LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VII Nr. 4, 1967
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VII № 4, 1967

ИНФОРМАЦИЯ О ВОСЬМОЙ РЕСПУБЛИКАНСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ МАТЕМАТИКОВ ЛИТОВСКОЙ ССР

С 27-го по 28-е июня 1967 года в Каунасе проходила Восьмая республиканская конференция математиков Литовской ССР, посвященная 50-летию Великой Октябрьской Социалистической революции. Конференция была организована Каунасским Политехническим институтом и Обществом литовских математиков. В конференции участвовало свыше 200 сотрудников республиканских научных учреждений и учебных заведений, учителей школ. Наряду с пленарными заседаниями работали шесть секций: теории функций и дифференциальных уравнений, геометрии, методики преподавания математики и истории, вычислительной математики и математической логики, прикладной математики и исследования операций, теории вероятностей и теории чисел.

На конференции было уделено большое внимание нынешнему состоянию и дальнейшему развитию математических наук в республике.

Всего на пленарных и секционных заседаниях было прочитано 85 докладов и сообщений.

Ниже приводится программа конференции, а также тезисы и резюме некоторых докладов и сообщений, прочитанных на пленарных и секционных заседаниях.

ПРОГРАММА КОНФЕРЕНЦИИ

ПЛЕНАРНЫЕ ЗАСЕДАНИЯ

Вторник, 27 июня 10 ч.

1. Открытие конференции.
2. З. Жемайтис, И. Матулионис, А. Нафталевич, В. Близникас, Р. Уждавинис, Б. Кведарас, Математика в Советской Литве.
3. В. Статулявичус, В. Матулис, Перспективы развития прикладной математики в Советской Литве.

Среда, 28 июня 12 ч.

1. В. Лютикас, Преподавание математики в средних школах.
2. Дискуссии.

СЕКЦИЯ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(руководитель В. ПАУЛАУСКАС)

Вторник, 27 июня 15 ч. 30 мин.

1. П. Голоквосчюс, Отыскание характеристических чисел решений одного класса систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.
2. П. Гирджюс, Б. Кведарас, Условия существования решений некоторых краевых задач.
3. В. Шилерис, Решение методом последовательных приближений некоторых уравнений теории упругости.
4. Л. Ступялис, Метод продолжения по параметру.
5. Л. Навицкайте, Целые и мероморфные решения дифференциально-разностных уравнений.

6. Ш. Стрелиц, О сходимости рядов Дирихле с комплексными показателями.
7. В. Швегждайте, К вопросу одного дефекта сходимости тригонометрических рядов.
8. И. Киселюс, Структура решений одного класса дифференциальных уравнений.
9. К. Гармус, О тотализации двойных производных.
10. Г. Лаптев, Краевые задачи дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве.

СЕКЦИЯ ГЕОМЕТРИИ

(руководитель П. КАТИЛЮС)

Вторник, 27 июня 15 ч. 30 мин.

1. П. Вашкас, Геометрические свойства пары комплексов прямых, расслояемой посредством линейных элементов.
2. Л. Стиклаките, К вопросу теории поверхностей обобщенного проективно-метрического пространства.
3. И. Шинкунас, О пространстве опорных сверхвекторов p-го порядка.
4. А. Ионушаускас, Некоторые классы однородных пространств, обладающих инвариантной финслеровой метрикой.
5. И. Близникене, К вопросу геометрии секущих поверхностей расслоенного пространства с прямолинейным базисом.
6. Г. Белтене, К вопросу пар комплексов четырехмерного проективного пространства.
7. А. Рачене, Расслоенные пространства коррелятивных элементов.
8. В. Близникас, Связности высшего порядка пространства опорных элементов.

Среда, 28 июня 9 ч. 30 мин.

1. А. Матузявичюс, Микропучки и гладкие многообразия.
2. В. Падервинскас, К вопросу ромбических сетей.
3. Р. Восилюс, К теории инвариантных аффинных связностей на группе Ли.
4. Д. Петрушкевичюте, Семейство вполне геодезических кривых высшего порядка.
5. В. Близникас, Системы дифференциальных уравнений и пространства связностей.
6. Е. Ушпалене, К вопросу семейства квадрик эллиптического пространства.

СЕКЦИЯ МЕТОДИКИ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И ИСТОРИИ

(руководитель И. МАТУЛИОНИС)

Вторник, 27 июня 15 ч. 30 мин.

1. М. Гудинас, Работа заочной школы юных математиков Каунасского района в 1966/67 учебном году.
2. Б. Хмелевский, Вычислительные и измерительные приборы в старой Вильнюсской академии.
3. В. Дрегунас, К вопросу преподавания тригонометрических уравнений.
4. П. Румшас, З. Антанайтис, Л. Наркевичюс, М. Готлер, Результаты вступительных экзаменов по математике 1966 года в высшие школы республики.

Среда, 28 июня 9 ч. 30 мин.

1. З. Жемайтис, В. Статулявичус, В. Лютикас, К вопросу преподавания основ анализа в средней школе.
2. Дискуссии.

СЕКЦИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

(руководитель М. САПАГОВАС)

Среда, 28 июня 9 ч. 30 мин.

1. В. Матулис, К вопросу прямого метода отыскания доказательства в исчислении предикатов.
2. Р. Плюшкевичюс, К вопросу некоторых прикладных систем исчисления конструктивной логики.
3. F. Плюшкевичюс, Вариант системы исчисления Р. Робинсона.
4. И. Уждавинис, Связь между некоторыми приближенными методами.
5. В. Некрашас, К вопросу применения методов моментов и коллокаций.
6. Сквирецкайте, К вопросу сходимости метода коллокаций.
7. И. Уждавинис, К вопросу обобщенного метода коллокаций.
8. Б. Кведарас, Р. Шивицките, О методике прямых для задачи Дирихле.
9. М. Сапаговас, Решение многомерных нелинейных уравнений параболического типа разностными методами.
10. П. Эйдукевичюс, Решение краевой задачи одной системы нелинейных дифференицальных уравнений с частными производными.

СЕКЦИЯ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ

(руководитель И. МОЦКУС)

Вторник, 27 июня 15 ч. 30 мин.

1. И. Моцкус, Вопросы приближенного решения многоэкстремальных задач.
2. В. Леонас, Некоторые задачи кусочно-линейного программирования.
3. Ф. Юшка, Вопросы оптимизации сетей типа дерева.
4. А. Немура, М. Усавичюте, К вопросу решении некоторых некорректных задач автоматики.
5. Г. Девулис, Об одном решении общей задачи кусочно-линейного программирования.
6. В. Шальтенис, Об одном способе планирования наблюдений в многоэкстремальных задачах.
7. А. Шепутис, Статистические характеристики некоторых нагрузок.
8. Р. Мерките, В. Калинка, Некоторые статистические характристики литовского языка.

Среда, 28 июня 9 ч. 30 мин.

1. Э. Вилкас, Оптимизация по нескольким критериям.
2. В. Бистрицкас, Олиготомические задачи динамического программирования с монотонными функциями.

3. И. Ячяускас, Дифференциальные игры типа дуэли.
4. Р. Ясилионис, Сложные задачи математического программирования.
5. С. Скерус, Некоторые задачи неантагонитических игр.
6. С. Вакринене. Неантагонистические динамические игры.
7. А. Моркялюнас, Некоторые групповые решения.

СЕКЦИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

(руководитель Р. УЖДАВИНИС)

Вторник, 27 июня 15 ч. 30 мин.

1. И. Кубилюс, Локальные теоремы для аддитивных арифметических функций.
2. Г. Мисявичюс, Оценка скорости сходимости различных параметров цепных дробей.
3. Г. Маркшайтис, О группе Галуа максимального l-расширения с заданными точками ветвления.
4. Б. Григелионис, Марковские процессы и стохастические уравнения.
5. В. Статулявичус, Вопросы оценки семиинвариантов.
6. П. Сурвила, Теоремы больших уклонений.
7. Л. Саулис, Теоремы больших уклонений для плотностей.
8. А. Аксомайтис, О больших уклонениях сумм независимых случайных величин.
9. Е. Мисявичюс, О больших уклонениях типа Крамера для однородных цепей Маркова.
10. А. Рауделюнас, Об одной предельной теореме для неоднородных цепей Маркова.
11. Г. Алешкявичюс, К вопросу неоднородных цепей Маркова.
12. А. Бикелис, Об асимптотических разложениях для характеристических функций.
13. Г. Ясюнас, Оценки для многомерных характеристических функций.
14. А. Миталаускас, Локальная предельная теорема для плотностей и асимптотическое разложение в случае устойчивого закона распределения.
15. Р. Уждавинис, И. Станкявичюс, Колебания сумм независимых случайных величин.
16. В. Пипирас, Некоторые предельные теоремы в средней метрике.
17. А. Бакшис, Некоторые свойства квазисимметрического закона распределения.
18. Ю. Мачис, Об устойчивости для теоремы Д. А. Райкова.

Среда, 28 июня 9 ч. 30 мин.

1. А. Алешкявичене, Предельные теоремы для процессов восстановления.
2. Б. Ряуба, К вопросу корреляционных функций высших порядков.
3. Ю. Голосов, А. Темпельман, Об эквивалентности мер, соответствующих векторно-значным гауссовским процессам.
4. Н. Калинаускайте, Верхние и нижние функции для процессов с независимыми приращениями.
5. А. Темпельман, Предельные теоремы для произведений случайных величин со значениями в компактных полугруппах.
6. Е. Гечяускас, Некоторые задачи геометрических вероятностей.
7. Л. Вилкаускас, К вопросу оценки параметра смещения.
8. И. Сапаговас, К вопросу надежности системы с зависимыми элементами.
9. М. Нудель, Э. Сенкене, А. Темпельман, Машинный анализ информативности признаков поражения центральной нервной системы.
10. Р. Слесорайтене, Некоторые вопросы метрической теории чисел.

О сходимости рядов Дирихле с комплексными показателями

Ш. И. СТРЕЛИЦ

Исследуется сходимость ряда Дирихле

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}, \tag{1}$$

где $\lambda_n=\alpha_n+i\beta_n=|\lambda_n|e^{i\vartheta_n}$, $n=1, 2, \ldots$ — комплексные числа (α_n, β_n, ϑ_n — действительные). Положим:

$$S_m(z)=\sum_{n=1}^{m} a_n e^{-\lambda_n z}$$

и в случае сходимости ряда (1) в точке z

$$R_m(z)=\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}.$$

Обозначим:

$$\rho_0(z)=\begin{cases} \overline{\lim\limits_{m\to\infty}} \dfrac{\ln|S_m(z)|}{|\lambda_{m-1}|}, & \text{когда ряд (1) расходится в точке } z, \\ \overline{\lim\limits_{m\to\infty}} \dfrac{\ln|R_m(z)|}{|\lambda_m|}, & \text{когда ряд (1) сходится в точке } z. \end{cases}$$

Имеют место следующие предложения.

Теорема 1. *Если в ряду* (1):

1) $\alpha_n>\alpha_{n-1}$; $n=2, 3, \ldots$; $\alpha_n\to\infty$;

2) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{\ln\left|\dfrac{\vartheta_n-\vartheta_{n-1}}{\alpha_n-\alpha_{n-1}}\right|}{|\lambda_{n-1}|}=\rho^*<\infty$,

3) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |\vartheta_n|=\vartheta<\dfrac{\pi}{2}$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}|\vartheta_n|=\psi$

и

4) *в точке* z_0 $\rho_0(z_0)=\rho_0<\infty$,

то ряд (1) *сходится равномерно внутри угла*

$$\left|\arg\left(z-z_0-\frac{\rho}{\cos\vartheta}\right)\right|<\frac{\pi}{2}-\vartheta,$$

где

$$\rho=\max\left\{\frac{\rho_0\cos\psi}{\cos\vartheta},\ \frac{\rho_0\cos\psi}{\cos\vartheta}+\frac{\rho^*\cos\psi}{\cos\vartheta}\right\},$$

если $\rho_0>0$ *и*

$$\rho=\max\left\{\frac{\rho_0\cos\vartheta}{\cos\psi},\ \frac{\rho_0\cos\vartheta}{\cos\psi}+\frac{\rho^*\cos\psi}{\cos\vartheta}\right\},$$

если $\rho_0\leqslant 0$.

Теорема 2. *Если в ряду* (1):

1) $|\lambda_n|\uparrow\infty$;

2) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{\ln\left|\dfrac{\vartheta_n-\vartheta_{n-1}}{|\lambda_n|-|\lambda_{n-1}|}\right|}{|\lambda_{n-1}|}=\rho^*<\infty$

и выполнены условия 3) *и* 4) *теоремы* 1, *то ряд* (1) *сходится равномерно внутри угла*

$$\left|\arg\left(z-z_0-\frac{\rho}{\cos\vartheta}\right)\right|<\frac{\pi}{2}-\vartheta,$$

где $\rho=\max(\rho_0, \rho_0+\rho^*)$.

Теорема 3. *Если в ряду* (1):

1) $|\lambda_n| \uparrow \infty$;

2) $\rho_0(z_0) = \rho_0 < 0$

и

3) $$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln\left|\frac{\vartheta_n - \vartheta_{n-1}}{|\lambda_n| - |\lambda_{n-1}|}\right|}{|\lambda_{n-1}|} = \rho^*,$$

причем $\rho = \max(\rho_0, \rho_0 + \rho^*) < 0$, *то ряд* (1) *сходится равномерно внутри круга* $|z - z_0| < |\rho|$.

Положим

$$\sigma_m = |\lambda_1| + |\lambda_2| + \ldots + |\lambda_m|; \qquad m = 1, 2, \ldots$$

Теорема 4. *Пусть в ряду* (1):

1) $$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln \sigma_n}{\min(|\lambda_{n-1}|, |\lambda_n|)} = k < \infty,$$

2) $$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln\left|\frac{\vartheta_n - \vartheta_{n-1}}{|\lambda_n|}\right|}{|\lambda_{n-1}|} = \rho^*$$

и

3) $$\underline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right| = \alpha > 0.$$

Если при этом $\rho_0 = \rho_0(z_0) < \infty$, *то ряд* (1) *сходится внутри круга*

$$|z - z_0| < |\alpha\rho + k|,$$

где $\rho = \max(\rho_0, \rho_0 + \rho^*)$, *в предположении* что $\rho < -\frac{k}{\alpha}$.

Точность всех изложенных теорем иллюстрируется примерами.

Примечания. 1) в качестве z_0 можно взять точку $z = 0$, а тогда $S_m(0)$ и $R_m(0)$ являются просто соответствующими суммами коэффициентов.

2) В условиях теоремы 3 ряд (1) сходится в точке z_0, так что

$$\rho_0 = \rho_0(z_0) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln|R_n(z)|}{|\lambda_n|}.$$

Это же относится и к теореме 4.

3) Из условия 1) теоремы 4 вытекает, что $\lim\limits_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty$. Если $|\lambda_n| \uparrow \infty$, то условие 1) равносильно условию $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{|\lambda_n|} = k$.

Структура решений одного класса дифференциальных уравнений

И. КИСЕЛЮС

Пусть имеем линейное дифференциальное уравнение

$$a(z,w)\, z \frac{\partial u}{\partial z} + b(z,w)\, w \frac{\partial u}{dw} + c(z,w)\, u = 0, \tag{1}$$

где

$$a(z,w) = \sum_{i+j=0}^{\infty} a_{ij} z^i w^j,$$

$$b(z,w) = \sum_{i+j=0}^{\infty} b_{ij} z^i w^j$$

и

$$c(z,w) = \sum_{i+j=0}^{\infty} c_{ij} z^i w^j \;-$$

аналитические функции в бицилиндре $|z|<R$, $|w|<R$. Пусть далее: $a_{00}=a\neq 0$, $b_{00}=b\neq 0$ и (λ, μ) — пара комплексных чисел, удовлетворяющих уравнение

$$a\lambda+b\mu+c_{00}=0.$$

Решения уравнения (1) имеем в виде

$$u=\sum_{i+j=0}^{\infty} s_{ij} z^{\lambda+i} w^{\mu+j}.$$

Коэффициенты s_{ij} определяются из системы линейных уравнений

$$\sum_{p=0}^{i}\sum_{q=0}^{i}\left[Q_{i-p,j-q}+pa_{i-p,j-q}+qb_{i-p,j-q}\right]s_{pq}=0,$$

$$i+j=1,\ 2,\ \ldots,$$

где

$$Q_{ij}=a_{ij}\lambda+b_{ij}\mu+c_{ij}.$$

Из (3) заключаем, что коэффициенты s_{ij} имеют следующую структуру:

$$s_{ij}=\frac{D_{ij}}{ia+jb}+A_{ij},$$

где A_{ij} некоторая сумма произведений множителей Q_{pq}, a_{pq}, b_{pq} $(p=0,\ 1,\ \ldots,\ i;\ q=0,\ 1,\ \ldots,\ j)$, а D_{ij} является следующим определителем:

$$\left|\begin{array}{llllll}
a & & & & & Q_{10} \\
a_{10} & 2a & & & & Q_{20} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{i-1,0} & 2a_{i-2,0}\ldots ia & & & & Q_{i0} \\
0 & 0\qquad\ \ldots 0 & b & & & Q_{01} \\
a_{01} & 0\qquad\ \ldots 0 & b_{10} & a+b & & Q_{11} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{i-1,j} & 2a_{i-2,j}\ldots ia_{0j} & b_{i,j-1} & a_{i-1,j-1}+b_{i-1,j-1}\ldots & (i-1)a_{10}+jb_{10} & Q_{ij}
\end{array}\right|$$

Если a и b целые числа, имеет место следующая теорема.

Теорема. *Уравнение* (1) *имеет бесконечное множество линейно независимых решений вида* (2) *в некоторой окрестности начала координат, если* $a(z,w)$, $b(z,w)$ *и* $c(z,w)$ *такие функции, что*

$$D_{ij}\equiv 0,$$

когда $ia+jb=0$.

В частности, когда $a(z,w)\equiv a$ *и* $b(z,w)\equiv b$, *где* a,b — const, *то условие* (4) *принимает следующий вид:* $c_{ij}\equiv 0$.

О тотализации двойных производных

К. ГАРМУС

Пусть дана конечная функция $F(x, y)$ на прямоугольнике R. Назовем выражение

$$F(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-F(x+\Delta x,\ y)-F(x,\ y+\Delta y)+F(x,\ y)$$

двойным приращением функции $F(x, y)$ *в точке* (x, y) *и обозначим через* $\Delta^{(2)}F(x, y)$.

Если точки (x, y), $(x+\Delta x, y)$, $(x, y+\Delta y)$ и $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ принадлежат множеству G, то $\Delta^{(2)}F(x, y)$ назовем *двойным приращением функции* $F(x, y)$ *в точке* (x, y) *по множеству* G и обозначим через $\Delta_G^{(2)}F(x, y)$.

Назовем

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta^{(2)}F(x, y)}{\Delta x\,\Delta y}=F''(x, y)$$

сильной двойной производной в точке (x, y);

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\Delta_G^{(2)} F(x, y)}{\Delta x\,\Delta y} = F''_G(x, y)$$

сильной двойной производной в точке (x, y) *по множеству* G;

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\Delta^{(2)} F(x, y)}{\Delta x\,\Delta y} = DF(x, y), \quad \text{где} \quad \Delta x,\ \Delta y \to 0$$

регулярно, регулярной двойной производной в точке (x, y);

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\Delta_G^{(2)} F(x, y)}{\Delta x\,\Delta y} = DF_G(x, y), \quad \text{где} \quad \Delta x,\ \Delta y \to 0$$

регулярно, регулярной двойной производной в точке (x, y) *по множеству* G;

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} ap\ \frac{\Delta^{(2)} F(x, y)}{\Delta x\,\Delta y} = F''ap(x, y)$$

сильной аппроксимативной двойной производной в точке (x, y);

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} ap\ \frac{\Delta_G^{(2)} F(x, y)}{\Delta x\,\Delta y} = DF_{apG}(x, y), \quad \text{где} \quad \Delta x,\ \Delta y \to 0$$

регулярно, регулярной аппроксимативной двойной производной в точке (x, y) *по множеству* G.

Пусть

$$R = [a_1, b_1;\ a_2, b_2].$$

Назовем выражение

$$F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(a_2, b_1) + F(a_1, a_2)$$

двойным приращением функции $F(x, y)$ *на прямоугольнике* R и обозначим через $\Delta^{(2)}(F; R)$. Назовем

$$\sup|\Delta^{(2)}(F; r)|, \quad \text{где} \quad r \subset R,$$

двойным колебанием функции $F(x, y)$ *на прямоугольнике* R и обозначим через

$$O(\Delta^{(2)}; F; R).$$

Определение AC^s-функций. Пусть дана непрерывная функция $F(x, y)$ на прямоугольнике R. Скажем, что $F(x, y)$ есть *AC^s-функция (широкая) на множестве* $G \subset R$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для каждой конечной последовательности не перекрывающихся прямоугольников, таких, что все вершины принадлежат множеству G, из неравенства

$$\sum_k |r_k| < \delta$$

следует неравенство

$$\sum_k |\Delta^{(2)}(F; r_k)| < \varepsilon.$$

Определение AC^s**-функций.** Пусть дана непрерывная функция $F(x, y)$ на прямоугольнике R. Скажем, что функция $F(x, y)$ есть *AC^s-функция (узкая) на множестве* $G \subset R$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для каждой конечной последовательной непрерывающихся прямоугольников, таких, что две противоположные вершины принадлежат множеству G, из неравенства

$$\sum_k |r_k| < \delta$$

следует неравенство

$$\sum_k O(\Delta^{(2)}; F; r_k) < \varepsilon.$$

Определение ACG^s-функции. Пусть дана непрерывная функция $F(x, y)$ на прямоугольнике R. Скажем, что $F(x, y)$ *есть ACG^s-функция (широкая) на множестве $G \subset R$*, если множество G представимо в виде суммы последовательности подмножеств $G=\sum_n g_n$ на каждом из которых она является AC^s-функцией, причем, сумма всех прямоугольников, таких, что все вершины каждого принадлежат множеству G, является суммой всех прямоугольников, таких, что все вершины каждого принадлежат какому-нибудь подмножеству g_n.

Определение ACG^s_x-функции. Пусть дана непрерывная функция $F(x, y)$ на прямоугольнике R. Скажем, что $F(x, y)$ *есть ACG^s_x-функция (узкая) на множестве $G \subset R$*, если множество G представимо в виде суммы последовательности множеств $G=\sum_n g_n$, на каждом из которых она является AC^s_x-функцией.

Доказывается, что ACG^s функция почти всюду в точках множества $G \subset R$ аппроксимативно дифференцируема, а ACG^s_x-функция почти всюду дифференцируема.

ACG^s-функция на прямоугольнике R называется *широким двойным интегралом Данжуа*, а ACG^s_x-функция *узким двойным интегралом Данжуа*.

Каждая примитивная от всюду конечной сильной аппроксимативной двойной производной является ACG^s-функцией, а каждая примитивная от всюду конечной сильной двойной производной является ACG^s_x-функцией.

К вопросу теории поверхностей обобщенного проективно-метрического пространства

Л. СТИКЛАКИТЕ

Проективное пространство P_n с корреляцией, заданной тензором $H_{\alpha\beta}$ $(H_{\alpha\beta} \neq H_{\beta\alpha})$, называется обобщенным проективно-метрическим пространством. В этом пространстве уравнениями

$$\omega^I=\Lambda^I_a\vartheta^a,$$
$$I,\ J,\ K, \ldots = 1, \ldots, n,$$
$$a,\ b,\ c, \ldots = 1, \ldots, m<n-1,$$

где ω^I, ϑ^a пфаффовые формы, определяется поверхность.

Касательная плоскость точки A_0 поверхности определяется точками A_0, $B_a=\Lambda^I_a A_I$. Найдены объекты, при помощи которых производится нормализация поверхности в смысле А. П. Нордена (А. П. Норден, Пространство аффинной связности), деривационные уравнения, условие совместности этих уравнений, а также необходимые и достаточные условия для определения поверхности обобщенного проективно-метрического пространства.

О пространстве опорных сверхвекторов p-го порядка

Ю. ШИНКУНАС

Настоящее сообщение является обобщением результатов [1], т. е. рассматривается пространство, локальные координаты которого определяются как первые интегралы вполне интегрируемой системы дифференциальных уравнений:

$$\omega^i=0, \qquad \Theta_I \equiv dv_I-\omega^K_I v_K=0,$$

где сверхвекторные индексы I, K, L принимают серии (i_1), $(i_1 i_2)$, ..., $(i_1 i_2 \ldots i_p)$ симметрических индексов, а $i, j, k=1, 2, \ldots, n$. Суммирование по сверхвекторным индексам можно заменить суммированием по всем сериям обычных индексов. Формы ω^K_I выражаются через пфаффовые формы $\omega^i_{j_1}$, $\omega^i_{j_1 j_2}$, ..., $\omega^i_{j_1 j_2 \ldots j_p}$ продолженной группы аналитических преобразований пространства $X^{(p)}_n$ следующим образом:

$$\omega^{i_1 \ldots i_s}_{j_1 \ldots j_a}=\frac{a!}{(s-1)!\,(a-s+1)!}\,\delta^{(i_1}_{(j_1}\delta^{i_2}_{j_2}\ldots\delta^{i_{s-1}}_{j_{s-1}}\omega^{i_s)}_{j_s \ldots j_a)},$$

$\omega^{i_1 \ldots i_s}_{j_1 \ldots j_a}=0$, если $s>a$ $(s,\ a=1,\ 2, \ldots, p)$. Это пространство будем называть пространством опорных сверхвекторов $X_n^{(p)}$ порядка p. Структурные уравнения пространства $X_n^{(p)}$ имеют вид:

$$D\omega^i=[\omega^k,\ \omega^i_k], \qquad D\Theta_I=[\Theta_K,\ \omega^K_I]+[\varphi_{I,\,k},\ \omega^k],$$

где

$$\varphi_{I,\,k}=v_K\omega^K_{Ik}.$$

В пространстве опорных сверхвекторов p-го порядка $X_n^{(p)}$ линейную связность определим формами

$$\Theta_I=\Theta_I-\Gamma^K_I\Theta_K-\Gamma_{I,\,k}\omega^k,$$

где $\Gamma^{k_1 \ldots k_s}_{i_1 \ldots i_a}=0$, если $s\geqslant a$. Определенная таким образом линейная связность в пространстве $X_n^{(p)}$ индуцирует тензорную связность. Рассмотрены также тензорные связности высшего порядка, введено понятие параллельного перенесения для тензоров любой валентности и сверхвекторов в этом пространстве. Получены вычислительные формулы для соответствующих тензоров кривизные линейной и тензорной связностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Шинкунас, О связностях в пространствах специальных опорных элементов, Лит. мат. сб., **VI**, № 4 (1966) 622.

Некоторые классы однородных пространств, обладающих инвариантной финслеровой метрикой

А. ИОНУШАУСКАС

Лемма. *Пусть имеется полная линейная группа $GL(n^s, R)$, определяемая левоинвариантными базисными линейными формами $\omega^{k_1 \ldots k_s}_{i_1 \ldots i_s}$, удовлятворяющими структурным уравнениям*

$$D\omega^{k_1 \ldots k_s}_{i_1 \ldots i_s}=\left[\omega^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_s}\ \ \omega^{k_1 \ldots k_s}_{j_1 \ldots j_s}\right] \tag{1}$$

$(i,\ j,\ k,\ i_1,\ \ldots,\ i_s,\ j_1,\ \ldots,\ j_s,\ k_1,\ \ldots,\ k_s=1,\ \ldots,\ n)$. *Тогда системой*

$$\omega^{k_1 k_2 \ldots k_s}_{i_1 i_2 \ldots i_s}=\vartheta^{k_1}_{i_1}\ \delta^{k_2}_{i_2}\ldots\delta^{k_s}_{i_s}+\delta^{k_1}_{i_1}\ \vartheta^{k_2}_{i_2}\ldots\delta^{k_s}_{i_s}+\cdots+\delta^{k_1}_{i_1}\ldots\delta^{k_{s-1}}_{i_{s-1}}\ \vartheta^{k_s}_{i_s}\ , \tag{2}$$

где

$$D\vartheta^k_i=\left[\vartheta^j_i\ \vartheta^k_j\right]\ , \tag{3}$$

задается подгруппа группы (1) — *голоморфный образ линейной группы* (3) *при гомоморфизме, определяемом системой* (2).

В докладе рассматриваются следующие классы однородных пространств G/g:

1°. Пусть векторы $e_{k_1 \ldots k_s}$, $E_{i_1 \ldots i_p}$ $(s\geqslant 1,\ p\geqslant 1)$ образуют базис конечномерного вещественного векторного пространства L. Стационарная подгруппа подпространства $\{e_{k_1 \ldots k_s}\}$ есть линейная группа со следующей структурой:

$$D\omega^{k_1 \ldots k_s}_{i_1 \ldots i_s}=\left[\omega^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_s}\ \omega^{k_1 \ldots k_s}_{j_1 \ldots j_s}\right],\quad D\Theta^{k_1 \ldots k_p}_{i_1 \ldots i_p}=\left[\Theta^{j_1 \ldots j_p}_{i_1 \ldots i_p}\ \Theta^{k_1 \ldots k_p}_{j_1 \ldots j_p}\right],$$

$$D\,\Omega^{k_1 \ldots k_s}_{i_1 \ldots i_p}=\left[\Theta^{j_1 \ldots j_p}_{i_1 \ldots i_p}\ \Omega^{k_1 \ldots k_s}_{j_1 \ldots j_p}\right]-\left[\omega^{k_1 \ldots k_s}_{j_1 \ldots j_s}\ \Omega^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_p}\right]. \tag{4}$$

В качестве группы G берется подгруппа группы (4), определяемая системой (2) и системой (аналогичного строения)

$$\Theta^{k_1 \ldots k_p}_{i_1 \ldots i_p}=\vartheta^{k_1}_{i_1}\ \delta^{k_2}_{i_2}\ldots\delta^{k_p}_{i_p}+\ \cdots\ +\delta^{k_1}_{i_1}\ldots\delta^{k_{p-1}}_{i_{p-1}}\ \vartheta^{k_p}_{i_p}\ , \tag{5}$$

где формы ϑ^k_i — те же, что и в (2).

Роль стационарной подгруппы g точки однородного пространства G/g будет играть стационарная подгруппа

$$\Omega^{k_1\ldots k_s}_{i_1\ldots i_p}=0$$

подпространства $\{E_{i_1\ldots i_p}\}$ векторного пространства L.

Линейная группа изотропии $\mathfrak{G}$ [1] такого однородного пространства G/g является тензорным представлением

$$dx^{k_1k_2\ldots k_s}_{i_1i_2\ldots i_p}=\vartheta^j_{i_1}x^{k_1\ldots k_s}_{ji_2\ldots i_p}+\vartheta^j_{i_2}x^{k_1\ldots k_s}_{i_1j\ldots i_p}+\cdots+\vartheta^j_{i_p}x^{k_1\ldots k_s}_{i_1\ldots i_{p-1}j}-$$
$$-\vartheta^{k_1}_j x^{jk_2\ldots k_s}_{i_1\ldots i_p}-\vartheta^{k_2}_j x^{k_1j\ldots k_s}_{i_1\ldots i_p}-\cdots-\vartheta^{k_s}_j x^{k_1\ldots k_{s-1}j}_{i_1\ldots i_p} \qquad (6)$$

группы (3).

Если участвующие во всей этой конструкции формы ϑ^k_i, имеющие структуры (3), связаны уравнением

$$\vartheta^i_i=0 \qquad (7)$$

(т. е. представляется унимодулярная группа $SL(n, R)$), то в описанном однородном пространстве G/g всегда имеется инвариантная финслерова метрика. Если же не наложить ограничения (7), то такая метрика будет существовать только в том случае, когда $p=s$.

Если заменить в этой конструкции семейство $e_{k_1\ldots k_s}$, одним вектором e, то система (4) станет такой:

$$D\omega=0,\quad D\Theta^{k_1\ldots k_p}_{i_1\ldots i_p}=\left[\Theta^{j_1\ldots j_p}_{i_1\ldots i_p}\,\Theta^{k_1\ldots k_p}_{j_1\ldots j_p}\right],$$
$$D\Omega_{i_1\ldots i_p}=\left[\Theta^{j_1\ldots j_p}_{i_1\ldots i_p}\,\Omega_{j_1\ldots j_p}\right]-\left[\omega\Omega_{i_1\ldots i_p}\right]. \qquad (4')$$

G определяется системой (5) и уравнением $\omega=0$ как подгруппа группы (4′), а стационарная подгруппа g — системой $\Omega_{i_1\ldots i_p}=0$. Линейная группа изотропии и $\mathfrak{G}$ такого пространства G/g имеет вид

$$dx_{i_1i_2\ldots i_p}=\vartheta^j_{i_1}x_{ji_2\ldots i_p}+\vartheta^j_{i_2}x_{i_1j\ldots i_p}+\cdots+\vartheta^j_{i_p}x_{i_1\ldots i_{p-1}j},$$

и если формы ϑ^k_i (3) связаны уравнением (7), то при $p\geqslant 2$ в однородном пространстве G/g существует инвариантная финслерова метрика.

Очевидно теперь, как получить однородное пространство с линейной группой изотропии

$$dx^{k_1k_2\ldots k_s}=-\vartheta^{k_1}_j x^{jk_2\ldots k_s}-\vartheta^{k_2}_j x^{k_1j\ldots k_s}-\cdots-\vartheta^{k_s}_j x^{k_1\ldots k_{s-1}j}.$$

При $s\geqslant 2$ и выполнении уравнения (7) в таком однородном пространстве также существует инвариантная финслерова метрика.

Такой же конструкции получаются однородные пространства, линейные гуппы изотропии которых имеют вид

$$dx^{k_1\ldots k_s;\,\ldots;\,\beta_1\ldots\beta_r}_{i_1\ldots i_p;\,\ldots;\,\alpha_1\ldots\alpha_q}=\vartheta^j_{i_1}x^{k_1\ldots k_s;\,\ldots;\,\beta_1\ldots\beta_r}_{j\ldots i_p;\,\ldots;\,\alpha_1\ldots\alpha_q}+\cdots+\vartheta^j_{i_p}x^{k_1\ldots k_s;\,\ldots;\,\beta_1\ldots\beta_r}_{i_1\ldots j;\,\ldots;\,\alpha_1\ldots\alpha_q}-$$
$$-\vartheta^{k_1}_j x^{j\ldots k_s;\,\ldots;\,\beta_1\ldots\beta_r}_{i_1\ldots i_p;\,\ldots;\,\alpha_1\ldots\alpha_q}-\cdots-\vartheta^{k_s}_j x^{k_1\ldots j;\,\ldots;\,\beta_1\ldots\beta_r}_{i_1\ldots i_p;\,\ldots;\,\alpha_1\ldots\alpha_q}+$$
$$+\cdots+\omega^{\gamma}_{\alpha_1}x^{k_1\ldots k_s;\,\ldots;\,\beta_1\ldots\beta_r}_{i_1\ldots i_p;\,\ldots;\,\gamma\ldots\alpha_q}+\cdots-\omega^{\beta_r}_{\gamma}x^{k_1\ldots k_s;\,\ldots;\,\beta_1\ldots\gamma}_{i_1\ldots i_p;\,\ldots;\,\alpha_1\ldots\alpha_q},$$

где

$$D\vartheta^k_i=[\vartheta^j_i\,\vartheta^k_j],\ \ldots,\ D\omega^{\beta}_{\alpha}=[\omega^{\gamma}_{\alpha}\,\omega^{\beta}_{\gamma}]\quad (i,\ i_1,\ \ldots,\ k_s=1,\ \ldots,\ n;\ \ldots;\ \alpha,\ \beta,\ \ldots=1,\ \ldots,\ m).$$

Здесь большее разнообразие возможностей, и в одних случаях в таких однородных пространствах имеются инвариантные финслеровы метрики, в других случаях — отсутствуют.

2°. Базис N-мерного вещественного векторного пространства L разобьем на три класса e_I, e_A, e_Φ. Системой $\omega^{\Phi}_I=0$, $\omega^{\Phi}_A=0$, $\omega^{B}_I=0$ выделяется подгруппа G группы $GL(N, R)$, сохраняющая инвариантными подпространства $\{e_I, e_A\}$, $\{e_I\}$; левоинвариантные базисные формы такой подгруппы имеют структуру

$$D\omega_I^K = [\omega_I^L\ \omega_L^K],\quad D\omega_A^B = [\omega_A^C\ \omega_C^B],\quad D\omega_\Psi^\Phi = [\omega_\Psi^\Xi\ \omega_\Xi^\Phi],$$

$$D\omega_\Psi^K = -[\omega_L^K\ \omega_\Psi^L] + [\omega_\Psi^C\ \omega_C^K] + [\omega_\Psi^\Xi\ \omega_\Xi^K],\quad D\omega_A^K = -[\omega_L^K\ \omega_A^L] + [\omega_A^C\ \omega_C^K],$$

$$D\omega_\Psi^B = -[\omega_C^B\ \omega_\Psi^C] + [\omega_\Psi^\Xi\ \omega_\Xi^B].$$

Если стационарную подгруппу g выделить системой $\omega_A^K=0$, $\omega_\Psi^K=0$, то линейная группа изотропии однородного пространства G/g будет приводимой

$$dx_A^K=\omega_A^B\ x_B^K-\omega_I^K\ x_A^I,$$

$$dx_\Psi^K=\omega_\Psi^C\ x_C^K+\omega_\Psi^\Phi\ x_\Phi^K-\omega_I^K\ x_\Psi^I.$$

Если же g выделить системой $\omega_A^K=0$, $\omega_\Psi^K=0$, $\omega_\Psi^B=0$, то линейная группа изотропии пространства G/g будет вполне приводима:

$$dx_A^K=\omega_A^B\ x_B^K-\omega_I^K\ x_A^I,\quad dx_\Psi^K=\omega_\Psi^\Phi\ x_\Phi^K-\omega_I^K\ x_\Psi^I,\quad dx_\Psi^B=\omega_\Psi^\Phi\ x_\Phi^B-\omega_A^B\ x_\Psi^A. \tag{8}$$

Здесь можно полагать, что

$$I=\{i_1,\ \dots,\ i_p\},\quad A=\{a_1,\ \dots,\ a_s\},\quad \Phi=\{\alpha_1,\ \dots,\ \alpha_q\},$$

и считать, что формы

$$\omega_I^K=\omega_{i_1\dots i_p}^{k_1\dots k_p},\quad \omega_A^B=\Omega_{a_1\dots a_s}^{b_1\dots b_s},\quad \omega_\Phi^\Psi=\Theta_{\alpha_1\dots\alpha_q}^{\beta_1\dots\beta_q}$$

имеют вид (5), где формы ϑ_i^k удовлетворяют структурным уравнениям (3) (i, k, a, b, α, $\beta=1,\ \dots,\ n$). Если при этом формы ϑ_i^k удовлетворяют уравнению (7), то в случае (8) в пространстве G/g имеется инвариантная финслерова метрика.

Разумеется, описанное построение можно обобщать.

3°. Группа G определяется левоинвариантными формами

$$\vartheta_i^k,\ \omega^i,\ \omega^{i_1i_2\dots i_s},\ \omega^{i_1i_2\dots i_s i_{s+1}}\quad (i,\ k,\ i_1,\ \dots,\ i_{s+1}=1,\ \dots,\ n),$$

имеющими структуру

$$D\vartheta_i^k=[\vartheta_i^j\ \vartheta_j^k],\quad D\omega^i=-[\vartheta_k^i\ \omega^k],$$

$$D\omega^{i_1i_2\dots i_s}=-[\vartheta_k^{i_1}\ \omega^{ki_2\dots i_s}]-[\vartheta_k^{i_2}\ \omega^{i_1k\dots i_s}]-\dots-[\vartheta_k^{i_s}\ \omega^{i_1\dots i_{s-1}k}], \tag{9}$$

$$D\omega^{i_1i_2\dots i_{s+1}}=-[\vartheta_k^{i_1}\ \omega^{ki_2\dots i_{s+1}}]-[\vartheta_k^{i_2}\ \omega^{i_1k\dots i_{s+1}}]-\dots-[\vartheta_k^{i_{s+1}}\ \omega^{i_1\dots i_sk}]+$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{s+1} c_\alpha\left[\omega^{i_\alpha}\ \omega^{i_1\dots\hat{i}_\alpha\dots i_{s+1}}\right],\quad c_\alpha=\text{const};$$

значок $\hat{}$ над индексом i_α означает, что этот индекс вычеркнут, так что через $\omega^{i_1\dots\hat{i}_\alpha\dots i_{s+1}}$ обозначена форма $\omega^{i_1\dots i_{\alpha-1}i_{\alpha+1}\dots i_{s+1}}$. Стационарная подгруппа g точки однородного пространства G/g определяется системой

$$\omega^i=0,\quad \omega^{i_1\dots i_s}=0,\quad \omega^{i_1\dots i_s i_{s+1}}=0.$$

Линейная группа изотропии такого пространства G/p имеет вид

$$dx^i=-\vartheta_k^i\ x^k,\quad dx^{i_1i_2\dots i_s}=-\vartheta_k^{i_1}\ x^{ki_2\dots i_s}-\vartheta_k^{i_2}\ x^{i_1k\dots i_s}-\dots-\vartheta_k^{i_s}\ x^{i_1\dots i_{s-1}k},$$

$$dx^{i_1i_2\dots i_s i_{s+1}}=-\vartheta_k^{i_1}\ x^{ki_2\dots i_{s+1}}-\vartheta_k^{i_2}\ x^{i_1k\dots i_{s+1}}-\dots-\vartheta_k^{i_{s+1}}\ x^{i_1\dots i_s k}. \tag{10}$$

Если в (9), (10) формы ϑ_i^k связаны уравнением (7), то при $s\geqslant 2$ в однородном пространстве G/g существует инвариантная финслерова метрика.

Обобщения этой конструкции также строятся без особых затруднений.

4°. Линейную группу изотропии

$$dx_i^j=\vartheta_i^k\ x_k^j-\vartheta_k^j\ x_i^k$$

имеют четыре следующих однородных пространства G/g (в них существует даже инвариантная риманова метрика):

а) $G:\begin{cases} D\vartheta_i^j=[\vartheta_i^k\ \vartheta_k^j], \\ D\omega_i^j=[\vartheta_i^k\ \omega_k^j]-[\vartheta_k^j\ \omega_i^k], \end{cases}$ $\qquad g:\ \omega_i^j=0;$

б) $G:\begin{cases} D\vartheta_i^j=[\vartheta_i^k\ \vartheta_k^j], \\ D\omega_i^j=[\vartheta_i^k\ \omega_k^j]-[\vartheta_k^j\ \omega_i^k]+[\omega_i^k\ \omega_k^j], \end{cases}$ $\qquad g:\ \omega_i^j=0;$

в) $G:\begin{cases} D\vartheta_i^j=[\vartheta_i^k\,\vartheta_k^j]+[\omega_i^k\,\omega_k^j], \\ D\omega_i^j=[\vartheta_i^k\,\omega_k^j]-[\vartheta_k^j\,\omega_i^k], \end{cases}$ $\qquad g:\omega_i^j=0;$

г) $G:\begin{cases} D\vartheta_i^j=[\vartheta_i^k\,\vartheta_k^j]+[\omega_i^k\,\omega_k^j], \\ D\omega_i^j=[\vartheta_i^k\,\omega_k^j]-[\vartheta_k^j\,\omega_i^k]+[\omega_i^k\,\omega_k^j], \end{cases}$ $\qquad g:\omega_i^j=0.$

Обобщениями этого случая получаются однородные пространства, линейная группа изотропии которых имеет вид (6) при $p=s$. Во всех таких однородных пространствах существует инвариантная риманова метрика [2].

ЛИТЕРАТУРА:

1. А. Ионушаускас, Лит. мат. сб., **V**, № 1 (1965), 45–55.
2. А. Ионушаускас, Лит. мат. сб., **VI**, № 1 (1966), 51–57.

Связности высшего порядка в пространстве опорных элементов

В. И. БЛИЗНИКАС

Пусть V_n — n-мерное дифференцируемое многообразие и $GL^p(n, R)$ — дифференциальная группа порядка p. Точка пространства представления группы $GL^p(n, R)$ называется дифференциально-геометрическим объектом порядка p. Будем считать, что каждой точке (x^i) многообразия V_n присоединено пространство значений некоторого дифференциально-геометрического объекта. Полученное таким образом пространство и называется пространством опорных элементов $V_{n,N}^{(p)}$.

Существует естественный гомоморфизм группы $GL^p(n, R)$ в дифференциальную группу слоя (имеется в виду дифференциальная группа порядка q). Если r_a – размерность гомоморфного образа группы $GL^p(n, R)$ в дифференциальную группу порядка q слоя, то число $\rho_a=r-r_a$ $\big(r$ — размерность группы $GL^p(n, R)\big)$, как и число r_a, является арифметическим инвариантом и называется характером изотропии a-го порядка пространства представления группы $GL^p(n, R)$. Очевидно, что

$$\rho_1\geqslant\rho_2\geqslant\ \dots\ \geqslant\rho_a$$

и всегда существует такое q, что

$$\rho_1\geqslant\rho_2\geqslant\ \dots\ \geqslant\rho_q=\rho_{q+1}=\ \dots$$

Число q является арифметическим инвариантом и его назовем порядком нелинейности опорного объекта (всегда $q\geqslant1$). Гомоморфный образ дифференциальной группы $GL^p(n, R)$ (горизонтальной дифференциальной группы пространства $V_{n,N}^{(p)}$) в дифференциальную группу слоя пространства $V_{n,N}^{(p)}$ называется вертикальной дифференциальной группой пространства $V_{n,N}^{(p)}$. Очевидно, что структура вертикальной дифференциальной группы пространства $V_{n,N}^{(p)}$ существенно зависит от структуры группы $GL^p(n, R)$, действующей в слоях пространства $V_{n,N}^{(p)}$. Приведем некоторые примеры.

1. Если опорным объектом является вектор, то вертикальная дифференциальная группа совпадает с горизонтальной (в этом случае с центроаффинной).

2. Если опорным объектом является свернутый объект аффинной связности, то вертикальная дифференциальная группа совпадает с группой, которая является инволютивным автоморфизмом группы $GL(n, R)$ (в этом случае порядок горизонтальной дифференциальной группы равен двум).

3. Если опорным объектом является контравариантный сверхвектор порядка p, то вертикальная дифференциальная группа первого порядка совпадает с горизонтальной дифференциальной группой $GL^p(n, R)$ и вертикальные дифференциальные группы высших порядков совпадают с вертикальной дифференциальной группой первого порядка.

Очевидно, что порядок вертикальной дифференциальной группы пространства $V_{n,N}^{(p)}$ совпадает с порядком нелинейности опорного объекта.

В работе [1] доказано, что линейная дифференциально-геометрическая связность пространства $V_{n,N}^{(p)}$ индуцирует вертикальную аффинную связность высшего порядка q (очевидно, что $q \leqslant p$). Найдена структура дифференциально-геометрических объектов, при помощи которых определяются вышеупомянутые связности и структура соответствующих объектов кривизны. В работе [1] предполагалось, что $q \leqslant p$, а здесь установлено точное значение числа q.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Близникас, Известия высш. учебн. зав., мат., 1966, № 4 (54), 13–24.

Микропучки и гладкие многообразия

А. МАТУЗЯВИЧЮС

Рассматривается абелевая полугруппа $W(B)$, элементами которой являются изоморфные классы микропучков над паракомпактной базой B, а операция — уитниевская сумма микропучков.

Пусть $x=(E, B, i, j)$ — такой микропучек, ограничение которого над замкнутым подпространством $A \subset B$ является тривиальным. Тривиализацией микропучка x над A будем называть гомеоморфизм $h: E_{|A} \to A \times R$, осуществляющий изоморфизм микропучков $x_{|A} \simeq e$, где e — стандартный тривиальный микропучек.

Тривиализация h естественно определяет микропучек $x_{|h}$ над B/A. Для двух гомотопных тривиализаций $h_1 \sim h_2$, микропучки $x_{|h_1}$ и $x_{|h_2}$ изоморфны. Когда A — замкнутое стягиваемое подпространство, тогда естественное отображение $B \to B/A$ индуцирует биекцию $W(B/A) \to W(B)$.

Пусть два микропучка x_1 и x_2 соответственно над базами B_1 и B_2 связаны над $B_1 \cap B_2$ изоморфизмом h, тогда над $B_1 \cup B_2$ определяется микропучек, изоморфный класс которого зависит только от гомотопического класса h. Имеет место изоморфизм $W_n(SA) \simeq [A, GL(n, C)]$, где $W_n(SA)$ — полугруппа изоморфных классов n-мерных микропучков, а

$$SA = A \times \left[0, \frac{1}{2}\right] \Big/ {A \times 0} \cup A \times \left[\frac{1}{2}, 1\right] \Big/ {A \times 1}.$$

Нетрудно видеть, что существует эпиморфизм $B \times R \to E$, который индуцирует отображение $f: B \to G_n(C)$. Универсальный микропучек и отображение f в свою очередь индуцируют микропучек $f^* x$ над B. Очевидно, имеет место изоморфизм $f^* x \simeq x$.

Естественная проекция $C^m \to C^{m-1}$ определяет непрерывное отображение $\psi: G_n(C^{m-1}) \to G_n(C^m)$. Тогда если $x_{(m)}$ — универсальный микропучек над $G_n(C^m)$, имеем $\psi^* x_{(m)} \simeq x_{(m-1)}$. Для любого микропучка $x_{(m)}$ над базой B и для отображения $f: B \to G_n(C^m)$ соответствие $f \to f^* x_{(m)}$ индуцирует изоморфизм $[B, G_n(C^m)] \to W_n(B)$.

Результаты применяются для исследования некоторых свойств топологических многообразий.

Специальные классы кривых n-го порядка

Д. ПЕТРУШКЯВИЧУТЕ

Так как любая кривая k^n

$$x^{\overbrace{11\ldots1}^{j}\overbrace{00\ldots0}^{n-j}} = (t^1)^j (t^0)^{n-j}, \qquad (j=0, 1, 2, \ldots n)$$

переводится в любую другую кривую k^n проективным преобразованием

$$'x^{i_1 i_2 \dots i_n} = A^{i_1}_{k_1} A^{i_2}_{k_2} \dots A^{i_n}_{k_n} x^{k_1 k_2 \dots k_n},$$

то на множество кривых можно смотреть как на однородное пространство, группой преобразований которого будет группа $n(n+2)$-мерных проективных преобразований.

Рассматриваются три специальные вполне геодезические семейства кривых k^n.

Системы дифференциальных уравнений и пространства со связностью

В. И. БЛИЗНИКАС

Рассматривается система вида ($\alpha=1, 2, \dots, m$; $i=1, 2, \dots, n$):

$$\frac{\partial^{p+1} x^i}{\partial u^{\alpha_1} \dots \partial u^{\alpha_{p+1}}} + H^i_{\alpha_1 \dots \alpha_{p+1}}(x, u, p^k_\beta, \dots, p^k_{\beta_1 \dots \beta_p}) = 0,$$

где

$$p^k_{\alpha_1 \dots \alpha_a} = \frac{\partial^a x^i}{\partial u^{\alpha_1} \dots \partial u^{\alpha_a}}.$$

Рассматриваемой системе соответствует расслоенное пространство с фундаментальным дифференциально-геометрическим объектом H. Доказано, что третье дифференциальное продолжение фундаментального дифференциально-геометрического объекта охватывает объекты связностей расслоенного пространства, присоединенного к рассматриваемой системе.

Приведено два решения проблемы Кавагути, т. е. при построении объекта аффинной связности $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ и других объектов связностей предполагается, что на расслоенном пространстве кроме фундаментального дифференциально-геометрического объекта задан невырожденный симметрический дважды ковариантный тензор $a_{\alpha\beta}$, а возможность построения этих объектов при отсутствии тензора $a_{\alpha\beta}$ была не доказана. Эта задача и составляет содержание проблемы Кавагути.

О почти контактных структурах эллиптического и гиперболического типа

А. Л. КРИЩЮНАЙТЕ

Почти контактная структура (φ, ξ, η) определяется на многообразии $M_{2n-1}(x^a)$ заданием тензоров φ^b_a, ξ^b, η_a, удовлетворяющих условиям

$$\varphi^e_a \varphi^b_e = -\delta^b_a + \eta_a \xi^b,$$
$$\xi^a \eta_a = 1. \tag{1}$$

Положительно определенная метрика g_{ab}, удовлетворяющая условию

$$g_{ed} \varphi^e_a \varphi^d_b = g_{ab} - \eta_a \eta_b, \tag{2}$$

вместе с φ^b_a, ξ^b, η_a (1) определяет почти контактную метрическую структуру (φ, ξ, η, g).

Возможны следующие обобщения этих структур.

Метрика g_{ab}, удовлетворяющая условию

$$g_{ed} \varphi^e_a \varphi^d_b = g_{ab} - \varepsilon \eta_a \eta_b, \tag{3}$$

где $\varepsilon = \pm 1$, вместе с (φ, ξ, η) определяет обобщенную почти контактную метрическую структуру эллиптического типа I рода.

Метрика g_{ab}, удовлетворяющая условию

$$g_{ed} \varphi^e_a \varphi^d_b = -g_{ab} - \varepsilon \eta_a \eta_b, \tag{4}$$

вместе с (φ, ξ, η) определяет почти контактную метрическую структуру эллиптического типа II рода.

Если на многообразии M_{2n-1} заданы тензоры φ_a^b, ξ^b, η_a, удовлетворяющие условиям

$$\varphi_a^e \varphi_e^b = \delta_a^b + \eta_a \xi^b, \quad \xi^a \eta_a = -1, \tag{5}$$

то будем говорить, что они определяют почти контактную структуру гиперболического типа, а вместе с тензором g_{ab} (4) — почти контактную метрическую структуру гиперболического типа I рода, в то время как вместе с тензором g_{ab} (3) — почти контактную метрическую структуру гиперболического типа II рода.

Почти контактная структура гиперболического (эллиптического) типа возникает на гиперповерхности почти двойного (комплексного) пространства M_{2n} при почти контактных оснащениях.

Почти контактная метрическая структура гиперболического (эллиптического) типа I рода возникает на гиперповерхностях почти двойных (комплексных) пространств с S — тензором при оснащении вектором ε — единичным и нормальным к гиперповерхности.

Почти контактная метрическая структура гиперболического (эллиптического) типа II рода возникает на гиперповерхностях почти двойного (комплексного) пространства с B — тензором при оснащении вектором, ε — единичным, лежащим в аналитической площадке, определяемой нормальным вектором, и дающим почти контактное оснащение.

Условие интегрируемости и нормальности почти контактной структуры на гиперповерхностях двойного и комплексного многообразий зависит от внутренней геометрии оснащенной гиперповерхности.

Например, для почти контактных метрических структур I рода на гиперповерхностях S — пространства гиперболического типа (как и в случае эллиптическом) эти условия нормальности совпадают с требованием, чтобы ξ был вектором Киллинга в индуцированной метрике g_{ab}, а для почти контактных метрических структур II рода на гиперповерхностях B — пространства гиперболического и эллиптического типа условие нормальности совпадает с требованием градиентности ковектора η.

Имеет место

Теорема. *Для того, чтобы контактная метрическая гиперповерхность в B — пространстве эллиптического гиперболического типа была нормальной, необходимо и достаточно, чтобы почти контактная метрическая структура II рода была интегрируемой, а ξ и η были сопряжены относительно асимптотического тензора.*

ПОДГОТОВКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ КАДРОВ В КАУНАССКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

З. ЖЕМАЙТИС

Восстановление университета в Литве стало возможным только в результате победы Великой Октябрьской революции. Оно было осуществлено таким же путем, как в свое время был создан Казанский университет. Были привлечены к работе люди, имеющие опыт работы в других высших школах, а также наиболее серьезные специалисты практики. Педагогическая работа велась вообщем успешно, но подготовка новых кадров математиков для работы в высшей школе была поставлена весьма неудовлетворительно как по недостаточной опытности научно-педагогического персонала, так и за отсутствием института аспирантуры. За время деятельности университета в Каунасе (1922—1940 г.г.) были подготовлены и удостоены первых научных степеней всего только два молодых математика, остальные молодые люди, изучавшие математику, включались в работу средней школы. Слабы были и результаты научной работы университеского состава математиков: за все время ими было опубликовано всего 5 научных работ.

ИЗ ОПЫТА ПРЕПОДАВАНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ В ЛИТОВСКОЙ СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

З. ЖЕМАЙТИС

Современная литовская средняя школа начала организовываться во время первой мировой войны. В учебные планы была по традиции, вернее, по инерции включена только элементарная математика. Автором доклада уже в 1923—24 г.г. был возбужден вопрос о необходимости включения в программы элементов аналитической геометрии, дифференциального и интегрального исчислений как дисциплин, методы и символика которых проникают ныне во все физико-математические и естественные, отчасти и в общественные науки. После нескольких лет упорной борьбы, поддержанной конференциями математиков и физиков Литвы, министерство просвещения согласилось провести реформу программ. Осуществление ее было сопряжено с большими трудностями, но результаты были вполне положительны.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ И ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ ПРИБОРЫ В СТАРОЙ ВИЛЬНЮССКОЙ АКАДЕМИИ

Б. ХМЕЛЕВСКИЙ

1. Вычислительные и измерительные приборы применялись еще в период рабовладельческого строя. Однако, их назначение ограничивалось решением отдельных вопросов жизненной практики или отдельных научных проблем того времени (прием египетских гапедонаптов для построения прямого угла на местности, прибор Никомеда для вычерчивания конхоиды, механический способ решения задачи об удвоении куба, применение «месоляба» и т. д.). Только тогда, когда производительные силы изменились коренным образом, когда в недрах феодального строя зародились элементы капитализма, в пятнадцатом столетии появились некоторые измерительные и вычислительные приборы более общего назначения: «геометрический квадрат» Пурбаха, «посох Якова», изобретенный Леви бен Гершомом, а несколько позже «пропорциональный циркуль» Галлилея, Неперовы счетные палочки и счетная шахматная доска, а также логарифмическая линейка.

2. Названные инструменты были известны в старой вильнюсской академии в XVII столетии. Описание «геометрического квадрата» и «посоха Якова» находим в работах И. Рудомины Дусятского и А. Милевского. «Ниперовы палочки» описаны в «Занимательной арифметике» А. Тыльковского и в некоторых анонимных рукописях вильнюсской академии. Описание пропорционального циркуля находим в трудах К. Семеновича и А. Тылковского, в рукописи И. Россиньоля и даже в подготовленной для печати рукописи начала XIX столетия А. Шагина. С исторической точки зрения эти приборы интересны тем, что в них выражается общая тенденция механизировать более трудоемкие процессы измерения и вычисления.

О методе прямых для задачи Дирихле

Б. КВЕДАРАС, Р. ШИВИЦКИТЕ

Пусть в двумерной плоскости задан прямоугольник $Q=\{0<l<a_1\leqslant x\leqslant a_2,\ 0<b_1\leqslant y\leqslant b_2\}$. В полуплоскости $y\geqslant 0$ с выброшенным прямоугольником Q требуется найти решение уравнения Лапласа

$$\Delta U=0, \tag{1}$$

дважды дифференцируемую (почти всюду) функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую краевым условиям

$$\begin{aligned}
&u(x, 0)=u(x, \infty)=0,\\
&u(\pm\infty, y)=0,\\
&u(x, b_i)=\varphi_i(x),\\
&u(a_i, y)=\psi_i(y), \quad i=1, 2,\\
&u(x, y)|_{x=\pm(l+0)}=u(x, y)|_{x=\pm(l-0)},\\
&\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{x=\pm(l+0)}=\left.\left(h\frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_{x=\pm(l-0)},
\end{aligned} \tag{2}$$

где $h(x, y)$ ограничена при $|x|\leqslant l$, $0\leqslant y<\infty$, а

$\varphi_i(x)$ и $\psi_i(y)$ непрерывны, соответственно, на отрезках $[a_1, a_2]$ и $[b_1, b_2]$ функции.

Для приближенного решения задачи (1)—(2) можно воспользоваться методом сеток. Однако, если полоса $|x|\leqslant l$ достаточно узка, то упомянутый метод трудно реализуем на ЭВМ. В этом случае предлагается решать задачу методом прямых, который легко реализуется и дает достаточную для практических целей точность решения.

Положим $y_k=kh$, $k=0, 1, 2, \ldots, n$, (nh — достаточно большое число), $u(x, y_k)=u_k(x)$ и

$$\frac{\partial^2 u(x, y_k)}{\partial y^2}=h_{k-1}u_{k-1}(x)-2h_k u_k(x)+h_{k+1}u_{k+1}(x),$$

где

$$h_k=\begin{cases}\dfrac{1}{h^2}, & \text{если } |x|>l,\\[2mm] \dfrac{1}{2h^2 l}\displaystyle\int_{-l}^{l} h(x, y_k)\,dx, & \text{если } |x|\leqslant l.\end{cases}$$

Уравнение (1) заменяем системой обыкновенных уравнений

$$\ddot{u}_k(x)+h_{k-1}u_{k-1}(x)-2h_k u_k(x)+h_{k+1}u_{k+1}(x)=0, \qquad k=1, 2, \ldots, n \tag{3}$$

общее решение которой легко находится в любом из интервалов $(-\infty, -l)$, $(-l, l)$, (a_1, a_2) и (a_2, ∞).

Из краевых условий (2), следует что

$$\begin{aligned}
&u_0(x)\equiv u_{n+1}(x)\equiv 0,\\
&u_k(\pm\infty)=0, \qquad k=1, 2, \ldots, n\\
&u_m(x)=\varphi_1(x), \quad \text{при} \quad a_1\leqslant x\leqslant a_2,\\
&u_{m+l}(x)=\varphi_2(x), \quad \text{при} \quad a_1\leqslant x\leqslant a_2,\\
&u_k(a_i)=\psi i(y_k), \quad \text{при} \quad k=m+1, m+2, \ldots, m+l;\ i=1, 2,
\end{aligned} \tag{4}$$

где $b_1=mh$, $b_2=(m+l)h$.

Добавив к этим условиям условия гладкости решения в точках разрыва коэффициентов, т. е.

$$\begin{aligned}
&u_k(\pm l-0)=u_k(\pm l+0),\\
&u'_k(\pm l-0)=u'_k(\pm l-0), \qquad k=1, 2, \ldots, n,\\
&u_k(a_i-0)=u_k(a_i+0),\\
&u'_k(a_i-0)=u'_k(a_i+0), \qquad i=1, 2;\ k=1, 2, \ldots, m-1, m+l+1, \ldots, n
\end{aligned} \tag{5}$$

получаем, что решение задачи (3)—(5) единственно, удовлетворяет принципу максимума и аппроксимирует решение задачи (1)—(2) с точностью порядка $h^2+\max\limits_x\left|u\big(x, (n+1)h\big)\right|$. Кроме того, очень просто находится аналитическое выражение решения $u_k(x)$, значение которого в любой точке x при любом k легко подсчитать на ЭВМ.

О решении краевой задачи для одной системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных

П. Ю. ЭЙДУКЯВИЧЮС

Рассматривается система уравнений:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho u_\infty^2}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\nu(\Theta)}{u_\infty}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]+2\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\nu(\Theta)}{u_\infty}\frac{\partial u}{\partial x}\right], \tag{1}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho u_\infty^2}\frac{\partial p}{\partial y}+2\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\nu(\Theta)}{u_\infty}\frac{\partial v}{\partial y}\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\nu(\Theta)}{u_\infty}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right], \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \tag{3}$$

$$u\frac{\partial \Theta}{\partial x}+v\frac{\partial \Theta}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{a(\Theta)}{u_\infty}\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{a(\Theta)}{u_\infty}\frac{\partial \Theta}{\partial y}\right]+$$
$$+\frac{U_\infty\nu(\Theta)}{c_p(T_w-T_f)}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+4\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right], \tag{4}$$

с граничными условиями:

$$u=0,\ v=0,\ \Theta=1,\qquad x\geqslant 0,\ y\geqslant 0, \tag{5}$$

$$u=1,\ v=0,\ \Theta=0,\ p=p_\infty,\qquad x\geqslant 0,\ y=\infty, \tag{6}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}=\frac{\rho}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty(1-u_1)\,u_1\,dy, \tag{7}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{y=0}=0, \tag{8}$$

$$\left(\frac{\partial \Theta}{\partial y}\right)_{y=0}=\frac{U_\infty c_p\rho}{\lambda_w}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty\Theta_1 u_1\,dy. \tag{9}$$

После исключения функции p, уравнения (1), (2) сводятся к уравнению:

$$v\Delta u-u\Delta v=-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{\nu(\Theta)}{U_\infty}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\frac{\nu(\Theta)}{U_\infty}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]+4\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left[\frac{\nu(\Theta)}{U_\infty}\frac{\partial u}{\partial x}\right]. \tag{10}$$

Для системы уравнений (3), (4), (10) ставится задача Коши с граничными условиями (5), (7), (8), (9), имеющая решение в области $0\leqslant y<\delta$. Решение задачи Коши представляется степенными рядами:

$$u=\sum_{k=1}^{\infty}B_K(x)\,y^K,\quad \Theta=\sum_{k=0}^{\infty}D_K(x)\,y^K. \tag{11}$$

После подстановки (11) в систему (3), (4), (10), получаем две бесконечные рекуррентные системы уравнений:

$$B_{K+3}=F_K(B_{K+2},\ldots,B_1,D_{K+1},\ldots,D_0),\ D_{K+2}=G_K(B_{K+1},\ldots,B_1,D_{K+1},\ldots,D_0). \tag{12}$$

Окончательное решение системы (1) – (4), в области $0\leqslant y<\delta$ совпадающее с (11) и удовлетворяющее условия (6) строится в виде:

$$u=\sum_{k=0}^{\infty}A_K(x)\,y^K e^{-\varphi_K(x)\,y},\quad \Theta=\sum_{k=0}^{\infty}C_K(x)\,y^K e^{-d_K(x)\,y}, \tag{13}$$

где

$$B_K=\sum_{n=0}^{k}A_n(x)\frac{[\varphi_n(x)]^{K-n}}{(K-n)!},\quad D_K=\sum_{n=0}^{k}C_n(x)\frac{[d_n(x)]^{K-n}}{(K-n)!}. \tag{14}$$

В бесконечных системах уравнений (14) каждому коэффициенту B_K и D_K соответствует по два коэффициента A_K, φ_K и C_K, d_K. Поэтому имеется возможность произвольного выбора половины из всех вычисляемых коэффициентов. Выбор произвольных коэффициентов позволяет обеспечить сходимость рядов (13) во всей области $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

Считая $u_1 = u$ и $\Theta_1 = \Theta$ в (7) и (9) исходными и соответственно промежуточными данными итерационного процесса, вычисление решения (11) возможно численными методами.

Об одном решении общей задачи кусочно-линейного программирования

Г. ДЕВУЛИС

Рассматривается следующая задача. Требуется минимизировать кусочно-линейную функцию

$$F(x), \tag{1}$$

при условиях

$$Ax + u = 0 \tag{2}$$

где

$$x = (x_1, \dots, x_L), \ A = \| a_{ij} \|_{T, L}, \ u = (u_1, \dots, u_T).$$

Кусочно-линейной функцией назовем функционал

$$F(x) = a_i + b_i x^T, \qquad \text{если} \ x \in D_i,$$

где

$$b_i = (b_{i_1}, \dots, b_{i_L})$$

и

$$x \in D_i,$$

если

$$\sum_j g_{ij} y_i \geqslant 0, \ i = 1, 2, \dots$$

$$g_{ij} = -1; \ 0; +1, \ y_j = c_j + d_j x^T, \ d_j = (d_{j_1}, \dots, d_{j_L}),$$

также

$$\bigcup_{i=1}^{K} D_i = D,$$

где $D - L$ — мерное евклидово пространство. Требуется выполнение условия

$$a_i + b_i x^T = a_j + b_j x^T,$$

для всех

$$x \in D_{ij},$$

где

$$D_{ij} = D_i \cap D_j, \ i, \ j = 1, \ 2, \dots$$

Пусть ранг матрицы A равен $L - N$. Решив систему (2) относительно $L - H$ базисных переменных и, добавив к полученным уравнениям тождество

$$\tilde{x} = \tilde{x},$$

где

$$\tilde{x} = (x_{k_1}, \dots, x_{k_N}) \ k_i \in K,$$

а число элементов множества K равно N, т. е. $\tilde{x}$ является вектором независимых переменных.

Тогда задачу (1) – (2) сводим к следующей задаче:

$$F(x) \to \min,$$

где

$$x = B\tilde{x} + z$$

и

$$B = \| b_{ij} \|_{L,N}, \ z = (z_1, \dots, z_L),$$

или

$$F(x) = F(B\tilde{x} + z) = F_{\tilde{x}}(\tilde{x}) \to \min \tag{3}$$

Задача решается методом покоординатной оптимизации [1]. Доказывается, что выбранный метод позволяет получить точное решение в случае выпуклости $F(x)$, а в случае многоэкстремальности задачи дает более чем только нахождение локального минимума.

Алгоритм решения задачи состоит из предварительного алгоритма и алгоритма оптимизации. Согласно алгоритму по определенным правилам преобразуется таблица

$$\begin{matrix} xBz \\ yBz, \end{matrix} \tag{4}$$

где

$$y=(y_1, \ldots, y_M)$$

и

$$y_i=\sum_{kek} b_{ik}x_k+z_i,\ B=\| b_{ij} \|_{M,\,N}.$$

Даются принципы построения более специализированных и тем самым более эффективных алгоритмов, для которых существенно уменьшена матрица

$$Q=\left\| \begin{matrix} Bz \\ Bz \end{matrix} \right\| .$$

Доказывается конечность предлагаемых алгоритмов.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Б. Моцкус, Многоэкстремальные задачи в проектировании, Москва, Наука, 1967.
2. Д. Б. Юдин и Е. Г. Гольштейн, Новые направления в линейном программировании Изд-во ,,Советское радио'', Москва, 1966.

Некоторые статистические характеристики литовского языка

Р. МЕРКИТЕ, В. КАЛИНКА

В 1955 г. В. Фукс математически описал процесс образования лингвистических элементов из соответствующих единиц следующим законом

$$p_k=P\{\xi=k\}=e^{-\lambda}\sum_{l=1}^{k}\frac{(\beta_l-\beta_{l+1})\,\lambda^{k-l}}{(k-l)\,!},\ p_0=0,\ k=1,\ 2,\ \ldots, \tag{1}$$

$$\lambda=M_1-\sum_{l}\beta_l,\ \beta_l>\beta_{l+1},\ \beta_1=1,\ \sum_{l}(\beta_l-\beta_{l+1})=1,$$

где M_1 — среднее значение распределения.

Он подробно разъяснил смысл коэффициентов β_l и указал, что β_l и λ можно найти из формул центральных моментов распределения по крайней мере теоретически. Первые β_l и λ хорошо характеризуют некоторые распределения, но сфера действия закона сужалась отсутствием практического способа нахождения β_l и λ. В частности, на эти трудности натолкнулись авторы при исследований литовского языка.

Вероятностное исследование (1) закона дало возможность авторам аналитически найти β_l и λ.

Обозначим начальные моменты распределения $M_0=1,\ M_1,\ M_2,\ \ldots,\ M_n$. Определим функции $V_j(\lambda)$

$$V_j(\lambda)=\frac{1}{j!}\sum_{i=0}^{j}(-1)^i\binom{j}{i}a_i\lambda^{j-i},\ j=1,\ 2,\ldots,\ n,$$

$$V_0(\lambda)=1,$$

где

$$a_i=a_i(M_0,\ \ldots,\ M_i),$$

$$a_i=\sum_{j=0}^{i}c_{ij}M_j,\ i>0,\ a_0=1.$$

Коэффициенты c_{ij} находятся из тождества

$$\sum_{j=0}^{l} c_{ij} \equiv k^j \prod_{j=1}^{l} (k-j).$$

Для простоты вводим $\alpha_l = \beta_l - \beta_{l+1} > 0$. Закон (1) примет следующий вид:

$$p_k = P\{\xi = k\} = e^{-\lambda} \sum_{l=1}^{k} \frac{\alpha_l \lambda^{k-l}}{(k-l)!}, \quad p_0 = 0. \tag{2}$$

Авторами доказана следующая

Теорема. *Параметр закона* (2) λ *находится как один из корней уравнения* $V_n(\lambda)$, $0 < \lambda < M_1 - 1$, *а* $\alpha_{l+1} \neq 0$, $l = 0, 1, 2, \ldots$ n *при найденном* λ *по формуле*

$$\alpha_{l+1} = (-1)^l \sum_{j=l}^{(n-1)} \binom{j}{l} V_j(\lambda).$$

В сущности, λ и α_l характеризуют распределение совершенно так же, как λ и β_l, но при желании можно перейти к коэффициентам β_l по формуле

$$\beta_{l+1} = 1 - \sum_{i=1}^{l} \alpha_i = (-1)^l \sum_{j=l}^{n-1} \binom{j-1}{l-1} V_j(\lambda).$$

Например, распределение числа слогов в словах текста литовского писателя Ю. Балтушиса „Пардуотос васарос“ хорошо характеризуются (1) законом при $\lambda = 0{,}24$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0{,}60$, $\beta_3 = 0{,}27$, $\beta_4 = 0{,}07$, $\beta_5 = 0$.

Оценка сходимости к нормальному закону некоторых параметров цепных дробей

Г. МИСЯВИЧЮС

Каждое число $t \in (0,1)$ представимо в виде

$$t = \cfrac{1}{a_1(t) + \cfrac{1}{a_2(t) + \ldots}}.$$

1. Пусть $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ — ограниченная функция от k натуральных аргументов. Обозначим

$$S_n(t) = \sum_{j=1}^{n} f(a_j, \ldots, a_{j+k}).$$

Легко подсчитать, что

$$M\,S_n(t) = \int_0^1 S_n(t)\,dt = an + o(1),$$

$$D\,S_n(t) = M\left(S_n(t) - MS_n\right)^2 = \sigma^2 n + o(1),$$

a и σ — некоторые константы.

Доказывается следующее предложение: гауссовая мера множества тех точек $t \in (0, 1)$, для которых

$$\frac{S_n(t) - an}{\sigma\sqrt{n}} < x,$$

равна

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

2. Пусть $\varphi(i)$ — положительная функция натурального аргумента, такая что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(i)} = \infty.$$

Обозначим m_i индикатор множества $a_i \geqslant \varphi(i)$, т. е.

$$m_i = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \varphi(i) \geqslant a_i, \\ 0 & \text{если} \quad \varphi(i) < a_i. \end{cases}$$

В этом случае

$$M\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right) = b(n) + o(1),$$

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right) = \sigma^2(n) + o(1),$$

где

$$b(n) = \frac{1}{\lg 2} \sum_{i=1}^{n} \lg\left(1 + \frac{1}{\varphi(i)}\right),$$

$$\sigma^2(n) = \frac{1}{\lg 2} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\varphi(i)} + o(1).$$

Доказано, что гауссова мера множества тех точек, для которых

$$\sum_{i=1}^{n} m_i - b(n) < x\sigma(n),$$

равна

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Мера Гаусса для любого измеримого по Лебегу множества определяется из соотношения

$$\mu(A) = \int_A \frac{dx}{1+x}.$$

В работе главным образом использованы методы Й. Кубилюса и В. Статулявичуса.

О вероятностях больших уклонений

А. АКСОМАЙТИС

Рассматривается последовательность независимых случайных величин

$$\{\xi_k,\ k = 1, 2, \ldots\}$$

с функциями распределения

$$\{F_{\xi_k}(x),\ k = 1, 2, \ldots\}.$$

Вводятся обозначения

$$\bar{S}_n = \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n - A_n}{B_n}, \quad B_n > 0.$$

$G_\alpha(x)$ — устойчивое предельное распределение для $\bar{S}_n$ с характеристической функцией

$$G_\alpha(t) = it\gamma - \lambda\, |t|^\alpha \exp\left\{-i\frac{\pi}{2}(2-\alpha)\frac{t}{|t|}\right\}, \tag{1}$$

где $1 < \alpha \leqslant 2$, $\lambda s 0$ и γ — постоянные.

$\{G_{\alpha k}(x),\ k=1,\ 2,\ \dots\}$ — устойчивые законы семейства (1) с параметрами α, λ_k, γ_k,

$$f_\xi(z)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{zx}dF_\xi(x)$$

для тех z, для которых интеграл сходится

$$\mu_k(m)=\int_{-\infty}^{\infty} x^m d\left(F_{\xi_k}(x)-G_{\alpha k}(x)\right),$$

$$\vartheta_k(p)=\int_{-\infty}^{\infty} |x|^p \left| d\left(F_{\xi_k}(x)-G_{\alpha k}(x)\right)\right|,\quad k=1,\ 2,\dots$$

Будем считать, что

$$\lambda=\frac{1}{\alpha},\quad \gamma=0$$

и выберем

$$A_n=0,\ B_n^\alpha=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k.$$

Налагаем следующие условия:

1°. Существуют такие

$$A>0 \text{ и } l\geqslant\alpha,$$

что

$$\vartheta^k(l)\leqslant A.$$

2°. Существуют такие числа

$$H_1>0 \text{ и } H_2>0,$$

что

$$\mu_k(m)\,|\leqslant H_1H_2^{m-L}\, m!\,\lambda_k$$

для всех $m\geqslant L$.

3°. Для всех n

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\geqslant\varepsilon n>0.$$

Теорема 1. *Если выполнены условия* 1°—3° *то при* $n\to\infty$ *для больших уклонений*

$$0<x\leqslant 0\,(B_n^{\alpha-1})$$

имеем

$$\frac{P\{\bar{S}_n\geqslant x\}}{1-G_\alpha(x)}=\prod_{k=1}^{n} f_{\xi_k}(\tilde{h})\exp\left\{B_nx\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\ \frac{x^{\frac{1}{\alpha}-1}}{B_n}-\tilde{h}\right)\right\}[1+o(1)],$$

где $\tilde{h}=\tilde{h}(x)>0$ — *решение уравнения*

$$xB_n=\sum_{k=1}^{n}[\ln f_{\xi_k}(\tilde{h})]'.$$

Теорема 2. *Если выполнены условия* 1° — 3°, *то при* $n\to\infty$ *для больших уклонений*

$$0<x\leqslant 0\,(B_n^{\frac{(L-\alpha)(\alpha-1)}{L}})$$

имеем

$$P\{\bar{S}_n\geqslant x\}=\left(1-G_\alpha(x)\right)\left(1+o(1)\right).$$

Аналогичные теоремы рассматривались в случае $\alpha=1$.

Колебания сумм независимых случайных величин

Р. УЖДАВИНИС, Й. СТАНКЕВИЧЮС

Пусть

$$X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n,\ \ldots$$

— последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $F(x)$, принадлежащей области притяжения устойчивого закона $G(x)$, характеристическая функция которого имеет следующий вид:

$$f(t,\ \alpha)=\exp(-|t|^{\alpha}), \qquad 0<\alpha\leqslant 2.$$

Тогда устойчивые законы $G(x)$ имеют плотность распределения $g(x,\ \alpha)$, которая следующим образом выражается через характеристическую функцию $f(t,\ \alpha)$:

$$g(x,\ \alpha)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\cos tx \exp(-|t|^{\alpha})\,dt.$$

Введем обозначения:

$$\Omega(x)=F(x)-G(x), \quad \mu=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\,d\Omega(x), \quad \nu_r=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|x|^r\,|d\Omega(x)|$$

Еще обозначим через N_n число перемен знаков в ряде

$$Z_1,\ Z_2,\ \ldots,\ Z_n,$$

где

$$Z_k=X_1+X_2+\ldots+X_k \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

В случае нерешетчатого распределения $F(x)$ найдены следующие предельные соотношения:

а) если $0<\alpha<1$ и $\nu_{1+\alpha}<\infty$, то

$$C(\alpha)=P-\lim\frac{N_n}{\log n}$$

где

$$C(\alpha)=\frac{\Gamma(\alpha+1)\sin\frac{\alpha\pi}{2}}{\alpha\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{g(x,\ \alpha)}{x^{\alpha}}\,dx;$$

б) если $\alpha=1$, $\mu=0$ и $\nu_2<\infty$, то

$$2\pi^2=P-\lim\frac{N_n}{(\log n)^2}$$

в) если $1<\alpha\leqslant 2$, $\mu=0$ и $\nu_{1+\alpha}<\infty$, то

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{\alpha\sin\frac{\pi}{\alpha}\,N_n}{\beta n^{1-\frac{1}{\alpha}}}<x\right)=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\Gamma\left(k\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\right)\sin\pi\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)k}{k!}\,x^k,$$

где

$$\beta=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|x|\,dF(x).$$

Об устойчивости для теоремы Д. А. Райкова

Ю. Ю. МАЧИС

В работе О. В. Шалаевского [1] рассмотрен вопрос об оценке распределений двух независимых случайных величин в предположении, что распределение их суммы близко к закону Пуассона $\Pi(x;\ \lambda)$ с характеристической функцией $\pi(t)=\exp[\lambda(e^{it}-1)]$.

Однако близость в [1] понимается в смысле равномерной метрики, в то время как в круге вопросов устойчивости разложений принята метрика П. Леви (см., например, [2], стр. 238). Кроме того, равномерная метрика вообще неестественна в случае разрывных законов распределения.

Хотя доказательство теоремы О. В. Шалаевского прямо не переносится на случай метрики П. Леви, теорема остается верной.

Теорема. *Пусть функция распределения $F(x)$ суммы $\zeta=\xi_1+\xi_2$ двух независимых случайных величин ξ_1 и ξ_2 удовлетворяет условию*

$$L(F,\ \Pi)<\varepsilon,$$

где правая часть — расстояние между $F(x)$ и $\Pi\ (x;\ \lambda)$ по П. Леви, а $\varepsilon<1$. Пусть $F_i(x)$ — функция распределения величины ξ_i, $i=1,\ 2$, a — верхняя грань тех значений y, для которых $\mathbf{P}\ \{\xi_1<y\}\leqslant\sqrt{\varepsilon}$, и

$$\lambda_1=\int\limits_0^{N+1} xdF_1(x+a);\quad \lambda_2=\int\limits_0^{N+1} xdF_2(x-a);\quad \frac{1}{\varepsilon}=N^N.$$

Тогда выполняются неравенства

$$L\left(F_1\ \Pi\,(x-a;\ \lambda_1)\right)<\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-\omega},$$

$$L\left(F_2,\ \Pi\,(x+a;\ \lambda_2)\right)<\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-\omega},$$

какова бы ни была постоянная $\omega<\frac{1}{2}$, лишь бы только ε было достаточно мало.

ЛИТЕРАТУРА

1. О. В. Шалаевский, Об устойчивости для теоремы Д. А. Райкова, Вестник ЛГУ, № 7, 1959, 41—49.
2. Ю. В. Линник, Разложения вероятностных законов, Ленинград, 1960.

Об эквивалентности мер, соответствующих векторнозначным гауссовским процессам

Ю. И. ГОЛОСОВ, А. А. ТЕМПЕЛЬМАН

Рассматриваются гауссовские случайные процессы $\xi(t)$ со значениями в гильбертовом пространстве H. Найден критерий эквивалентности мер, соответствующих двум таким процессам. Приводится эффективное выражение для производной Радона-Никодима таких мер. Изучаются также гауссовские процессы со значениями в более общих пространствах.

Предельные теоремы для произведения случайных величин со значениями в компактных полугруппах

А. А. ТЕМПЕЛЬМАН

Рассматривается последовательность случайных величин $\xi_1,\ \xi_2,\dots$ со значениями в компактной полугруппе. Доказаны предельные теоремы для произведений $\eta_n=\xi_1\cdot\ldots\cdot\xi_n$ при предложениях, что ξ_i независимы или последовательность $\{\xi_i\}$ стационарна.

Машинный анализ информативности признаков поражения центральной нервной системы

М. Б. НУДЕЛЬ, Э. Э. СЕНКЕНЕ, А. А. ТЕМПЕЛЬМАН

С помощью ЭВМ БЭСМ-2М отобраны признаки, несущие наибольшую информацию о преимущественной локализации поражения центральной нервной системы. Описывается методика отбора и проводится анализ отобранных комбинаций признаков.

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

В работе „ Поведение голоморфной в круге функции при больших значениях ее модуля" (Лит. мат. сб., VI, № 3 (1966), 397–421) по моему недосмотру допущена неточность при оценке модулей коэффициентов ряда (2.21) (стр. 407).

На странице 407. четвертую строку снизу следует читать:

$$\left|\frac{1}{j!}D^j\ln f(w)\right|<2\left\{\frac{K^{\delta}_{(r)}\ln^{(1+\alpha)(1-\gamma)}K(r)}{|\eta|^{j-1}}\left|\frac{\tau}{\eta}\right|+\frac{\beta\ln K(r)}{|\eta|^j}\right\}<$$
$$<2\left\{\frac{K^{\delta}_{(r)}\ln^{(1+\alpha)(1-\gamma)}}{|\eta|^{j-1}}K(r)+\frac{\beta\ln K(r)}{|\eta|^j}\right\};\ \tau=\mathrm{Re}\eta.$$

Вследствии этого неравенство (2.24) на странице 408 в лемме 3 должно выглядеть так:

$$|D^j\ln f(w)|<2\cdot j!\left\{\frac{K^{\delta}_{(r)}\ln^{(1+\alpha)(1-\gamma)}K(r)}{|\eta|^{j-1}}+\frac{\beta\ln K(r)}{|\eta|^j}\right\},\tag{2.24}$$

где η определению соотношением (2.16).

Формулировка теоремы 1 на странице 408 полностью верна, только доказательство случая а), который опирается на оценку (2.24), нужно провести несколько иначе.

На странице 409 неравенство (3.4) нужно вообще исключить, а текст начиная с четвертой строки сверху на 411 странице и кончая девятой строкой снизу на 412 странице следует заменить следующим:

Разделив обе стороны первого сверху тождества на странице 411 на $K^m(r)$ получаем:

$$\left|\frac{w^m f^{(m)}(w)}{f(w)}\cdot\frac{1}{K^m(r)}-1\right|<\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_q}|B_{i_1,\ldots,i_q}|\,\frac{|D\ln f(w)|^{i_1}}{K^{i_1}(r)}\times$$
$$\times\prod_{p=2}^{q}\left|D^p\ln f(w)\cdot\frac{1}{K^p(r)}\right|^{i_p}+\sum_{k=0}^{m-1}|C_k|\,\frac{w^k f^{(k)}(w)}{f(w)}\cdot\frac{1}{K^m(r)}.\tag{3.12}$$

Остается показать, что правая сторона неравенства (3.12) в пределе стремится к нулю при $r\to1$. Здесь нужно иметь ввиду, что $\overline{\lim\limits_{r\to1}}(1-r)K(r)=\infty$, т. е. $K(r)\to\infty$ при $r\to1$. На основании (2.24) находим:

$$\left|D^p\ln f(w)\cdot\frac{1}{K^p(r)}\right|<2\cdot p!\left\{\frac{K^{\delta}(r)\ln^{(1+\alpha)(1-\gamma)}K(r)}{|\eta|^{p-1}K^p(r)}+\frac{\beta\ln K(r)}{|\eta|^pK^p(r)}\right\}.\tag{3.13}$$

Когда

$$|\eta|=\frac{q(1-r)}{K^{1-\delta+\beta}(r)\ln^{(1+\alpha)(1-\gamma)}K(r)}\quad\text{и}\quad 1-r\geqslant K^{-\frac{1}{\lambda'}}(r),$$

верно неравенство:

$$\frac{\beta\ln K(r)}{|\eta|^pK^p(r)}\leqslant\frac{\beta\ln^{(1+\alpha)(1-\gamma)p+1}K(r)}{q^pK^{\left(\delta-\beta-\frac{1}{\lambda'}\right)p}(r)}\xrightarrow[r\to1]{}0,\tag{3.14}$$

так как $\delta-\beta-\frac{1}{\lambda'}\wedge0$, если только $\beta<\frac{\lambda-1}{2\lambda}$; $\lambda>\lambda'>1$ и по (2.12) $\delta<\frac{\lambda+1}{2\lambda}$.

Далее при $p>1$:

$$\frac{K^{\delta}(r)\ln^{(1+\alpha)(1-\gamma)}K(r)}{|\eta|^{p-1}K^{p}(r)}\leqslant\frac{1}{q^{p-1}}\,\frac{\ln^{(1+\alpha)(1-\gamma)p}K(r)}{K^{(p-2)\delta-(p-1)\left(\beta+\frac{1}{\lambda'}\right)+1}(r)}\underset{r\to1}{\to}0, \tag{3.14a}$$

если только

$$(p-2)\,\delta-(p-1)\left(\beta+\frac{1}{\lambda'}\right)+1>0. \tag{3.15}$$

Теперь нетрудно подсчитать, что неравенство (3.15) будет иметь место (учитывая п. 4 (2.12)), если выбрать δ, удовлетворяющее соотношение

$$\frac{p-1}{p-2}\left(\beta+\frac{1}{\lambda'}\right)-\frac{1}{p-2}<\delta<\frac{\lambda+1}{2\lambda}.$$

Последнему соотношению удовлетворить можно. Действительно при $p>2$

$$\frac{p-1}{p-2}\left(\beta+\frac{1}{\lambda'}\right)-\frac{1}{p-2}-\frac{\lambda'+1}{2\lambda'}<0,$$

так как эквивалентное неравенство

$$\beta<\frac{\lambda'-1}{2\lambda'}\cdot\frac{p}{p-1}$$

имеет место в силу условия $\beta<\frac{\lambda-1}{2\lambda}$ и того, что $\frac{p}{p-1}>1$, а λ' можно взять произвольно близким к λ.

Итак, показано, что (3.15) имеет место, а тогда верно и (3.14a). Из (3.12), (3.13), (3.14) и (3.14a) теперь выводим, что

$$\lim_{r\to1}\frac{w^{m}f^{(m)}w}{f(w)}\cdot\frac{1}{K^{m}(r)}=1;\quad m>2,$$

так как последнее слагаемое в (3.12) стремится к нулю при $r\to1$.

А. Нагяле