образом, ряд

$$\sum_{p}\frac{1-\varphi_0\bigl(g(p),\,t\bigr)}{p}$$

сходится равномерно в любом сегменте $[-T,\,T]$. Кроме того, функции $\varphi_0\bigl(g(p^\alpha),\,t\bigr)$ являются непрерывными для любого простого p и любого целого $\alpha\geqslant 1$, а для тех же α не может выполняться равенство $\varphi_0\bigl(g(2^\alpha),\,0\bigr)=-1$.

Тогда, согласно теореме B, существует непрерывная функция

$$w_0(t)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m\leqslant n}\varphi_0\bigl(g(m),\,t\bigr)$$

и $w_0(0)\neq 0$.

Таким же способом доказывается и равномерная сходимость ряда

$$\sum_{p}\frac{1-\varphi_1\bigl(g(p),\,t\bigr)}{p}$$

в любом сегменте $[-T,\,T]$. А так как функции $\varphi_1\bigl(g(p^\alpha),\,t\bigr)$ непрерывны для любого простого p и любого целого $\alpha\geqslant 1$, а также найдется такое значение $t=t'$, что для всех $\alpha\geqslant 1$ не будет иметь место равенство

$$\varphi_1\bigl(g(2^\alpha),\,t'\bigr)=-1,$$

то согласно теореме B существует непрерывная функция

$$w_1(t)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m\leqslant n}\varphi_1\bigl(g(m),\,t\bigr)$$

и $w_1(t')\neq 0$. Тем самым доказано существование предельного несимметрического закона распределения.

Теперь, следуя П. Эрдёшу [1], остается только доказать равносильность условий (9), (10), (11) и (2). Как уже заметили, в условиях (9), (10) и (11) без уменьшения общности можно брать любое число $c>1$. Пусть $c=\frac{3}{2}$. Так как при $\frac{2}{3}\leqslant|x|\leqslant\frac{3}{2}$ имеют место неравенства

$$(|x|-1)^2\leqslant\ln^2|x|\leqslant 2(|x|-1)^2,$$

то ряд (11) сходится только вместе с рядом

$$\sum_{p\in L_{\frac{3}{2}}} \frac{(|g(p)|-1)^2}{p}.$$

Далее, при $p\in L_{\frac{3}{2}}$ имеет место разложение:

$$\ln|g(p)|=|g(p)|-1-\frac{1}{2}\left(|g(p)|-1\right)^2+\frac{1}{3}\left(|g(p)|-1\right)^3-\cdots$$

Поэтому

$$\sum_{p\in L_{\frac{3}{2}}} \frac{\ln|g(p)|}{p}=\sum_{p\in L_{\frac{3}{2}}} \frac{|g(p)|-1}{p}+\sum_{p\in L_{\frac{3}{2}}}\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{(|g(p)|-1)^2}{p}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3}\cdot\frac{(|g(p)|-1)^3}{p}-\cdots\right].$$

А так как

$$\left|\sum_{p\in L_{\frac{3}{2}}}\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{(|g(p)|-1)^2}{p}+\frac{1}{3}\cdot\frac{(|g(p)|-1)^3}{p}-\cdots\right]\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{p\in L_{\frac{3}{2}}}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{(|g(p)|-1)^2}{p}+\frac{1}{2^2}\cdot\frac{(|g(p)|-1)^2}{p}+\cdots\right]=$$

$$=\sum_{p\in L_{\frac{3}{2}}}\frac{(|g(p)|-1)^2}{p},$$

то из сходимости рядов (10) и (11) следует сходимость рядов

$$\sum_{p\in L_{\frac{3}{2}}}\frac{|g(p)|-1}{p},\qquad \sum_{p\in L_{\frac{3}{2}}}\frac{(|g(p)|-1)^2}{p}$$

и обратно. Наконец, из соотношения

$$\sum_{p}\frac{(|g(p)|-1)^*}{p}=\sum_{\frac{3}{2}<|g(p)|\leqslant 2}\frac{|g(p)|-1}{p}+\sum_{|g(p)|>2}\frac{1}{p}+$$

$$+\sum_{|g(p)|<\frac{2}{3}}\frac{|g(p)|-1}{p}+\sum_{p\in L_{\frac{3}{2}}}\frac{|g(p)|-1}{p}$$

и аналогичного соотношения для

$$\sum_{p}\frac{\left((|g(p)|-1)^*\right)^2}{p}$$

получаем требуемую равносильность условий. Теорема доказана полностью.

4. Доказательство теоремы 2. Сперва докажем следующую лемму.

Пусть a_n, $n=1, 2, 3, \cdots$ — любая последовательность положительных чисел.

Лемма. *Функция распределения* $\nu_n\{a_n g(m)<x\}$ *при* $n\to\infty$ *сходится к* $\varepsilon(x)$ *для любого* $x\neq 0$ *тогда и только тогда, когда имеет место сходимость* $\nu_n\{a_n|g(m)|<x\}\to\varepsilon(x)$, $x\neq 0$.

Доказательство. Так как

$$\nu_n\{a_n|g(m)|<x\}=\begin{cases}0 & \text{для} \quad x\leqslant 0,\\ \nu_n\{a_n g(m)<x\}-\nu_n\{a_n g(m)\leqslant -x\} & \text{для} \quad x>0,\end{cases}$$

то необходимость очевидна.

Пусть для любого $x\neq 0$ при $n\to\infty$ имеет место сходимость $\nu_n\{a_n|g(m)|<x\}\to\varepsilon(x)$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ при $n\to\infty$

$$\nu_n\left\{a_n|g(m)|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right\}\to 0.$$

Так как

$$\nu_n\left\{a_n\,\big||g(m)|-g(m)\big|\geqslant\varepsilon\right\}=\nu_n\{2a_n|g(m)|\geqslant\varepsilon, \quad g(m)<0\}\leqslant$$
$$\leqslant\nu_n\left\{a_n|g(m)|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right\},$$

то функции

$$g_n(m)=a_n|g(m)|, \qquad h_n(m)=a_n g(m)$$

удовлетворяют условиям леммы 4.1 из [6]. Поэтому $\varepsilon(x)$ является предельным законом распределения также и для $a_n g(m)$.

Теперь приступим к доказательству теоремы 2. В том случае, когда предельный симметрический закон распределения является собственным, элементы его характеристического преобразования должны удовлетворять условиям:

$$w_0(0)\neq 0,$$
$$w_1(t)=0, \quad -\infty<t<+\infty.$$

Если мультипликативная функция $g(m)$ имеет невырожденный в нуле предельный закон распределения, то по доказанной лемме $|g(m)|$ тоже имеет невырожденный в нуле предельный закон распределения. Так как последний закон распределения заведомо не симметрический, а элемент характеристического преобразования ${}_n w_0(t)$ для этих обеих мультипликативных функций одинаковый, то по теореме 1 ряды (9) и (11) сходятся для любого $c>1$.

Необходимость. Пусть $g(m)$ имеет собственный симметрический предельный закон распределения. Тогда сходятся ряды (9), (11) и

$$w_1(t)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m\leqslant n}\varphi_1\big(g(m),\ t\big)=0, \qquad -\infty<t<+\infty. \tag{22}$$

Из (22) следует, что выполняется одно из условий [5]:
или

$$1^\circ \quad \sum_p\frac{1-\operatorname{Re}\varphi_1\big(g(p),\ t\big)}{p}=+\infty, \quad -\infty<t<+\infty, \tag{23}$$

или

$$2^\circ \quad \varphi_1\big(g(2^\alpha),\ t\big)=-1, \quad -\infty<t<+\infty, \tag{24}$$

для всех целых $\alpha \geqslant 1$.

В упомянутой статье условия 1°, 2° приведены без доказательства. Доказать их можно следующим путем. Пусть мультипликативная функция $f(m) \in \mathfrak{M}_0$ имеет среднее значение $\mathbf{M}(f) = 0$. Тогда при $s > 1$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = s \int_1^{\infty} \left\{ \sum_{n \leqslant t} f(n) \right\} \frac{dt}{t^{1+s}} = s \int_1^{T} \left\{ \sum_{n \leqslant t} f(n) \right\} \frac{dt}{t^{1+s}} +$$

$$+ s \int_T^{\infty} \left\{ \sum_{n \leqslant t} f(n) \right\} \frac{dt}{t^{1+s}}.$$

Так как для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $T > 0$, что

$$\left| \sum_{n \leqslant t} f(n) \right| < \varepsilon t \quad \text{для} \quad t \geqslant T,$$

то имеет место оценка

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \right| < \frac{s}{s-1} \left(1 - \frac{1-\varepsilon}{T^{s-1}} \right),$$

в силу которой для $s > 1$ имеем

$$\left| \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \right| < \frac{s}{\zeta(s)(s-1)} \left(1 - \frac{1-\varepsilon}{T^{s-1}} \right).$$

Поэтому

$$0 \leqslant \varliminf_{s \to +1} \left| \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \right| \leqslant \varlimsup_{s \to +1} \left| \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \right| \leqslant \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ любой, то

$$\lim_{s \to +1} \left| \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \right| = 0.$$

Теперь по формуле (9) из [4] имеем, что

$$\frac{1}{2} \left| \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{f(2^\alpha)}{2^\alpha} \right| \exp \left\{ - \sum_p \frac{1 - \operatorname{Re} f(p)}{p} + \gamma \right\} = 0,$$

где

$$|\gamma| \leqslant \sum_{p > 2} \frac{2}{p(p-2)} + 1.$$

Поэтому имеет место хотя бы одно из следующих условий

$$\sum_p \frac{1 - \operatorname{Re} f(p)}{p} = +\infty,$$

или

$$\sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{f(2^\alpha)}{2^\alpha} = 0.$$

Так как последнее равенство имеет место тогда и только тогда, когда $(2^\alpha) = -1$ для всех целых $\alpha \geqslant 1$, то условия 1°, 2° доказаны.

Далее, ряд (23) можно разложить на три ряда

$$\sum_p \frac{1-\operatorname{Re}\varphi_1\big(g(p),\,t\big)}{p}=\sum_{p\in K_c^0\cup M_c}\frac{1-\operatorname{Re}\varphi_1\big(g(p),\,t\big)}{p}+$$

$$+\sum_{\frac{1}{c}\leqslant g(p)\leqslant c}\frac{1-\cos t\ln|g(p)|}{p}+\sum_{-c\leqslant g(p)\leqslant-\frac{1}{c}}\frac{1+\cos t\ln|g(p)|}{p}.$$

Первый из них мажорируется сходящимся рядом

$$\sum_{p\in K_c^0\cup M_c}\frac{2}{p}.$$

Второй же в силу неравенства

$$1-\cos x\leqslant\frac{x^2}{2}$$

мажорируется сходящимся рядом

$$\frac{t^2}{2}\sum_{p\in L_c}\frac{\ln^2|g(p)|}{p}$$

при $|t|\leqslant T$ для любых $T>0$ и $c>1$. Поэтому из очевидного неравенства

$$\sum_{-c\leqslant g(p)\leqslant-\frac{1}{c}}\frac{1+\cos t\ln|g(p)|}{p}\leqslant 2\sum_{g(p)<0}\frac{1}{p}$$

следует расходимость ряда (3).

Если же $g(m)$ удовлетворяет условию (24), то $g(2^\alpha)=-1$ для всех целых $\alpha\geqslant 1$.

Достаточность. Пусть мультипликативная арифметическая функция $g(m)$ имеет невырожденный в нуле предельный закон распределения и выполняется хотя бы одно из условий а), б).

Если ряд (3) расходится, то в силу неравенства

$$\sum_p\frac{1-\operatorname{Re}\varphi_1\big(g(p),\,t\big)}{p}\geqslant 2\sum_{g(p)<0}\frac{1}{p}-2\sum_{p\in K_c^0\cup M_c}\frac{1}{p}-\frac{t^2}{2}\sum_{p\in L_c}\frac{\ln^2|g(p)|}{p}$$

ряд (23) тоже расходится при $|t|\leqslant T$ для любого $T>0$. В силу этого должно иметь место (22). Действительно, если существует такое значение $t=t'$, что $w_1(t')\neq 0$, тогда по теореме А ряд (23) сходится, что приводит к противоречию.

Если же $g(2^\alpha)=-1$ для всех целых $\alpha\geqslant 1$, то $\varphi_1\big(g(2^\alpha),\,t\big)=-1$ тоже для всех t и всех целых $\alpha\geqslant 1$. Тогда имеет место (22), так как в противном случае по теореме А $\varphi_1\big(g(2^\alpha),\,t\big)$ не может принять значение -1 для всех целых $\alpha\geqslant 1$, что противоречит нашему условию.

Теорема доказана.

5. Характеристическое преобразование предельного закона распределения. Если мультипликативная арифметическая функция $g(m)$ имеет предельный закон распределения, то теорема В позволяет написать элементы его характеристического преобразования. Для несимметрического предельного закона распределения они равны

$$w_r(t)=\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{\varphi_r\big(g(p^\alpha),\ t\big)}{p^\alpha},\qquad r=0,\ 1,$$

а для симметрического собственного закона распределения —

$$w_0(t)=\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{\varphi_0\big(g(p^\alpha),\ t\big)}{p^\alpha},$$

$$w_1(t)=0,\qquad -\infty<t<+\infty.$$

6. Примеры. 1. Пусть $\omega(m)$ означает число различных простых делителей m и $\Omega(m)$ — число всех простых делителей m, причем кратные делители считаются столько раз, какова их кратность. Мультипликативная функция

$$g(m)=(-1)^{\Omega(m)-\omega(m)}$$

удовлетворяет условиям теоремы 1 и поэтому обладает несимметрическим предельным законом распределения. Элементы характеристического преобразования предельного закона распределения равны:

$$w_0(t)=1,$$

$$w_1(t)=\prod_p\left\{1-\frac{2}{p(p+1)}\right\}.$$

Так как $g(m)$ принимает только два значения -1 и 1, то

$$\lim_{n\to\infty}\nu_n\{g(m)=-1\}=\frac{w_0(0)-w_1(0)}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\prod_p\left\{1-\frac{2}{p(p+1)}\right\},$$

$$\lim_{n\to\infty}\nu_n\{g(m)=1\}=\frac{w_0(0)+w_1(0)}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\prod_p\left\{1-\frac{2}{p(p+1)}\right\}.$$

2. Мультипликативная функция

$$g(m)=\frac{\sigma(m)}{m}\prod_{p\backslash m}\operatorname{sgn}(p-p_0),$$

где $\sigma(m)$ — сумма всех положительных делителей m, а $p_0>2$ — любое фиксированное простое число, тоже обладает предельным несимметрическим законом распределения, хотя для предельной функции распределения $F(x)$ имеем:

$$F(0)=\frac{w_0(0)-w_1(0)}{2}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p_0}\right),$$

$$F(+0)-F(0)=1-w_0(0)=\frac{1}{p_0},$$

$$1-F(+0)=\frac{w_0(0)+w_1(0)}{2}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p_0}\right).$$

3. Для функции Мёбиуса $\mu(m)$ имеем:

$${}_nw_0(t)=\frac{1}{n}\sum_{m\leqslant n}|\mu(m)|=\frac{6}{\pi^2}+o(1),$$

$${}_nw_1(t)=\frac{1}{n}\sum_{m\leqslant n}\mu(m),$$

$$\sum_p\frac{1-\mu(p)}{p}=+\infty.$$

Поэтому, если предполагать, что при $n \to \infty$

$$\frac{1}{n} \sum_{m \leq n} \mu(m)$$

сходится к некоторому пределу, то по теореме 2 он будет равен 0, а это, как известно, имеет место.

4. Мультипликативная функция

$$g(m) = \frac{\mu(m)}{m^s}, \qquad s > 0,$$

имеет предельный закон распределения, вырожденный в нуле, так как таким предельным законом распределения обладает $|g(m)|$.

В заключение пользуюсь случаем поблагодарить Й. П. Кубилюса за предложение данной темы и руководство моей работой, а также В. М. Золотарева за просмотр рукописи и ценные замечания.

Каунасский Политехнический институт

Поступило в редакцию 1.VII.1967

Литература

1. P. Erdős, Some remarks about additive and multiplicative functions, Bull. Amer. Math. Soc., 1946, **52**, 527–537.
2. P. Erdős, Some remarks and corrections to one of my papers, Bull. Amer. Math. Soc., 1947, **53**, 761–763.
3. В. М. Золотарев, Общая теория перемножения независимых случайных величин, ДАН СССР, 1962, **142**, № 4, 788–791.
4. H. Delange, Sur les fonctions arithmétiques multiplicatives, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 3e série, 1961, **78**, 273–304.
5. H. Delange, Distribution des valeures des certaines fonctions arithmétiques, Seminaire Delange-Pisot (Théorie des nombres), 2e année, 1960–61, № 2, 2-01–2-25.
6. Й. Кубилюс, Вероятностные методы в теории чисел, Вильнюс, 1962.

MULTIPLIKATYVINIŲ ARITMETINIŲ FUNKCIJŲ RIBINIŲ PASISKIRSTYMO DĖSNIŲ KLAUSIMU

A. BAKŠTYS

(Reziumė)

Sakykime, $g(m)$ yra reali multiplikatyvinė aritmetinė funkcija.

Pažymėkime: $\nu_n\{\ldots\}$ – dažnumą sveikų teigiamų skaičių $m \leq n$, kurie patenkina skliaustuose nurodytą sąlygą;

p – pirminį skaičių

$$x^* = \begin{cases} x, & \text{kai } |x| \leq 1, \\ 1, & \text{kai } |x| > 1; \end{cases}$$

$$\varphi_r(x, t) = \begin{cases} |x|^{it} \operatorname{sgn}^r x, & \text{kai } x \neq 0, \\ 0, & \text{kai } x = 0, \quad r = 0, 1; \end{cases}$$

$$w_r(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_r(x, t)\, dF(x), \quad r = 0, 1;$$

$W(t)=\begin{bmatrix} w_0(t) & 0 \\ 0 & w_1(t) \end{bmatrix}$ – pasiskirstymo funkcijos $F(x)$ c harakteringąją transformaciją.

Jeigu pasiskirstymo funkcija $\nu_n\{g(m)<x\}$, kai $n\to\infty$, konverguoja prie kurios nors pasiskirstymo funkcijos $F(x)$ ne tik silpnai, bet, esant $F(+0)-F(0)\neq 1$, ir

$$\nu_n\{g(m)<0\}\to F(0),$$
$$\nu_n\{g(m)\leqslant 0\}\to F(+0),$$

tai sakome, kad $F(x)$ yra multiplikatyvinės funkcijos $g(m)$ ribinis pasiskirstymo dėsnis.

Įrodomos šios teoremos.

1 teorema. *Reali multiplikatyvinė aritmetinė funkcija $g(m)$ turi nesimetrišką ribinį pasiskirstymo dėsnį tada ir tik tada, kai eilutės*

$$\sum_p \frac{(|g(p)|-1)^*}{p},\qquad \sum_p \frac{\left((|g(p)|-1)^*\right)^2}{p},\qquad \sum_{g(p)<0}\frac{1}{p}$$

konverguoja ir $g(2^\alpha)$ nelygi -1 visiems sveikiems $\alpha\geqslant 1$.

Ribinio dėsnio, kai jis egzistuoja, charakteringosios transformacijos elementai yra lygūs

$$w_r(t)=\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{\varphi_r\left(g(p^\alpha),t\right)}{p^\alpha},\qquad r=0,\ 1.$$

2 teorema. *Jeigu reali multiplikatyvinė aritmetinė funkcija $g(m)$ turi ne vienetinį ribinį pasiskirstymo dėsnį, tai jis yra simetriškas tada ir tik tada, kai yra išpildoma nors viena iš šių sąlygų:*

a) *eilutė* $\sum_{g(p)<0}\frac{1}{p}$ *diverguoja,*

b) $g(2^\alpha)=-1$ *visiems sveikiems* $\alpha\geqslant 1$.

Ribinio dėsnio, kai jis yra simetriškas, charakteringosios transformacijos elementai yra lygūs

$$w_0(t)=\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{\varphi_0\left(g(p^\alpha),t\right)}{p^\alpha},$$
$$w_1(t)=0,\qquad -\infty<t<+\infty.$$

Šios teoremos įrodytos H. Delanžo metodu [4].

ÜBER DIE GRENZVERTEILUNGEN VON MULTIPLIKATIVEN ZAHLENTHEORETISCHEN FUNKTIONEN

A. BAKŠTYS

(*Zusammenfassung*)

Sei $g(m)$ eine reellwertige multiplikative zahlentheoretische Funktion.

Bezeichnungen: $\nu_n\{\ldots\}$ – Häufigkeit der ganzen positiven Zahlen $m\leqslant n$, die die in Klammern hingewiesenen Bedingungen genügen:

p – eine Primzahl;

$$x^*=\begin{cases} x & \text{für } |x|\leqslant 1,\\ 1 & \text{für } |x|>1;\end{cases}$$

$$\varphi_r(x,t)=\begin{cases} |x|^{it}\operatorname{sgn}^r x & \text{für } x\neq 0,\\ 0 & \text{für } x=0,\end{cases}\qquad r=0,\ 1;$$

$$w_r(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_r(x,t)\,dF(x),\qquad r=0,\ 1;$$

$W(t)=\begin{bmatrix} w_0(t) & 0 \\ 0 & w_1(t) \end{bmatrix}$ — die charakteristische Transformation der Verteilungsfunktion $F(x)$.

Wir sagen, daβ $g(m)$ eine Grenzverteilungsfunktion $F(x)$ besitzt, wenn die Verteilungsfunktion $\nu_n\{g(m)<x\}$ für $n\to\infty$ nicht nur für jede Stetigkeitsstelle von $F(x)$ gegen $F(x)$ strebt, sondern auch wenn $F(+0)-F(0)\neq 1$

$$\nu_n\{g(m)<0\}\to F(0),$$

$$\nu_n\{g(m)\leqslant 0\}\to F(+0).$$

Im vorliegenden Artikel sind folgende Sätze bewiesen.

Satz 1. *$g(m)$ besitzt eine nichtsymmetrische Grenzverteilungsfunktion genau dann, wenn die Reihen*

$$\sum_p \frac{(|g(p)|-1)^*}{p}, \qquad \sum_p \frac{\left((|g(p)|-1)^*\right)^2}{p}, \qquad \sum_{g(p)<0} \frac{1}{p}$$

konvergent sind und $g(2^\alpha)$ die Werte -1 nicht für alle ganze Zahlen $\alpha\geqslant 1$ annimt.

Für Elementen der charakteristischen Transformation der Grenzverteilungsfunktion gilt:

$$w_r(t)=\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{\varphi_r\left(g(p^\alpha),t\right)}{p^\alpha}, \qquad r=0,\ 1.$$

Satz 2. *Es besitze $g(m)$ eine Grenzverteilungsfunktion $F(x)$ und es sei $F(+0)-F(0)<1$. Dann $F(x)$ ist genau dann symmetrisch, wenn mindestens eine aus diesen Bedingungen erfüllt ist:*

a) *die Reihe* $\sum_{g(p)<0}\frac{1}{p}$ *ist divergent,*

b) $g(2^\alpha)=-1$ *für alle ganzen Zahlen* $\alpha\geqslant 1$.

Für Elementen der charakteristischen Transformation der symmetrischen Grenzverteilungsfunktion gilt:

$$w_0(t)=\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{\varphi_0\left(g(p^\alpha),t\right)}{p^\alpha},$$

$$w_1(t)=0, \quad -\infty<t<+\infty.$$

Diese Sätze sind mit Hilfe des Verfahren von H. Delange [4] bewiesen.