LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VII Nr. 4, 1967
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VII № 4, 1967

О СВЕРХСХОДИМОСТИ РЯДА ДИРИХЛЕ

А. МИШКЕЛЯВИЧЮС

Введение

Для ряда Дирихле

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\mu_n z} \tag{1}$$

с вещественными показателями μ_n ($\mu_1<\mu_2< \ldots <\mu_n\to\infty$) имеют место [1] следующие теоремы Островского о сверхсходимости:

Теорема 1. *Пусть показатели μ_n ряда* (1) *удовлетворяют условию*

$$\mu_{n_k+1}-\mu_{n_k}>\vartheta\mu_{n_k}, \quad 0<\vartheta<\infty, \tag{2}$$

для бесконечной последовательности индексов n_k. Тогда частичные суммы

$$S_{n_k}(z)=\sum_{j=1}^{n_k} a_j e^{-\mu_j z}$$

при $k\to\infty$ равномерно сходятся в некоторой окрестности каждой точки на границе области сходимости ряда (1), *в которой сумма этого ряда голоморфна.*

Теорема 2. *Если для последовательности индексов n_k, $k=1,2,3, \ldots$, выполняется неравенство*

$$\mu_{n_k+1}-\mu_{n_k}>\vartheta_k \mu_{n_k}, \tag{3}$$

где

$$\lim_{k\to\infty} \vartheta_k=\infty ,$$

то частичные суммы $S_{n_k}(z)$ ряда (1) *при $k\to\infty$ равномерно сходятся в каждом замкнутом и ограниченном множестве, содержащемся в области голоморфности суммы ряда Дирихле* (1). *Кроме того, область голоморфности суммы этого ряда является односвязной.*

Такого же рода теоремы доказаны Г. Л. Лунцем и для ряда Дирихле

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z} \tag{4}$$

с комплексными показателями λ_n,

$$\lambda_n=\mu_n+i\nu_n. \tag{5}$$

удовлетворяющими условию

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\lambda_n}=0 \quad (\text{см. [3]}).$$

В этих теоремах неравенства (2) и (3) заменены следующими:

$$|\lambda_{n_{k}+1}|-|\lambda_{n_k}|>\vartheta\,|\lambda_{n_k}|, \tag{2a}$$

$$|\lambda_{n_{k}+1}|-|\lambda_{n_k}|>\vartheta_k\,|\lambda_{n_k}|, \tag{3a}$$

где ϑ и ϑ_k имеют тот же смысл, что и в теоремах 1 и 2.

В настоящей статье теоремы Островского переносятся на ряд Дирихле (4), комплексные показатели λ_n которого удовлетворяют условиям:

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n=\infty, \tag{6}$$

$$\underset{n=1,2,3,\ldots}{|\arg(\lambda_{n+1}-\lambda_n)|}\leqslant\alpha,\quad 0\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}. \tag{7}$$

Кроме того, показано, что эти теоремы Островского остаются верными, если условие (7) заменить менее ограничивающими условиями

$$\underset{n=1,2,3,\ldots,}{|\arg\lambda_n|}\leqslant\beta,\quad 0\leqslant\beta<\frac{\pi}{2}, \tag{8}$$

$$\mu_1<\mu_2<\cdots<\mu_n<\cdots\Big(\text{см. (5)}\Big), \tag{9}$$

но зато потребовать, чтобы ряд (4) сходился абсолютно.

1. Некоторые вспомогательные предложения

В работе [2] мы показали, что ряд Дирихле (4), показатели λ_n которого удовлетворяют условиям (6) и (7), сходится в области $x>c(y)$, где

$$c(y)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\;\frac{\ln\left|\sum_{k=1}^{n}a_k e^{-iy\lambda_k}\right|}{\mu_n}, \tag{10}$$

если последний предел неотрицателен. Область абсолютной сходимости ряда (4) при условиях (6), (8) и (9) определяется неравенством $x>a(y)$, где

$$a(y)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\;\frac{\ln\sum_{k=1}^{n}\left|a_k e^{-iy\lambda_k}\right|}{\mu_n}, \tag{11}$$

если $a(y)\geqslant 0$. При этом функции $x=c(y)$ и $x=a(y)$ непрерывны на всей оси, $-\infty<y<\infty$. В дальнейшем будем ограничиваться случаем положительных $c(y)$ и $a(y)$, что не уменьшает общности получаемых результатов.

Из равенств (10) и (11) следует, что для данного $\varepsilon>0$ выполняются неравенства

$$\frac{\ln\left|\sum_{k=1}^{n}a_k e^{-iy\lambda_k}\right|}{\mu_n}<c(y)+\varepsilon. \tag{12}$$

и

$$\frac{\ln\sum_{k=1}^{n}\left|a_k e^{-iy\lambda_k}\right|}{\mu_n}<a(y)+\varepsilon \tag{13}$$

при $n>n_0$, $n_0=n_0(y,\varepsilon)$.

В следующих леммах 1 и 2 мы покажем, что эти неравенства выполнены равномерно в любом конечном промежутке $a \leqslant y \leqslant b$ (т.е. они верны при $n > N$, где $N = N(\varepsilon)$).

Лемма 1. *Если показатели λ_n удовлетворяют условиям* (6), (8) *и* (9) *и ряд* (4) *абсолютно сходится в области $x > a(y)$* (см. (11)), *то для данного $\varepsilon > 0$ неравенство*

$$\frac{\ln \sum_{k=1}^{n} \left| a_k e^{-iy\lambda_k} \right|}{\mu_n} < a(y) + \varepsilon \tag{13}$$

выполняется для всех y из заданного промежутка $[a, b]$, начиная с некоторого номера $n > N$.

Доказательство. Пусть $y_0 \in [a, b]$. Тогда имеем при $n > N_1$

$$\frac{\ln \sum_{k=1}^{n} \left| a_k e^{-iy_0\lambda_k} \right|}{\mu_n} < a(y_0) + \frac{\varepsilon}{3}. \tag{14}$$

Из непрерывности функции $x = a(y)$ следует

$$|a(y_0) - a(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{15}$$

при $|y - y_0| < \delta$, $\delta = \delta(\varepsilon)$.

Докажем сначала, что для y из интервала $|y - y_0| < \delta$ выполняется неравенство (13), начиная с номера $n > N_1$. На самом деле, (см. (5))

$$\frac{\ln \sum_{k=1}^{n} \left| a_k e^{-iy\lambda_k} \right|}{\mu_n} = \frac{\ln \sum_{k=1}^{n} |a_k| e^{\nu_k y}}{\mu_n} = \frac{\ln \sum_{k=1}^{n} |a_k| e^{\nu_k y_0} e^{\nu_k (y - y_0)}}{\mu_n}.$$

Пусть

$$h_n = \max(|\nu_1|, |\nu_2|, \ldots, |\nu_n|). \tag{16}$$

Тогда из (8), (14) и (15) следует при $n > N_1$

$$\frac{\ln \sum_{k=1}^{n} \left| a_k e^{-iy\lambda_k} \right|}{\mu_n} < |y - y_0| \frac{h_n}{\mu_n} + \frac{\ln \sum_{k=1}^{n} |a_k| e^{\nu_k y_0}}{\mu_n} <$$
$$< \delta \operatorname{tg}\beta + a(y_0) + \frac{\varepsilon}{3} < \delta \operatorname{tg}\beta + a(y) + \frac{2}{3}\varepsilon.$$

Выбирая $\delta < \frac{\varepsilon}{3 \operatorname{tg}\beta}$, получаем неравенство (13) для $|y - y_0| < \delta$.

Таким образом, мы показали, что неравенство (13) выполнено равномерно в достаточно малой окрестности любой точки y_0. Доказательство леммы завершаем, пользуясь леммой Гейне-Бореля о конечном покрытии.

Лемма 2. *Если показатели λ_n удовлетворяют условиям* (6) *и* (7) *и ряд Дирихле* (4) *сходится в области $x > c(y)$* (см. (10)), *то для данного $\varepsilon > 0$ неравенство*

$$\frac{\ln \left| \sum_{k=1}^{n} a_k e^{-iy\lambda_k} \right|}{\mu_n} < c(y) + \varepsilon \tag{12}$$

выполняется для всех y из заданного промежутка $[a, b]$, начиная с некоторого номера $n>N$.

Доказательство. Фиксируем y_0, $y_0 \in [a, b]$. Тогда для заданного $\varepsilon>0$ при $n>n_0$ будем иметь неравенство

$$\frac{\ln\left|\sum_{k=1}^{n} a_k e^{-iy_0\lambda_k}\right|}{\mu_n} < c(y_0)+\frac{\varepsilon}{4}. \tag{17}$$

Так как функция $x=c(y)$ непрерывна в точке y_0, то

$$|c(y_0)-c(y)|<\frac{\varepsilon}{4} \tag{18}$$

при $|y-y_0|<\delta$, $\delta=\delta(\varepsilon)$.

Докажем неравенство (12) для значений y из интервала $|y-y_0|<\delta$. Для этого вводим обозначения

$$A_k=\sum_{s=1}^{k} a_s e^{-iy_0\lambda_s}, \quad B_k=e^{-i(y-y_0)\lambda_k} \tag{19}$$

и оценим модуль величины

$$\sigma_n(y)=\sum_{k=1}^{n} a_k e^{-iy\lambda_k} \tag{20}$$

при $|y-y_0|<\delta$.

Применив преобразование Абеля к сумме $\sigma_n(y)$, получаем

$$\sigma_n(y)=\sum_{k=1}^{n} a_k e^{-iy_0\lambda_k} e^{-i(y-y_0)\lambda_k}=\sum_{k=1}^{n}(A_k-A_{k-1})B_k=$$

$$=A_nB_n-\sum_{k=1}^{n-1}A_k(B_{k+1}-B_k).$$

Следовательно,

$$|\sigma_n(y)|\leqslant|A_nB_n|+\sum_{k=1}^{n-1}|A_k|\,|B_{k+1}-B_k|. \tag{21}$$

Из неравенства (17) следует

$$|A_k|<Me^{\left[c(y_0)+\frac{\varepsilon}{4}\right]\mu_k}, \quad k=1, 2, 3, \ldots, \tag{22}$$

где M – некоторая положительная постоянная.

Поэтому

$$|A_nB_n|<Me^{\left[c(y_0)+\frac{\varepsilon}{4}\right]\mu_n}e^{\nu_n(y-y_0)}<Me^{\left[c(y_0)+\frac{\varepsilon}{4}\right]\mu_n+h_n\delta}, \tag{23}$$

где h_n определяется равенством (16).

Величину $|B_{k+1}-B_k|$ представим в виде

$$|B_{k+1}-B_k|=|y-y_0|\left|\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} e^{-i(y-y_0)u}\,du\right|.$$

Следовательно,

$$|B_{k+1}-B_k|\leqslant|y-y_0|\int\limits_{l_k}|e^{-i(y-y_0)u}|\,ds,$$

где l_k — отрезок, соединяющий точки λ_k и λ_{k+1},

$$l_k:\eta=\nu_k+(\xi-\mu_k)\operatorname{tg}\varphi_k,\quad \varphi_k=\arg(\lambda_{k+1}-\lambda_k), \tag{24}$$

$$u=\xi+i\eta,\quad \mu_k\leqslant\xi\leqslant\mu_{k+1}.$$

Поэтому

$$|B_{k+1}-B_k|\leqslant|y-y_0|\int\limits_{l_k}e^{(y-y_0)\eta}\,ds.$$

Отсюда следует $\Big($см. (22)$\Big)$

$$|A_k|\,|B_{k+1}-B_k|<Me^{\left[c(y_0)+\frac{\varepsilon}{4}\right]\mu_k}\cdot|y-y_0|\int\limits_{l_k}e^{(y-y_0)\eta}\,ds=$$

$$=M|y-y_0|\,e^{\left[c(y_0)+\frac{\varepsilon}{4}\right]\mu_k}\cdot\frac{1}{\cos\varphi_k}\int\limits_{\mu_k}^{\mu_{k+1}}e^{(y-y_0)\left[\nu_k+(\xi-\mu_k)\operatorname{tg}\varphi_k\right]}\,d\xi\leqslant$$

$$\leqslant\frac{M|y-y_0|}{\cos\varphi_k}\int\limits_{\mu_k}^{\mu_{k+1}}e^{\left[c(y_0)+\frac{\varepsilon}{4}\right]\xi+|y-y_0|\,|\nu_k+(\xi-\mu_k)\operatorname{tg}\varphi_k|}\,d\xi.$$

Для оценки последнего интеграла заметим, что

$$|y-y_0|<\delta$$

и

$$|\nu_k+(\xi-\mu_k)\operatorname{tg}\varphi_k|\leqslant|\nu_k|+(\xi-\mu_k)\,|\operatorname{tg}\varphi_k|\leqslant|\nu_k|+(\mu_{k+1}-\mu_k)\,|\operatorname{tg}\varphi_k|=$$

$$=|\nu_k|+|\nu_{k+1}-\nu_k|\leqslant 3\,h_n\qquad\Big(\text{см. }(16)\Big).$$

Кроме того, из (7) вытекает

$$\cos\varphi_k\geqslant\cos\alpha.$$

Следовательно,

$$|A_k|\,|B_{k+1}-B_k|<\frac{M\delta}{\cos\alpha}\,e^{3h_n\delta}\int\limits_{\mu_k}^{\mu_{k+1}}e^{\left[c(y_0)+\frac{\varepsilon}{4}\right]\xi}\,d\xi. \tag{25}$$

Из неравенств (21), (23) и (25) получаем

$$|\sigma_n(y)|<Me^{\left[c(y_0)+\frac{\varepsilon}{4}\right]\mu_n+h_n\delta}+\frac{M\delta}{\cos\alpha}\,e^{3h_n\delta}\int\limits_{\mu_1}^{\mu_n}e^{\left[c(y_0)+\frac{\varepsilon}{4}\right]\xi}\,d\xi<$$

$$<M\left(1+\frac{\delta}{\left[c(y_0)+\frac{\varepsilon}{4}\right]\cos\alpha}\right)e^{\left[c(y_0)+\frac{\varepsilon}{4}\right]\mu_n+3h_n\delta}.$$

Мы получили неравенство

$$|\sigma_n(y)|<M_1\,e^{\left[c(y_0)+\frac{\varepsilon}{4}\right]\mu_n+3h_n\delta}, \tag{26}$$

где

$$M_1=M\left(1+\frac{\delta}{\left[c(y_0)+\frac{\varepsilon}{4}\right]\cos\alpha}\right),\quad |y-y_0|<\delta,$$

из которого следует

$$\frac{\ln|\sigma_n(y)|}{\mu_n} < \frac{\ln M_1}{\mu_n} + c(y_0) + \frac{\varepsilon}{4} + 3\delta\frac{h_n}{\mu_n}.$$

Условия (6) и (7) показывают, что

$$|\varlimsup_{n\to\infty} \arg\lambda_n| \leqslant \alpha,$$

$$|\varliminf_{n\to\infty} \arg\lambda_n| \leqslant \alpha.$$

Не уменьшая общности, можем считать, что для всех n

$$|\arg\lambda_n| < \alpha + \Theta < \frac{\pi}{2}$$

и поэтому

$$\frac{h_n}{\mu_n} < \operatorname{tg}(\alpha + \Theta).$$

Выбирая $\delta < \frac{\varepsilon}{12\operatorname{tg}(\alpha+\Theta)}$ и номер N_1, чтобы при $n > N_1$ было

$$\frac{\ln M_1}{\mu_n} < \frac{\varepsilon}{4},$$

получаем окончательно (см. (18)),

$$\frac{\ln|\sigma_n(y)|}{\mu_n} < c(y) + \varepsilon, \quad \text{где } |y - y_0| < \delta, \quad n > N_1.$$

Доказательство леммы завершаем так же, как и доказательство леммы 1: используем лемму Гейне-Бореля о конечном покрытии промежутка $[a, b]$.

§ 2. Основные неравенства

В дальнейшем воспользуемся еще следующими обозначениями:

$$S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{-\lambda_k z}, \quad R_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k z}; \tag{27}$$

$$P_n(z) = \sum_{k=1}^{n} |a_k e^{-\lambda_k z}|, \quad Q_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k e^{-\lambda_k z}|. \tag{28}$$

Мы получим оценки этих сумм в окрестности кривых $x = c(y)$ и $x = a(y)$, где $c(y)$ и $a(y)$ имеют тот же смысл, что и прежде (см. (10) и (11)).

Лемма 3. *Если показатели* λ_n *удовлетворяют условиям* (6), (8) *и* (9) *и ряд* (4) *абсолютно сходится в области* $x > a(y)$, *то для заданного* $\varepsilon > 0$ *в области* $E: [x > a(y) - \rho,\ a < y < b]$ *выполняется неравенство*

$$P_n(z) < L\left(1 + \frac{|x|}{\rho+\varepsilon}\right) e^{(\rho+\varepsilon)\mu_n}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{29}$$

а в области $F: [x > a(y) + \rho,\ a < y < b]$ *— другое неравенство*

$$Q_n(z) < L\left(1 + \frac{x}{\rho - \varepsilon}\right) e^{(\rho-\varepsilon)\mu_{n-1}}, \quad \varepsilon < \rho, \ n = 1, 2, \ldots, \tag{30}$$

где a, b *и* $\rho > 0$ *— произвольно фиксированные постоянные, а число* $L > 0$ *зависит от* a, b *и* ρ.

Доказательство. Докажем сначала неравенство (30). Для этого рассмотрим выражение $Q_n(z)$ (см. (28)) в области F. Заметим, что $Q_n(z)$ имеет смысл в этой области, так как ряд (4) абсолютно сходится при $z \in F$.

Вводя обозначения

$$C_k = \sum_{s=1}^{k} |a_s| e^{\nu_s y}, \quad D_k = e^{-\mu_k x},$$

применяем преобразование Абеля к бесконечной сумме $Q_n(z)$,

$$Q_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| e^{\nu_k y} e^{-\mu_k x} = \sum_{k=n+1}^{\infty} (C_k - C_{k-1}) D_k =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty} C_k (D_k - D_{k+1}) - C_n D_{n+1}.$$

Следовательно,

$$Q_n(z) \leqslant C_n D_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{\infty} C_k (D_k - D_{k+1}). \tag{31}$$

Но из леммы 1 следует, что при $a < y < b$

$$C_k < L e^{[a(y)+\varepsilon]\mu_k}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где $L > 0$ — некоторая постоянная.

Поэтому при $z \in F$ получаем

$$C_n D_{n+1} < L e^{[a(y)+\varepsilon]\mu_n} e^{-\mu_{n+1} x} < L e^{-[x - a(y) - \varepsilon]\mu_{n+1}} < L e^{-(\rho-\varepsilon)\mu_{n+1}} \tag{32}$$

и

$$C_k (D_k - D_{k+1}) < L x e^{[a(y)+\varepsilon]\mu_k} \int_{\mu_k}^{\mu_{k+1}} e^{-xt}\, dt \leqslant L x \int_{\mu_k}^{\mu_{k+1}} e^{-[x - a(y) - \varepsilon] t}\, dt <$$

$$< L x \int_{\mu_k}^{\mu_{k+1}} e^{-(\varphi-\varepsilon) t}\, dt, \quad 0 < \varepsilon < \rho. \tag{33}$$

Из оценок (32) и (33) следует (см. (31))

$$Q_n(z) < L e^{-(\rho-\varepsilon)\mu_{n+1}} + L x \int_{\mu_{n+1}}^{\infty} e^{-(\rho-\varepsilon) t}\, dt = L \left(1 + \frac{x}{\rho-\varepsilon}\right) e^{-(\rho-\varepsilon)\mu_{n+1}}.$$

Неравенство (29) доказывается аналогично.

Замечание 1. Если z принадлежит ограниченному множеству $E_1 \subset E$ или $F_1 \subset F$, то имеем соответственно при $n > N$ неравенства

$$P_n(z) < e^{(\rho+\omega)\mu_n}, \quad z \in E_1 \tag{34}$$

и

$$Q_n(z) < e^{-(\rho-\omega)\mu_{n+1}}, \quad z \in F_1, \tag{35}$$

где

$$\omega = 2\varepsilon, \quad \omega < \rho.$$

Эти неравенства непосредственно следуют из (29) и (30).

Лемма 4. *Если показатели* λ_n *удовлетворяют условиям* (6), (7) *и ряд Дирихле* (4) *сходится в области* $x>c(y)$, *то для* $\varepsilon>0$ *в области* D: $[x>c(y)-\rho,\ a<y<b]$ *выполняется неравенство* $\left(\text{см. } (27)\right)$

$$|S_n(z)|<L\left(1+\frac{|x|}{(\rho+\varepsilon)\cos\alpha}\right)e^{(\rho+\varepsilon)\mu_n},\quad n=1,\ 2,\ \ldots,\tag{36}$$

а в области G: $[x>c(y)+\rho,\ a<y<b]$ — *другое неравенство*

$$|R_n(z)|<L\left(1+\frac{x}{(\rho-\varepsilon)\cos\alpha}\right)e^{-(\rho-\varepsilon)\mu_{n+1}},\quad \varepsilon<\rho,\ n=1,\ 2,\ \ldots,\tag{37}$$

где $\rho>0$, $L>0$, a *и* b — *постоянные.*

Доказательство. Докажем неравенство (36). Для этого рассмотрим сумму

$$S_n(z)=\sum_{k=1}^{n}a_k e^{-iy\lambda_k}e^{-\lambda_k x},\qquad z\in D.$$

Вводя обозначения

$$A_k=\sum_{s=1}^{k}a_s e^{-iy\lambda_s},\quad B_k=e^{-\lambda_k x}$$

и применяя преобразование Абеля к сумме $S_n(z)$, как и выше, получаем неравенство

$$|S_n(z)|\leqslant|A_nB_n|+\sum_{k=1}^{n-1}|A_k|\,|B_{k+1}-B_k|.\tag{38}$$

Как следует из леммы 2, можно найти такую постоянную $L>0$, что при $\varepsilon>0$ неравенство

$$|A_k|<Le^{[c(y)+\varepsilon]\mu_k}$$

будет выполняться для всех k и всех y из интервала $(a,\ b)$. Следовательно, при $z\in D$ получаем оценки

$$|A_nB_n|<Le^{[c(y)+\varepsilon]\mu_n}e^{-\mu_n x}=Le^{-[x-c(y)-\varepsilon]\mu_n}<Le^{(\rho+\varepsilon)\mu_n}\tag{39}$$

и

$$|A_k|\,|B_{k+1}-B_k|<L|x|\,e^{[c(y)+\varepsilon]\mu_k}\left|\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}e^{-xu}\,du\right|\leqslant L|x|\,e^{[c(y)+\varepsilon]\mu_k}\int_{l_k}|e^{-xu}|\,ds,$$

где путь интегрирования определяется уравнением (24). Поэтому

$$|A_k|\,|B_{k+1}-B_k|<L|x|\,e^{[c(y)+\varepsilon]\mu_k}\frac{1}{\cos\varphi_k}\int_{\mu_k}^{\mu_{k+1}}e^{-x\xi}\,d\xi\leqslant$$

$$\leqslant\frac{L|x|}{\cos\alpha}\int_{\mu_k}^{\mu_{k+1}}e^{-[x-c(y)-\varepsilon]\xi}\,d\xi<\frac{L|x|}{\cos\alpha}\int_{\mu_k}^{\mu_{k+1}}e^{(\rho+\varepsilon)\xi}\,d\xi.\tag{40}$$

Из (39) и (40) следует оценка суммы $S_n(z)$, $z\in D$,

$$|S_n(z)|<\frac{L|x|}{\cos\alpha}\int_{\mu_1}^{\mu_n}e^{(\rho+\varepsilon)\xi}\,d\xi+Le^{(\rho+\varepsilon)\mu_n}<L\left(1+\frac{|x|}{(\varphi+\varepsilon)\cos\alpha}\right)e^{(\rho+\varepsilon)\mu_n}.$$

Неравенство (37) доказывается аналогично.

Замечание 2. Если z меняется в ограниченном множестве $D_1 \subset D$ или $G_1 \subset G$, то при $n > N$ имеем соответственно

$$|S_n(z)| < e^{(\rho+\omega)\mu_n}, \quad z \in D_1 \tag{41}$$

и

$$|R_n(z)| < e^{-(\rho-\omega)\mu_{n+1}}, \quad z \in G_1, \tag{42}$$

где $\omega = 2\varepsilon$, $\omega < \rho$.

Эти неравенства непосредственно следуют из (36) и (37).

Из этих неравенств при $n > N$ легко вытекают и следующие неравенства:

$$|S_n(z)| < e^{(\rho+\omega)|\lambda_n|}, \quad z \in D_1, \tag{43}$$

$$|R_n(z)| < e^{-(\rho-\omega)|\lambda_{n+1}|\cos(\alpha+\Theta)}, \quad z \in G_1. \tag{44}$$

В самом деле, мы допустили (см. лемму 2), что

$$|\arg \lambda_n| \leqslant \alpha + \Theta < \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно,

$$|\lambda_{n+1}| \cos(\alpha + \Theta) < \mu_{n+1}.$$

Аналогично из неравенств (34) и (35) получаем, что

$$P_n(z) < e^{(\rho+\omega)|\lambda_n|}, \quad z \in E_1, \tag{45}$$

$$Q_n(z) < e^{-(\rho-\omega)|\lambda_{n+1}|\cos\beta}, \quad z \in F_1 \qquad \Big(\text{см. } (8)\Big). \tag{46}$$

Полученные неравенства позволяют нам доказать основной результат этой заметки.

§ 3. Теоремы о сверхсходимости

Приводимые ниже теоремы являются обобщением вышеуказанных теорем Островского 1 и 2.

Теорема 3. *Пусть показатели* λ_n *ряда* (4) *удовлетворяют условиям* (7) *и*

$$\lim_{n\to\infty} \arg \lambda_n = 0. \tag{47}$$

Если для бесконечной последовательности индексов n_k

$$|\lambda_{n_k+1}| - |\lambda_{n_k}| > \vartheta |\lambda_{n_k}|, \quad 0 < \vartheta < \infty, \tag{48}$$

то частичные суммы

$$S_{n_k}(z) = \sum_{s=1}^{n_k} a_s e^{-\lambda_s z} \tag{49}$$

при $k \to \infty$ *равномерно сходятся в некоторой окрестности каждой точки на оси сходимости ряда* (4), *в которой сумма этого ряда голоморфна.*

Доказательство теоремы (3) опускаем, так как она следует из более общей теоремы (4), которую мы ниже и приводим.

Теорема 4. *Пусть показатели* λ_n *удовлетворяют условию* (7) *и* ζ_0*-точка на границе* $x = c\,(y)$ *области сходимости ряда* (4) *такая, что* 1) *сумма ряда* (4) *голоморфна в точке* ζ_0, 2) *существует круг* (K), *целиком лежащий в* *области сходимости ряда* (4) *и касающийся границы этой области в точке* ζ_0 *и* 3) *угол* ψ *между касательной к кругу* (K) *в точке* ζ_0 *и мнимой осью удовлетворяет неравенству*

$$|\psi| < \frac{\pi}{2} - \alpha \quad \left(\text{значение } \alpha - \text{см. в } (7)\right).$$

Если для бесконечной последовательности индексов

$$|\lambda_{n_k+1}| - |\lambda_{n_k}| > \vartheta\, |\lambda_{n_k}|, \quad 0 < \vartheta < \infty,$$

то частичные суммы

$$S_{n_k}(z) = \sum_{s=1}^{n_k} a_s\, e^{-\lambda_s z}$$

при $k \to \infty$ *равномерно сходятся в некоторой окрестности точки* ζ_0.

Замечание 3. Если показатели λ_n удовлетворяют условиям (7) и (48), то при $n_k \geqslant n_0$

$$\mu_{n_k+1} - \mu_{n_k} > \vartheta_1\, \mu_{n_k}, \quad 0 < \vartheta_1 < \infty. \tag{50}$$

В самом деле, пусть $\varphi_n = \arg(\lambda_{n+1} - \lambda_n)$ и Θ — произвольное положительное число, удовлетворяющее неравенству $0 < \Theta < \frac{\pi}{2} - \alpha$. Тогда при $n \geqslant n_0$ имеем

$$|\varphi_n| < \alpha + \Theta < \frac{\pi}{2}$$

и

$$\mu_{n_k+1} - \mu_{n_k} = |\lambda_{n_k+1} - \lambda_{n_k}| \cos\varphi_{n_k} > (|\lambda_{n_k+1}| - |\lambda_{n_k}|)\cos(\alpha+\Theta) >$$
$$> \vartheta \cos(\alpha+\Theta)\, |\lambda_{n_k}| \geqslant \vartheta \cos(\alpha+\Theta)\, \mu_{n_k}.$$

Доказательство теоремы 4. Без ограничения общности можем считать, что точка ζ_0 лежит на действительной оси.

1. Допустим сначала, что $\psi = 0$, т.е. как точка ζ_0, так и центр круга (K) (о котором идет речь в формулировке теоремы) лежат на действительной оси. В этом случае сверхсходимость ряда (4) в окрестности точки ζ_0 докажем, повторяя выкладки, обычно приводимые при доказательстве теоремы Островского [1].

Пусть r — радиус круга (K) и число h $(0 < h < 1)$ такое, что $h + h^2 < r$ и $x_0 = \zeta_0 + h$. Около точки x_0, как центра, опишем три окужности (C_1), (C_2) и (C_3), радиусы которых r_1, r_2 и r_3 равны со — ответственно $h - h^2$, $h + h^3$ и $h + h^2$. Очевидно, окружность (C_1) содержится в области $x \geqslant c(y) + h^2$, а окружность (C_3) — в области $x \geqslant c(y) - h^2$. Тогда, если обозначить

$$S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} a_k\, e^{-\lambda_k z}, \quad R_n(z) = f(z) - S_n(z),$$

где $f(z)$ — сумма ряда (4), получаем при $n > N$ следующие оценки (они получаются из (41) и (42) при $\rho = h^2$ и $\omega = h^3$):

$$|S_n(z)| < e^{(h^3 + h^2)\mu_n} \tag{51}$$

внутри окружности (C_3) и

$$|R_n(z)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\, e^{-\lambda_k z}\right| < e^{-(h^2-h^3)\mu_{n+1}} \tag{52}$$

внутри окружности (C_1).

Число h будем считать настолько малым, чтобы окружность (C_3) лежала в области голоморфности суммы $f(z)$ ряда (4). Тогда внутри окружности (C_3) получаем оценку $\Big($см. (51)$\Big)$

$$|R_n(z)| = |f(z) - S_n(z)| \leqslant L + e^{h^2(1+h)\mu_n}, \tag{53}$$

где $L = \max\limits_{z\in(C_3)} |f(z)|$.

Обозначим через $M_k^{(1)}$, $M_k^{(2)}$ и $M_k^{(3)}$ — максимумы модуля $R_{n_k}(z)$ соответственно на окружностях (C_1), (C_2) и (C_3). Тогда при $n_k > N$ из (52) следует

$$\ln M_k^{(1)} < -h^2(1-h)\,\mu_{n_k+1}$$

и в силу (50)

$$\ln M_k^{(1)} < -(1+\vartheta_1)\,h^2(1-h)\,\mu_{n_k}. \tag{54}$$

Аналогично $\Big($см. (53)$\Big)$

$$\ln M_k^{(3)} < \ln(L+1) + h^2(1+h)\,\mu_{n_k}. \tag{55}$$

Оценим величину $M_k^{(2)}$. Для этого используем теорему Адамара о трех окружностях:

$$\ln\frac{r_3}{r_1}\,\ln M_k^{(2)} < \ln\frac{r_3}{r_2}\,\ln M_k^{(1)} + \ln\frac{r_2}{r_1}\,\ln M_k^{(3)},$$

из которой следует неравенство

$$\ln\frac{1+h}{1-h}\,\ln M_k^{(2)} < -(1+\vartheta_1)\,h^2(1-h)\ln\frac{1+h}{1+h^2}\,\mu_{n_k} + h^2(1+h)\ln\frac{1+h^2}{1-h}\,\mu_{n_k} +$$
$$+\ln(L+1)\ln\frac{1+h^2}{1-h} = \left[(1+h)\ln\frac{1+h^2}{1-h} - (1+\vartheta_1)(1-h)\ln\frac{1+h}{1-h^2}\right] h^2\mu_{n_k} +$$
$$+\ln(L+1)\ln\frac{1+h^2}{1-h}.$$

Если h рассматривать как переменную, то выражение, стоящее в квадратных скобках, разлагается по степеням h в некоторой окрестности точки $h=0$. Первые члены разложения будут

$$-\vartheta_1 h + 5\left(1+\frac{\vartheta_1}{2}\right)h^2 + \cdots$$

Отсюда следует, что при достаточно малых h выражение в скобках будет отрицательно и меньше, например, $-\frac{\vartheta_1 h}{2}$.

Тогда получаем

$$\ln\frac{1+h}{1-h}\,\ln M_k^{(2)} < -\frac{\vartheta_1 h^3}{2}\,\mu_{n_k} + \ln(L+1)\ln\frac{1+h^2}{1-h}.$$

Отсюда заключаем, что $M_k^{(2)}$ стремится к нулю при $k\to\infty$. Следовательно, $R_{n_k}(z)$ равномерно стремится к нулю внутри и на окружности (C_2), а тем самым и в круге $|z-\zeta_0| < h^3$.

Этим доказано, что частичные суммы $S_{n_k}(z)$ ряда (4) сходятся равномерно в круге $|z-\zeta_0|<h^3$, если только касательная к кругу (K) в точке ζ_0 перпендикулярна действительной оси.

2. Пусть, как и раньше, точка ζ_0 лежит на действительной оси, но $\psi\neq 0$, т.е. касательная в точке ζ_0 к кругу (K) не перпендикулярна действительной оси.

Этот случай приведем к предыдущему поворотом комплексной плоскости

$$z=\zeta e^{-i\psi}.$$

Мы получим тогда ряд Дирихле

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda'_n \zeta},$$

где

$$\lambda'_n=\lambda_n e^{-i\psi}.$$

Чтобы закончить доказательство теоремы, нам достаточно убедиться в том, что показатели λ'_n удовлетворяют условиям вида (7) и (48). Для этого заметим, что

$$\arg(\lambda'_{n+1}-\lambda'_n)=\arg(\lambda_{n+1}-\lambda_n)-\psi,$$

и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|\arg(\lambda'_{n+1}-\lambda'_n)|\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}|\arg(\lambda_{n+1}-\lambda_n)|+|\psi|=\alpha+|\psi|<\frac{\pi}{2}.$$

Другими словами, показатели λ'_n удовлетворяют условию вида (7).

Далее

$$|\lambda'_n|=|\lambda_n|.$$

Поэтому показатели λ'_n удовлетворяют неравенству (48)

$$|\lambda'_{n_k+1}|-|\lambda'_{n_k}|>\vartheta|\lambda'_{n_k}|.$$

Замечание 4. Пусть

$$\beta=\overline{\lim_{n\to\infty}}\arg\lambda_n,\quad \gamma=\underline{\lim_{n\to\infty}}\arg\lambda_n,$$

а величины α и ψ имеют тот же смысл, что в теореме 4. Если

$$\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}\quad\text{и}\quad\alpha-\gamma<\frac{\pi}{2}, \tag{56}$$

то

$$|\psi|<\frac{\pi}{2}-\alpha.$$

Обозначим через $U(\zeta_0)=A\measuredangle\zeta_0 B$ и $U^*(\zeta_0)=\measuredangle A'\zeta_0 B'$ — вертикальные углы, определенные неравенствами

$$U(\zeta_0):-\left(\frac{\pi}{2}+\gamma\right)<\arg(z-\zeta_0)<\frac{\pi}{2}-\beta,$$

$$U^*(\zeta_0):-\left(\frac{\pi}{2}+\gamma\right)<\arg(\zeta_0-z)<\frac{\pi}{2}-\beta.$$

Как известно (см. [4]), ряд (4) расходится в угле $U^*(\zeta_0)$, стороны ζ_0A' и ζ_0B' которого образуют с мнимой осью углы β и γ. Поэтому касательная (l) к границе области сходимости в точке ζ_0 (она является и касательной к кругу (K))

лежит в вертикальных углах $A\zeta_0 B'$ и $A'\zeta_0 B$, и угол ψ между касательной (l) и мнимой осью удовлетворяет неравенствам

$$\gamma \leqslant \psi \leqslant \beta.$$

Последние неравенства в соединении с (56) дают

$$|\psi| + \alpha < \frac{\pi}{2}. \tag{57}$$

Таким образом, утверждение теоремы 4 сохраняется, если условие (57) в формулировке этой теоремы заменить условием (56).

Теорема 5. *Если показатели λ_n удовлетворяют условию (7) и*

$$|\lambda_{n_k+1}| - |\lambda_{n_k}| > \vartheta_k |\lambda_{n_k}|, \quad \lim_{k\to\infty} \vartheta_k = \infty, \tag{58}$$

то частичные суммы $S_{n_k}(z)$ ряда (4) равномерно сходятся при $k \to \infty$ в каждом замкнутом и ограниченном множестве, содержащемся внутри области голоморфности суммы ряда (4). Кроме того, эта последняя область является односвязной.

Теорема 6. *Пусть показатели λ_n ряда (4) удовлетворяют условиям* (47),

$$\mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_n \to \infty \tag{59}$$

и

$$|\lambda_{n_k+1}| - |\lambda_{n_k}| > \vartheta |\lambda_{n_k}|, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots\ 0 < \vartheta < \infty.$$

Тогда частичные суммы $S_{n_k}(z)$ ряда (4) при $k\to\infty$ равномерно сходятся в некоторой окрестности каждой точки на оси абсолютной сходимости ряда (4), в которой сумма этого ряда голоморфна.

Теорема 7. *Пусть показатели λ_n ряда (4) удовлетворяют условиям (8) и (58) и (59). Если ряд (4) имеет область абсолютной сходимости O и сумма этого ряда аналитически продолжается из области O в область G, то частичные суммы $S_{n_k}(z)$ при $k\to\infty$ равномерно сходятся в каждом замкнутом и ограниченном множестве, содержащемся в области G. Кроме того, область G является односвязной.*

Доказательство теорем 5, 6 и 7 опирается на неравенства, полученные в леммах 3 и 4. Посредством этих неравенств эти теоремы доказываются точно таким же образом, как теоремы Островского 1 и 2. Поэтому доказательство этих теорем опускаем.

Замечание 5. Если показатели λ_n удовлетворяют условию (7), а условие (58) (или условие (47) вместе с условием (48)) выполнено для всех n, то граница области сходимости ряда (4) совпадает с границей области голоморфности суммы этого ряда.

В заключение автор благодарит доктора физико-математических наук А. Г. Нафталевича за советы и указания.

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
15.I.1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Bernstein, Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet, Paris, 1933.
2. А. Мишкелявичюс, О границе области сходимости ряда Дурихле, Лит. мат. сб. VI, № 1 (1966), 91–97.
3. Г. Л. Лунц, О сверхсходимости некоторых рядов, Изв. Акад. Наук Арм. ССР, серия физ.-мат. наук, **XV**, № 5 (1962), 11–26.
4. А. Мишкелявичюс, Об области сходимости ряда Дирихле, Лит. мат. сб, V, № 1, (1965), 117–126.

DIRICHLĖ EILUTĖS VIRŠKONVERGAVIMO KLAUSIMU

A. MIŠKELEVIČIUS

(Reziumė)

Šiame straipsnyje nagrinėjama Dirichlė (4) eilutė, kurios rodikliai patenkina (6) ir (7) sąlygas. Šiai eilutei įrodomos teoremos apie virškonvergavimą, analogiškos žinomoms Ostrovskio teoremoms [1].

SUR L'ULTRACONVERGENCE DE SÉRIE DE DIRICHLET

A. MIŠKELEVIČIUS

(Résumé)

On concidère dans cet article une série de Dirichlet (4) avec les exposants λ_n qui vérifient les conditions (6) et (7). On démontre pour cette série les théorèmes sur l'ultraconvergence qui sont analogues à celles de M. Ostrowski [1].