LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VII Nr. 4, 1967
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VII № 4, 1967

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ОДНОРОДНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. А. МИРОЛЮБОВ

Данная статья непосредственно примыкает к работе [2], в которой исследовались, в частности, аналитические решения однородного интегрального уравнения

$$N[f]\equiv M_1(f)+xM_2(f)=0. \tag{1}$$

Здесь

$$M_k(f)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_k} f(x+t)\gamma_k(t)\,dt, \qquad k=1,\ 2, \tag{2}$$

а замкнутый контур C_k содержит внутри себя все особые точки функции $\gamma_k(t)$.

Как и в [2], будем предполагать выполненными следующие условия.

А. Все нули функций

$$L_k(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_k} e^{tz}\gamma_k(z)\,dz, \qquad k=1,\ 2$$

расположены в некоторой горизонтальной полосе, содержащей действительную ось.

Б. Для $\Theta\neq 0,\ \pi$ существует предел

$$\lim_{\rho\to\infty}\frac{1}{\rho}\ln|L_k(\rho e^{i\Theta})|=a_k|\sin\Theta|, \qquad k=1,\ 2.$$

В. $a_1=p<a_2=q$.

В дополнение к сказанному считаем, что функция $L_2(t)$ имеет только простые нули. Последнее ограничение не является, однако, существенным и вызвано лишь желанием избежать громоздких выкладок.

В работе [2] было установлено, что каждому нулю $L_2(t)$ можно привести в соответствие определенное решение уравнения (1). Это решение является или целой функцией экспоненциального типа или регулярно во всей плоскости за исключением вертикального луча $\Lambda:[-iq,\ -i\infty)$. Такие решения названы элементарными. Здесь продолжено изучение указанных решений.

Наряду с уравнением (1) рассматривается сопряженное уравнение

$$N^*[\varphi]\equiv\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1}\varphi(x-t)\gamma_1(t)\,dt+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_2}(x-t)\varphi(x-t)\gamma_2(t)\,dt=0. \tag{3}$$

Для него также можно построить элементарные решения. Эти решения будут соответствовать нулям функции $L_2(-t)$.

Пусть $f_p(x)$ – элементарное решение уравнения (1), отвечающее нулю α_p функции, $L_2(t)$, а $\varphi_\nu(t)$ – аналогичное решение уравнения (3), связанное с нулем $-\alpha_\nu$. В настоящей статье найдена асимптотика названных решений.

Знание асимптотических разложений позволило установить весьма важное свойство (свойство биортогональности) систем $\{f_p(x)\}$ и $\{\varphi_\nu(x)\}$. А именно:

$$(f_p,\ \varphi_\nu)=\begin{cases}0, & p\neq\nu,\\ L_2'(\alpha_p), & p=\nu,\end{cases}\tag{4}$$

причем „скалярное“ произведение $(f_p,\ \varphi_\nu)$ имеет вид

$$(f_p,\ \varphi_\nu)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1}\left[\int\limits_{\alpha}^{\alpha+\eta} f_p(\zeta)\varphi_\nu(\zeta-\eta)\,d\zeta\right]\gamma_1(\eta)\,d\eta+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_2}\left[\int\limits_{\alpha}^{\alpha+\eta}(\zeta-\eta)f_p(\zeta)\varphi_\nu(\zeta-\eta)\,d\zeta\right]\gamma_2(\eta)\,d\eta,\tag{5}$$

где α — параметр.

Очевидно, что при рассмотрении уравнения (1) естественно полагать функцию $f(x)$ регулярной на некотором вертикальном отрезке, имеющем длину более $2q$.

В работе [2] доказано (см. теорему 3), что если функция $f(x)$ не имеет особенностей на интервале $(c,\ a)$, $\mathrm{Im}\,(a-c)>2q$ и для $x\in(c+iq,\ a-iq)$ удовлетворяет уравнению (1), то тогда $f(x)$ будет регулярна и в некоторой вертикальной полосе $-\infty\leqslant d<\mathrm{Re}\,x<b\leqslant+\infty$ с возможным разрезом по лучу Λ или лучу $[iq,\ i\infty)$, причем, если граничная прямая $\mathrm{Re}\,x=d$ (или $\mathrm{Re}\,x=b$) не совпадает с мнимой осью, то в любом ее замкнутом отрезке длины $2q$ у функции $f(x)$ имеется по крайней мере одна особая точка.

Согласно теореме 4 (см. [2]), изучение решений типа $f(x)$ можно свести к изучению двух решений $F(x)$ и $F_1(x)$ того же уравнения (1), аналитических соответственно в полуплоскостях $\mathrm{Re}\,x>d$ и $\mathrm{Re}\,x<b$, исключая, быть может, линию Λ или луч $[iq,\ i\infty)$.

Для решения $F(x)$ в [2] получено также представление

$$F(x)=\lim_{k\to\infty}\sum_{p=1}^{n_k}c_{pk}f_p(x),\tag{6}$$

причем сходимость имеет место в некоторой полуплоскости $\mathrm{Re}\,x>a$ кроме луча Λ. Необходимо отметить что, вообще говоря, $a>d$.

В связи с приведенным результатом несомненный интерес представляет задача об оценке разности $a-d$. Эта задача здесь решается.

Прежде всего заметим, что с помощью „скалярного“ произведения (5) можно установить существование предельных значений c_p для коэффициентов c_{pk} при $k\to\infty$ в представлении (6). Поэтому каждому решению типа $F(x)$ можно поставить в соответствие ряд

$$F(x)\sim\sum_{p=1}^{\infty}c_pf_p(x).\tag{7}$$

Если этот ряд сходится, то сумма его равна $F(x)$.

Введем теперь величину

$$\delta=\varlimsup_{p\to\infty}\frac{1}{|\alpha_p|}\ln\frac{1}{|L_2'(\alpha_p)|}.\tag{8}$$

Пусть $\delta<\infty$, тогда из сходимости последовательности

$$\left\{\sum_{p=1}^{n_k} c_{pk} f_p(x)\right\}$$

следует сходимость ряда (7). Область сходимости представляет собой полуплоскость $\operatorname{Re} x>d+\delta$, исключая луч Λ.

Таким образом, значение разности $a-d$ не превосходит величины δ. В некоторых случаях (см. [1]) эта разность может быть равна δ. Следовательно, полученный результат $a-d\leqslant\delta$, в известном смысле является точным.

Отметим, что случай, когда уравнение (1) вырождается в разностное уравнение, рассмотрен ранее в работе [3].

§ 1. Элементарные решения и их асимптотика

Будем искать решение уравнения (1) в виде

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_l \omega(t)\, e^{xt}\, dt, \tag{9}$$

где l — некоторый контур, а $\omega(t)$ — искомая функция.

Подставляя (9) в уравнение (1), имеем

$$\int_l \{\omega'(t) L_2(t)+\omega(t)[L'(t)-L_1(t)]\}\, e^{xt}\, dt = e^{xt}\omega(t) L_2(t)\Big|_l, \tag{10}$$

причем функции $L_1(t)$ и $L_2(t)$ взяты из условия А.

Выберем функцию $\omega(t)$ так, чтобы выражение в фигурных скобках, стоящее под знаком интеграла, было равно нулю. Последнее условие, в частности, выполняется, если считать

$$\omega(t)=\frac{1}{L_2(t)}\exp\left[\int_0^t \frac{L_1(u)}{L_2(u)}\, du\right]. \tag{11}$$

Возьмем $\varepsilon>0$, тогда на луче $\arg t=\Theta$, $0<\Theta<\pi$, в силу условий А и Б, будем иметь

$$|\omega(t)|<H_1\exp[|t|(-q\sin\Theta+\varepsilon)],\qquad H_1=\text{const}. \tag{12}$$

В таком случае можем записать

$$|e^{xt}\omega(t) L_2(t)|<H_2\exp(\operatorname{Re} xt),$$

где H_2 — некоторая постоянная.

Пусть D_Θ — полуплоскость $\frac{\pi}{2}-\Theta<\vartheta=\arg x<\frac{3}{2}\pi-\Theta$. Если $x\in D_\Theta$, то на основании последней оценки заключаем, что правая часть соотношения (10) стремится к нулю, когда $|t|\to\infty$, $\arg t=\Theta$.

Имея в виду это обстоятельство, в формуле (9) в качестве линии l возьмем бесконечную петлю, охватывающую только один нуль α_p функции $L_2(t)$ и уходящую в бесконечность параллельно лучу $\arg t=\Theta$, $0<\Theta<\pi$. Предполагаем, что l не проходит через нули $L_2(t)$.

При таком выборе контура l, соотношение (10) станет тождеством, если $\omega(t)$ имеет состав (11), а переменное x находится в области D_Θ.

Следовательно, функция $f(x)$ (в дальнейшем она обозначается через $f_p(x)$, а контур l — через l_p), определенная равенством (9), будет решением уравнения (1).

Найдем область аналитичности $f_p(x)$. Пусть $\Theta=\frac{\pi}{2}$. Тогда, с помощью оценки (12), получаем

$$|\omega(t)e^{xt}|<H_1\exp[|t|(-q-\operatorname{Im}x+\varepsilon)], \qquad |t|>|t_0(\varepsilon)|.$$

Вследствие этого интеграл (9) равномерно сходится в любой замкнутой области из полуплоскости $\operatorname{Im}x>-q$.

Аналогичное утверждение справедливо, очевидно, и для производной от интеграла (9). Поэтому $f_p(x)$ будет аналитической функцией в полуплоскости $\operatorname{Im}x>-q$. Пересечение области $D_{\frac{\pi}{2}}$ с указанной полуплоскостью представляет собой полуплоскость $\operatorname{Im}x>0$.

Таким образом, функция $f_p(x)$ есть решение уравнения (1), аналитическое для $\operatorname{Im}x>0$. Пользуясь структурой рассматриваемого уравнения, $f_p(x)$ можно аналитически продолжить из полуплоскости $\operatorname{Im}x>0$ на всю плоскость, исключая, быть может, вертикальный луч Λ. Для этого следует воспользоваться леммой 1 из [2].

Итак, каждому нулю α_p функции $L_2(t)$ можно сопоставить решение $f_p(x)$ уравнения (1). Функция $f_p(x)$ регулярна во всей плоскости, кроме, быть может, линии Λ. Легко видеть, что $f_p(x)$ растет не быстрее целой функции экспоненциального типа.

Построенные таким путем решения называются элементарными.

Обратимся затем к сопряженному уравнению (3). Если следовать предложенной схеме и искать решение в виде

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\omega^*(t)e^{xt}\,dt, \tag{13}$$

то для функции $\omega^*(t)$ получим выражение

$$\omega^*(t)=\exp\left[\int\limits_0^t\frac{L_1(-s)}{L_2(-s)}\,ds\right]. \tag{14}$$

В качестве контура Γ можно взять бесконечную петлю, содержащую внутри один из нулей функции $L_2(-t)$ и уходящую в бесконечность параллельно лучу $\arg t=\Theta$, $0<\Theta<\pi$.

Функция $\varphi(x)$ будет регулярна во всей плоскости, исключая, возможно, вертикальный луч $[0, -i\infty)$.

Занумеруем элементарные решения уравнения (3) таким образом, чтобы нулю $-\alpha_\nu$ функции $L_2(-t)$ соответствовало решение $\varphi_\nu(x)$.

Выясним теперь асимптотическое поведение элементарных решений при $|x|\to\infty$. Подробные выкладки проведем лишь для решений уравнения (1), поскольку для других решений они весьма схожи.

Из представления (11) следует, что в окрестности нуля $t=\alpha_p$ имеет место разложение

$$\omega(t)=(t-\alpha_p)^{\mu_p}\sum_{k=0}^{\infty}A_{kp}(t-\alpha_p)^k, \tag{15}$$

причем

$$\mu_p = \frac{L_1(\alpha_p)}{L_2'(\alpha_p)} - 1. \tag{16}$$

Остановимся первоначально на том случае, когда функция $\omega(t)$ имеет особенность при $t=\alpha_p$.

Пусть b — точка контура l_p, лежащая вне некоторой окрестности нуля $t=\alpha_p$. Тогда интеграл (9) можно записать в виде

$$2\pi i f_p(x) = [1 - \exp(2\pi i \mu_p)] I_1(x) + I_2(x), \tag{17}$$

где

$$I_1(x) = \int\limits_{\infty e^{i\Theta}}^{b} \omega(t) e^{xt} dt, \qquad I_2(x) = \int\limits_{b}^{\overset{+}{(\alpha_p)}} \omega(t) e^{xt} dt.$$

Сделав в интеграле $I_1(x)$ замену $u=t-\alpha_p$ и учтя оценку (12), получим

$$|I_1(x) e^{-\alpha_p x}| < H_2 \int\limits_{\infty e^{i\Theta}}^{\beta} \exp\{[\lambda_1(-q\sin\Theta+\varepsilon) + |x|\cos(\Theta+\vartheta) +$$

$$+ \operatorname{sgn}(\cos\Theta)]\,|u|\}\,|\exp[-\operatorname{sgn}(\cos\Theta)\,|u|]\,du\,|.$$

Здесь $\beta=b-\alpha_p$, $\vartheta=\arg x$, а λ_1 — некоторое положительное число.

Обозначим через $\tilde{D}_\Theta$ область, определенную условиями

$$\frac{\pi}{2} + \varepsilon_1 \leqslant \vartheta + \Theta \leqslant \frac{3}{2}\pi - \varepsilon_1, \quad |x| > r_1 \quad (\varepsilon_1 > 0).$$

Из последней оценки следует, что для всякого натурального числа m и $x \in \tilde{D}_\Theta$ имеет место равенство

$$\lim_{x \to \infty e^{i\vartheta}} x^m e^{-\alpha_p x} I_1(x) = 0. \tag{18}$$

Обратимся теперь к интегралу $I_2(x)$, который запишем в виде

$$I_2(x) = e^{\alpha_p x} \int\limits_{l} \omega(u+\alpha_p) e^{xu} du,$$

причем замкнутый контур l, охватывающий начало, будем считать принадлежащим кругу $|u|<\rho$ — кругу сходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A_{kp} u^k$ (см. (15)). Вследствие такого предположения будем иметь

$$I_2(x) = e^{\alpha_p x} \left[\sum_{k=0}^{n} A_{kp} V_k(x) + R_n(x) \right], \tag{19}$$

где

$$V_k(x) = \int\limits_{l} u^{\mu_p+k} e^{xu} du = x^{-\mu_p-k-1} \int\limits_{C} \tau^{\mu_p+k} e^{\tau} d\tau \tag{20}$$

и

$$R_n(x) = \int\limits_{l} u^{\mu_p} e^{xu} \sum_{k=n+1}^{\infty} A_{kp} u^k du =$$

$$= x^{-\mu_p-n-2} \int\limits_{C} \tau^{\mu_p+n+1} e^{\tau} \sum_{k=n+1}^{\infty} A_{kp} \left(\frac{\tau}{x}\right)^{k-n-1} d\tau. \tag{21}$$

Через C здесь обозначен образ контура l при отображении $\tau = ux$.

Пусть l_1 — луч, идущий из точки $\tau=\beta x$ параллельно лучу $\arg\tau=\psi$, $\psi=\Theta+\vartheta$ и пусть S означает контур, состоящий из луча l_1, проходимого дважды, но в противоположных направлениях, и линии C. Тогда, приняв во внимание (20), для $x\in\tilde{D}_\Theta$ получим

$$V_k(x)=x^{-\mu_p-k-1}\{\Gamma(p,\ k)-[1-\exp(2\pi i\mu_p)]\,W_k(x)\}. \tag{22}$$

Здесь

$$\Gamma(p,\ k)=\int\limits_S \tau^{\mu_p+k}e^\tau d\tau \tag{23}$$

и

$$W_k(x)=\int\limits_{\infty e^{i\psi}}^{\beta x}\tau^{\mu_p+k}e^\tau d\tau. \tag{23*}$$

Из равенства (19), учитывая соотношение (22), найдем

$$x^{\mu_p+1}I_2(x)=e^{\alpha_p x}\left[\sum_{k=0}^{n}A_{kp}\frac{\Gamma(p,\ k)-(1-e^{2\pi i\mu_p})\,W_k(x)}{x^k}+x^{\mu_p+1}R_n(x)\right]. \tag{24}$$

Займемся оценкой функции $W_k(x)$, определенной выражением (23*). Поскольку

$$W_k(x)=e^{\beta x}(\beta x)^{\mu_p+k}\int\limits_{\infty e^{i\psi}}^{0}\left(1+\frac{\eta}{\beta x}\right)^{\mu_p+k}e^\eta d\eta, \tag{23'}$$

то достаточно рассмотреть интеграл, стоящий в правой части последнего равенства.

До сих пор точка b, принадлежащая контуру l_p, была произвольной. Выберем теперь ее таким образом, чтобы соответствующее число $\beta=b-\alpha_p$ можно было записать в виде $\beta=|\beta|\exp\left[i\left(\frac{\pi}{2}+\Delta\right)\right]$, где число Δ весьма мало по абсолютной величине. Относительная свобода при построении контура l_p позволяет утверждать, что такая точка всегда найдется.

Пусть $\chi=\arg\left(1+\frac{\eta}{\beta x}\right)$, тогда будет верно неравенство

$$I_3=\left|\int\limits_{\infty e^{i\psi}}^{0}\left(1+\frac{\eta}{\beta x}\right)^{\mu_p+k}e^\eta d\eta\right|<\int\limits_0^\infty R^{k+\operatorname{Re}\mu_p}e^{-\chi\operatorname{Im}\mu_p}e^{r\cos\psi}dr,$$

в котором

$$R^2=\left|1+\frac{\eta}{\beta x}\right|^2=1+2\left|\frac{\eta}{\beta x}\right|\sin(\Theta+\Delta)+\left|\frac{\eta}{\beta x}\right|^2,\qquad r=|\eta|.$$

Заметим далее, что если $x\in\tilde{D}_\Theta$, то

$$\cos\psi=\cos(\Theta+\vartheta)\leqslant-\sin\varepsilon_1=-\delta_0<0$$

и, следовательно,

$$I_3\leqslant\int\limits_0^\infty(1+r)^{k+\operatorname{Re}\mu_p}\exp[-\chi\operatorname{Im}\mu_p-\delta_0 r]\,dr=\text{const}.$$

Обозначим через $P(\Delta)$ полуплоскость $\Delta<\vartheta=\arg x<\pi+\Delta$ и пусть $\pi(\Theta,\Delta)=\tilde{D}_\Theta\cap P(\Delta)$. Если $x\in\pi(\Theta,\Delta)$, то вследствие формулы (23′) и последней оценки будем иметь

$$|e^{-\beta x}(\beta x)^{-\mu_p-k}\,W_k(x)|<\text{const}.$$

Таким образом, для всякого положительного числа m получаем

$$\lim_{x\to\infty e^{i\vartheta}} x^m W_k(x)=0, \qquad x\in\pi(\Theta,\ \Delta). \tag{25}$$

Приступая к оценке остатка $R_n(x)$, представленного выражением (21), заметим, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A_{kp}u^k$ сходится для $|u|<\rho$, а контур интегрирования l принадлежит указанному кругу. По этой причине

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}|A_{kp}u^{k-n-1}|=\sum_{k=n+1}^{\infty}\left|A_{kp}\left(\frac{\tau}{x}\right)^{k-n-1}\right|<(\rho-\varepsilon^*)^{-n-1}\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{\rho-\varepsilon^*}{\rho-\varepsilon_0}\right)^k,$$

где весьма малые положительные числа ε^* и ε_0 таковы, что $\varepsilon^*>\varepsilon_0$ и $n>n_0(\varepsilon_0)$.

Следовательно,

$$|x^{\mu_p+n+2}R_n(x)|<K(\varepsilon^*,\varepsilon_0)\int_C|e^{\tau}\tau^{\mu_p+n+1}d\tau|<$$

$$<K(\varepsilon^*,\ \varepsilon_0)\int_S|e^{\tau}\tau^{\mu_p+n+1}d\tau|=K_0. \tag{26}$$

Здесь K_0 — некоторая постоянная, $x\in\tilde{D}_\Theta$, а линии C и S были определены ранее.

Принимая во внимание (25) и (26), из равенства (24) имеем

$$\lim_{x\to\infty e^{i\vartheta}} x^n\left[I_2(x)e^{-\alpha_p x}x^{\mu_p+1}-\sum_{k=0}^{n}A_{kp}\frac{\Gamma(p,\ k)}{x^k}\right]=0, \qquad x\in\pi(\Theta,\ \Delta). \tag{27}$$

Наконец, отправляясь от выражения (17) и основываясь на соотношениях (18) и (27), находим для решения $f_p(x)$ в области $\pi(\Theta,\Delta)$ следующее асимптотическое представление

$$2\pi i f_p(x)\backsim e^{\alpha_p x}x^{-\mu_p-1}\sum_{k=0}^{\infty}A_{kp}\frac{\Gamma(p,\ k)}{x^k}. \tag{28}$$

Замечание 1. Изменяя величину Θ в допустимых границах и выбирая подходящим образом аргумент Δ, можно убедиться в том, что асимптотика вида (28) имеет место в области $\pi(\beta)$: $-\beta<\arg x<\pi+\beta$, $|x|>|x_0|$, где положительное число β достаточно мало.

Рассмотрим теперь тот случай, когда функция $\omega(t)$, имеющая разложение (15), регулярна при $t=\alpha_p$.

В качестве пути интегрирования l_p в интеграле (9) можно взять линию, начинающуюся в точке $t=\alpha_p$ и уходящую в бесконечность по лучу $\arg t=\Theta$, $0<\Theta<\pi$. Будем считать, что эта линия не проходит через нули функции $L_2(t)$. Как и выше, выберем на l_p такую точку b, чтобы имело место представление

$$\tilde{\beta}=b-\alpha_p=|\tilde{\beta}|\exp\left[i\left(\frac{\pi}{2}+\Delta\right)\right],$$

где Δ весьма близко к нулю.

Тогда

$$2\pi i f_p(x)=\int_{\alpha_p}^{b}\omega(t)\,e^{xt}\,dt+\int_{b}^{\infty e^{i\Theta}}\omega(t)\,e^{xt}\,dt=$$

$$=e^{\alpha_p x}\left[\int_0^{\tilde\beta}\omega(u+\alpha_p)\,e^{xu}\,du+\int_{\tilde\beta}^{\infty e^{i\Theta}}\omega(u+\alpha_p)\,e^{xu}\,du\right],\qquad(29)$$

причем за путь интегрирования между точками α_p и b взят прямолинейный отрезок, соединяющий эти точки. Если на него попадет нуль функции $L_2(t)$, то этот нуль обходится по дуге окружности достаточно малого радиуса с центром в нем.

Интегрируя по частям $n+1$ раз, будем иметь

$$I_4(x)=\int_0^{\tilde\beta}\omega(u+\alpha_p)\,e^{xu}\,du=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{x^k}\left[e^{\tilde\beta x}\omega^{(k)}(b)-\omega^{(k)}(\alpha_p)\right]+$$

$$+\frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+1}}\int_0^{\tilde\beta}\omega^{(n+1)}(u+\alpha_p)\,e^{xu}\,du.\qquad(30)$$

Пусть переменное x принадлежит области $P(\Delta)$. Тогда $\sin(\vartheta+\Delta)>0$ и, следовательно,

$$\lim_{x\to\infty e^{i\vartheta}}x^{n+1}e^{\tilde\beta x}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\omega^{(k)}(b)}{x^{k+1}}=0.\qquad(31)$$

Так как функция $\omega^{(n+1)}(u+\alpha_p)$ не имеет особенностей на линии интегрирования L, соединяющей точки 0 и $\tilde\beta$, то

$$I_5(x)=\left|\int_0^{\tilde\beta}\omega^{(n+1)}(u+\alpha_p)\,e^{xu}\,du\right|<c^*\int_0^{\tilde\beta}|e^{xu}\,du|=c^*[H_1(x)+H_2(x)].\qquad(32)$$

Здесь C^* – некоторая постоянная, $H_1(x)$ означает сумму интегралов, взятых от функции $|e^{xu}|$ по всем прямолинейным участкам пути интегрирования L, а $H_2(x)$ – сумму интегралов, взятых от указанной функции, по всем дугам окружностей с центрами в соответствующих нулях $L_2(x)$. Если на прямолинейном отрезке, соединяющем точки α_p и b, нет нулей $L_2(t)$, то $H_2(x)=0$.

Для $H_1(x)$ имеем оценку

$$H_1(x)<\int_0^{|\tilde\beta|}\exp[-|x|\,|u|\sin(\vartheta+\Theta)]\,d|u|,$$

из которой вытекает, что $H_1(x)\to 0$ для $|x|\to\infty$, $x\in P(\Delta)$.

Предположим, что на отрезке $[0,\tilde\beta]$ расположено несколько нулей функции $L_2(u+\alpha_p)$. Пусть $\tilde\alpha_s$ – один из них и пусть C_s – дуга окружности $|u-\tilde\alpha_s|=\mu$. В таком случае, считая для определенности $\Delta=-\Delta_0<0$, можем записать

$$T_s(x)=\int_{C_s}|e^{xu}\,du|=\int_{-\left(\frac{\pi}{2}+\Delta_0\right)}^{\frac{\pi}{2}-\Delta_0}|\exp[x(\tilde\alpha_s+\mu e^{i\varphi})]|\,\mu\,d\varphi<$$

$$<\pi\mu\exp\{|x|[\mu-|\tilde\alpha_s|\sin(\vartheta-\Delta_0)]\}.$$

Однако, радиус μ весьма мал. Поэтому

$$T_s(x) \to 0, \quad |x| \to \infty, \quad x \in P(\Delta).$$

Принимая во внимание последний результат и учитывая, что функция $H_2(x)$ представляет собой сумму конечного числа слагаемых вида $T_s(x)$, заключаем, что

$$H_2(x) \to 0, \quad |x| \to \infty, \quad x \in P(\Delta).$$

Основываясь на поведении функций $H_1(x)$ и $H_2(x)$, из (32) находим

$$\lim_{x \to \infty e^{i\vartheta}} I_5(x) = 0, \qquad x \in P(\Delta). \tag{33}$$

С помощью соотношений (31) и (33) из (30) получаем

$$\lim_{x \to \infty e^{i\vartheta}} x^{n+1} \left[I_4(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \frac{\omega^{(k)}(\alpha_p)}{x^{k+1}} \right] = 0, \qquad x \in P(\Delta).$$

Отсюда, в силу представления (29) и формулы (18), будем иметь

$$2\pi i f_p(x) \sim e^{\alpha_p x} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \frac{\omega^{(k)}(\alpha_p)}{x^{k+1}}, \qquad x \in \pi(\Theta, \Delta). \tag{34}$$

Отметим, что для полученного результата сохраняет силу замечание 1.

Указанным путем можно, очевидно, получить асимптотику и для элементарного решения $\varphi_\nu(x)$ сопряженного уравнения (3). Именно, если функция $\omega^*(t)$, определенная равенством (14), регулярна в точке $t = -\alpha_\nu$, то

$$2\pi i \varphi_\nu(x) \sim e^{-\alpha_\nu x} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\omega^{*(k)}(-\alpha_\nu)}{x^{k+1}}. \tag{35}$$

В противном случае

$$2\pi i \varphi_\nu(x) \sim e^{-\alpha_\nu x} x^{-\mu_\nu^* - 1} \sum_{k=0}^{\infty} c_{k\nu} \frac{\Gamma(\nu, k)}{x^k}. \tag{36}$$

Переменное x принадлежит здесь области $\pi(\beta)$, коэффициенты $c_{k\nu}$ взяты из разложения

$$\omega^*(t) = (t + \alpha_\nu)^{\mu_\nu^*} \sum_{k=0}^{\infty} c_{k\nu} (t + \alpha_\nu)^k, \tag{37}$$

а числа $\Gamma(p, k)$ имеют вид (23).

Сравнивая выражения (14) и (37), найдем

$$\mu_\nu^* = -\frac{L_1(\alpha_\nu)}{L_2'(\alpha_\nu)}.$$

Откуда, в силу равенства (16), заключаем, что

$$\mu_\nu^* = -\mu_\nu - 1. \tag{38}$$

Полученные здесь результаты используются в следующем параграфе при установлении свойства биортогональности систем элементарных решений уравнений (1) и (3).

§ 2. Биортогональная система

Пусть $f_p(x)$ и $\varphi_\nu(x)$ — элементарные решения уравнений (1) и (3) соответственно. Составим по формуле (5) „скалярное" произведение (f_p, φ_ν). Оно не зависит от параметра α, поскольку

$$\frac{\partial(f_p, \varphi_\nu)}{\partial\alpha} = \varphi_\nu(\alpha) N[f_p] - f_p(\alpha) N^*[\varphi_\nu] \equiv 0.$$

Отмеченное свойство „скалярного" произведения будет необходимо при доказательстве следующего основного предложения.

Теорема 1. *Последовательность элементарных решений уравнения* (1) *и последовательность аналогичных решений сопряженного уравнения* (3) *образуют биортогональную систему, причем*

$$(f_p, \varphi_\nu) = \begin{cases} 0, & p \neq \nu, \\ L_2'(\alpha_p), & p = \nu. \end{cases} \tag{4}$$

Доказательство. Прежде всего уточним расположение линий интегрирования в выражении (5). В качестве пути интегрирования между точками α и $\alpha+\eta$ возьмем прямолинейный отрезок, соединяющий эти точки. Контур C_1 будет означать границу прямоугольника, стороны которого параллельны координатным осям, высота равна $2(p+\bar{\varepsilon})$, а ширина — $2\bar{\varepsilon}$. Границу аналогичного прямоугольника, имеющего высоту $2(q+\bar{\varepsilon})$ и ширину $2\bar{\varepsilon}$, выберем в качестве контура C_2. Числа p и q взяты здесь из условия В, а $\bar{\varepsilon}>0$ — сколь угодно мало.

Если переменное η изменяется вдоль контура C_1 (или C_2), а $\zeta \in [\alpha, \alpha+\eta]$, то для $|\alpha| > |\alpha_0(\varepsilon_0)|$ будет справедливо неравенство

$$|\arg\alpha - \arg\zeta| < \varepsilon_0, \tag{39}$$

где положительное число ε_0 следует считать сколь угодно малым.

Обозначим через $E(q, \beta)$ множество точек x, подчиняющихся условиям $\left|\arg[x - i(q+\bar{\varepsilon})] - \frac{\pi}{2}\right| < \frac{\pi}{2} + \beta$ и $|x - i(q+\bar{\varepsilon})| > |x_0|$. Величины x_0 и β взяты из замечания 1.

Пусть $\alpha \in E(q, \beta)$. Тогда в выражении (5) все линии интегрирования будут расположены как в области аналитичности рассматриваемых элементарных решений $f_p(x)$ и $\varphi_\nu(x)$, так и в области $\pi(\beta)$.

Разберем сначала тот случай, когда функции $\omega(t)$ и $\omega^*(t)$ имеют соответственно в точках $t=\alpha_p$ и $t=-\alpha_\nu$ особенности. На основании соотношений (28) и (36) можем тогда записать

$$f_p(\zeta)\varphi_\nu(\zeta-\eta) = \exp[\zeta(\alpha_p-\alpha_\nu)+\alpha_\nu\eta]\,\zeta^{-\mu_p-\mu_\nu^*-2}\left(1-\frac{\eta}{\zeta}\right)^{-\mu_\nu^*-1}\left[a_0 + O\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right], \tag{40}$$

где a_0 — некоторая постоянная. Поскольку, однако, элементарные решения определены с точностью до постоянного множителя, то считаем $a_0=1$.

Рассмотрим две возможности: $p\neq\nu$ и $p=\nu$. Заметим, что из условия А следует ограниченность выражения $\operatorname{Im}(\alpha_p-\alpha_\nu)$ для любых p и ν.

Итак, пусть $p\neq\nu$ и $\operatorname{Re}(\alpha_p-\alpha_\nu)\neq 0$. Тогда

$$\operatorname{Re}[\zeta(\alpha_p-\alpha_\nu)] = \operatorname{Re}\zeta\,\operatorname{Re}(\alpha_p-\alpha_\nu)[1-m(p, \nu)\operatorname{tg}\chi],$$

где $\chi=\arg\zeta$, а $m(p, \nu)$ — ограниченная величина для всех p и ν.

Возьмем параметр α из области $E(q, \beta)$ таким, чтобы знак $\operatorname{Re}\zeta$, когда $\zeta \in [\alpha, \alpha+\eta]$, $\eta \in C_2$, был противоположен знаку $\operatorname{Re}(\alpha_p-\alpha_\nu)$. Пусть, к тому же, выполняется условие $|\arg\alpha| < \varepsilon^*$ (или условие $|\pi-\arg\alpha| < \varepsilon^*$), где $\varepsilon^* > 0$ — весьма мало. При таком выборе α, в силу (39), имеем

$$1 - m(p, \nu)\operatorname{tg}\chi \geqslant \tilde{d},$$

где $\tilde{d}$ — некоторая постоянная.

Следовательно,

$$|\exp[\zeta(\alpha_p-\alpha_\nu)]| < \exp[\tilde{d}\operatorname{Re}\zeta\operatorname{Re}(\alpha_p-\alpha_\nu)] <$$
$$< \exp\{\tilde{d}[\operatorname{Re}\alpha - \tilde{\varepsilon}\operatorname{sgn}(\operatorname{Re}\alpha)]\operatorname{Re}(\alpha_p-\alpha_\nu)\}.$$

Учитывая последнее неравенство, а так же выражение (40), найдем

$$\left|\int\limits_{C_2}\left[\int\limits_{\alpha}^{\alpha+\eta}(\zeta-\eta)f_p(\zeta)\varphi_\nu(\zeta-\eta)\,d\zeta\right]\gamma_2(\eta)\,d\eta\right| = O\{\exp[\tilde{d}\operatorname{Re}\alpha\operatorname{Re}(\alpha_p-\alpha_\nu)]\}.$$

Аналогичная оценка будет, очевидно, справедлива и для другого интеграла, участвующего в определении „скалярного“ произведения (5).

В результате всего будем иметь

$$(f_p, \varphi_\nu) = O\{\exp[\tilde{d}\operatorname{Re}\alpha\operatorname{Re}(\alpha_p-\alpha_\nu)]\}.$$

Причем, как уже отмечалось, левая часть не зависит от параметра α. Если устремить в правой части последнего соотношения α к бесконечности вдоль луча, принадлежащего углу $|\arg\alpha| < \varepsilon^*$ (или углу $|\pi-\arg\alpha| < \varepsilon^*$), то получим

$$(f_p, \varphi_\nu) = 0. \tag{41}$$

Пусть теперь $p \neq \nu$, но, однако, $\operatorname{Re}(\alpha_p-\alpha_\nu)=0$. Подчиним выбор параметра α из области $E(q, \beta)$ условию $\operatorname{Im}\alpha\operatorname{Im}(\alpha_p-\alpha_\nu) > 0$. Тогда

$$|\exp[\zeta(\alpha_p-\alpha_\nu)]| < \exp\{-\operatorname{Im}(\alpha_p-\alpha_\nu)[\operatorname{Im}\alpha-(q+\tilde{\varepsilon})\operatorname{sgn}\operatorname{Im}\alpha]\}.$$

и, следовательно,

$$(f_p, \varphi_\nu) = O\{\exp[-\operatorname{Im}(\alpha_p-\alpha_\nu)(\operatorname{Im}\alpha - q\operatorname{sgn}\operatorname{Im}\alpha)]\}.$$

Имея в виду независимость „скалярного“ произведения от параметра α, отсюда заключаем, что и в этом случае верно равенство (41).

Приступим теперь к рассмотрению второй возможности: $p=\nu$. Из представления (40), в силу формулы (38), найдем

$$f_p(\zeta)\varphi_\nu(\zeta-\eta) = e^{\alpha_p\eta}\frac{1}{\zeta}\left(1-\frac{\eta}{\zeta}\right)^{\mu_p}\left[1+O\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right]. \tag{42}$$

Поэтому

$$2\pi i(f_p, \varphi_p) = \int\limits_{C_1} e^{\alpha_p\eta}\gamma_1(\eta)\left[\int\limits_{\alpha}^{\alpha+\eta} O\left(\frac{1}{\zeta}\right)d\zeta\right]d\eta +$$
$$+\int\limits_{C_2} e^{\alpha_p\eta}\gamma_2(\eta)\left[\int\limits_{\alpha}^{\alpha+\eta} d\zeta\right]d\eta - \int\limits_{C_2}\eta e^{\alpha_p\eta}\gamma_2(\eta)\left[\int\limits_{\alpha}^{\alpha+\eta} O\left(\frac{1}{\zeta}\right)d\zeta\right]d\eta.$$

Но так как

$$\int\limits_{\alpha}^{\alpha+\eta} O\left(\frac{1}{\zeta}\right)d\zeta = O\left(\frac{1}{\alpha}\right),$$

если $\eta \in C_k$, $k=1$, 2, то предыдущее равенство нам дает

$$(f_p, \varphi_p)=L_2'(\alpha_p)+O\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

Пользуясь независимостью выражения (f_p, φ_p) от параметра α, отсюда получаем

$$(f_p, \varphi_p)=L_2'(\alpha_p), \tag{43}$$

Рассмотрение случая, когда функции $\omega(t)$ и $\omega^*(t)$ регулярны соответственно в точках $t=\alpha_p$ и $t=-\alpha_\nu$, проводится совершенно аналогично. При этом следует пользоваться представлениями (34) и (35). Равенства $\nu=p$ здесь не может быть, поскольку оно противоречит зависимости (38).

Остается исследовать тот случай, когда функция $\omega(t)$ регулярная при $t=\alpha_p$, а $\omega^*(t)$ имеет особенность в точке $t=-\alpha_\nu$. Если $\nu\neq p$, то равенство (41) устанавливается тем же путем, что и в первом случае.

Пусть $p=\nu$. Согласно предположению, в формуле (15) μ_p есть натуральное число или нуль и мы можем записать

$$\omega^{(s)}(\alpha_p)=0, \quad s=0,\ 1,\ \ldots,\ \mu_p-1; \quad \omega^{(\mu_p)}(\alpha_p)=d_n\neq 0.$$

В таком случае, привлекая асимптотику элементарных решений (с учетом нормировки) и соотношение (38), будем иметь

$$f_p(\zeta)\varphi_p(\zeta-\eta)=e^{\alpha_p\eta}[\zeta^{-\mu_p-1}+O(\zeta^{-\mu_p-2})](\zeta-\eta)^{-\mu_p^*-1}\left[1+O\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right]=$$
$$=e^{\alpha_p\eta}\left[\frac{1}{\zeta}+O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right)\right]\left(1-\frac{\eta}{\zeta}\right)^{\mu_p}.$$

Поскольку полученное выражение совпадает с (42), то ход дальнейших рассуждений известен. В итоге получим равенство (43).

Тем самым доказательство теоремы завершено.

В заключение настоящего параграфа установим справедливость следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть $F(x)$ — решение уравнения* (1), *аналитическое в полуплоскости* $\operatorname{Re} x>d$, *разрезанной по лучу* Λ, *а* $\varphi_\nu(x)$ — *элементарное решение уравнения* (3), *отвечающее нулю* — α_ν, $\operatorname{Re}\alpha_\nu<0$.

Тогда при $\nu\to\infty$

$$(F, \varphi_\nu)=O\{\exp[-(d+\lambda)\operatorname{Re}\alpha_\nu]\},$$

где λ — *число, весьма близкое к нулю.*

Доказательство. В выражении (5) параметр α выберем из области $E(q, \beta)$ так, чтобы $\operatorname{Re}\alpha=d+\varepsilon_2$, где $\varepsilon_2>0$ — сколь угодно мало. Выбранное значение α зафиксируем. Обозначим через $m(\alpha)$ максимум $|F(x)|$ в прямоугольнике со сторонами параллельными координатным осям, с центром в точке α, высотой равной $2(q+\bar{\varepsilon})$ и шириной $2\bar{\varepsilon}$. Учитывая асимптотику решения $\varphi_\nu(x)$, будем иметь

$$\Psi=\left|\int_\alpha^{\alpha+\eta}(\zeta-\eta)F(\zeta)\varphi_\nu(\zeta-\eta)\,d\zeta\right|<$$
$$<m(\alpha)B\int_\alpha^{\alpha+\eta}|(\zeta-\eta)\exp[-\alpha_\nu(\zeta-\eta)]\,d\zeta|<$$
$$<m_1(\alpha)\int_\alpha^{\alpha+\eta}\exp[-\operatorname{Re}\alpha_\nu\operatorname{Re}(\zeta-\eta)+\operatorname{Im}\alpha_\nu\operatorname{Im}(\zeta-\eta)]\,|\,d\zeta\,|.$$

Вследствие условия А выражение $\operatorname{Im} \alpha_\nu$ будет ограниченной величиной при $\nu \to \infty$. Учитывая это обстоятельство, а также неравенство $\operatorname{Re} \alpha_\nu < 0$, из последнего соотношения получим

$$\Psi < m_2(\alpha) \exp[-\operatorname{Re} \alpha_\nu (\operatorname{Re} \alpha + \lambda_0)],$$

причем число λ_0 достаточно близко к нулю. Найденная оценка позволяет записать

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \left[\int_{\alpha}^{\alpha+\eta} (\zeta - \eta) F(\zeta) \varphi_\nu (\zeta - \eta) d\zeta \right] \gamma_2(\eta) d\eta \right| <$$
$$< m_3(\alpha) \exp[-\operatorname{Re} \alpha_\nu (\operatorname{Re} \alpha + \lambda_0)].$$

Аналогичное неравенство будет, очевидно, справедливо и для другого интеграла, входящего в состав „скалярного" произведения (F, I_ν).

Суммируя сказанное, убеждаемся в справедливости леммы.

§ 3. О представлении решения $F(x)$

Как уже указывалось, для решения $F(x)$ уравнения (1), аналитического в некоторой полуплоскости $\operatorname{Re} x > d$, исключая луч Λ, получено в работе [2] выражение

$$F(x) = \lim_{k \to \infty} \sum_{p=1}^{n_k} c_{pk} f_p(x). \tag{6}$$

Отметим, что сходимость имеет место в полуплоскости $\operatorname{Re} x > a > 0$, где, вообще говоря, $a > d$, а элементарные решения $f_p(x)$ соответствуют тем нулям функции $L_2(t)$, которые расположены в области $Q: |\operatorname{Im} t| < b_0$, $\operatorname{Re} t < b_1$.

Легко видеть, что коэффициенты C_{pk} из (6) имеют предельные значения C_p при $K \to \infty$. В самом деле, пусть $\varphi_\nu(x)$ — элементарное решение сопряженного уравнения (3), отвечающее нулю $-\alpha_\nu$, причем $\operatorname{Re} \alpha_\nu < 0$. Тогда из представления (6) в силу теоремы 1, найдем

$$c_\nu = \lim_{k \to \infty} c_{\nu k} = \frac{(F, \varphi_\nu)}{L_2'(\alpha_\nu)}. \tag{44}$$

Вследствие этого, функции $F(x)$ можно привести в соответствие ряд, составленный из элементарных решений уравнения (1)

$$F(x) \sim \sum_{r=1}^{\infty} c_r f_r(x). \tag{7}$$

Если ряд (7) сходится в некоторой области D, то в этой области его сумма равна $F(x)$ ($f_r(x)$ и $F(x)$ в D предполагаются аналитическими). Действительно, поскольку

$$\left| F(x) - \sum_{r=1}^{n_k} c_r f_r(x) \right| \leqslant \left| F(x) - \sum_{r=1}^{n_k} c_{rk} f_r(x) \right| + \left| \sum_{r=1}^{n_k} (c_r - c_{rk}) f_r(x) \right|, \qquad x \in D,$$

то, на основании (6) и (44), для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $K_0(\varepsilon)$, что при $K > K_0(\varepsilon)$ правая часть последнего соотношения будет меньше ε.

Пользуясь структурой рассматриваемого уравнения (1), можно установить довольно важное свойство ряда (7). А именно, справедлива

Лемма 2. *Пусть положительные числа* ρ *и* R *таковы, что* $R-\rho>4q$ *и пусть ряд* (7) *сходится в области* G: $\rho<\operatorname{Im} x<R$, $\operatorname{Re} x>\eta$.

Тогда этот ряд сходится и в полуплоскости $\operatorname{Re} x>\eta$ *за исключением точек луча* Λ.

Доказательство. Если $S_n(x)=\sum\limits_{p=0}^{n} c_p f_p(x)$ — частная сумма ряда (7), то последовательности $\{M_1(S_n)\}$ и $\{M_2(S_n)\}$ будут сходиться соответственно в полуполосах $\operatorname{Re} x>\eta$, $\rho+p<\operatorname{Im} x<R-p$ и $\rho+q<\operatorname{Im} x<R-q$, $\operatorname{Re} x>\eta$.

Функция $S_n(x)$, как сумма конечного числа элементарных решений, тоже удовлетворяет уравнению (1). Поэтому в области, представляющей внешность третьего координатного угла, имеем

$$M_1(S_n)=-xM_2(S_n).$$

Отсюда вытекает сходимость последовательности $\{M_2(S_n)\}$ для всех x, подчиняющихся условиям $\rho+p<\operatorname{Im} x<R-p$ и $\operatorname{Re} x>\eta$.

Пусть r — достаточно большое число, а $\beta>0$ — достаточно мало. Обозначим через $T(r,\beta)$ прямоугольник, принадлежащий области G, причем длина его горизонтальной стороны равна r, а расстояние границы прямоугольника до границы G равно β.

Пользуясь интегральной формулой Коши, для $S_n(x)$ получим представление

$$S_n(x)=S_{n1}(x)+S_{n2}(x), \tag{45}$$

где, например,

$$S_{n1}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{S_n(t)}{t-x}\,dt, \tag{45}$$

а Γ — та часть границы $T(r,\beta)$, которая принадлежит полуплоскости $\operatorname{Im} x\leqslant R^*$. Здесь число R^* фиксировано и таково, что $\rho+\beta<R^*<R-\beta$.

Так как особые точки функции $S_n(x)$ могут быть лишь на луче $[-iq,-i\infty)$, а $S_{n2}(x)$ не имеет особенностей в полуполосе G_1: $\eta+\beta<\operatorname{Re} x<r$, $\operatorname{Im} x<R-\beta$, то из (45) следует аналитичность функции $S_{n1}(x)$ в области G_1, за исключением луча Λ. Кроме того, в соответствующих областях имеем $S_{nj}(x)=0\left(\frac{1}{x}\right)$, $=1, 2$.

Покажем, что последовательность $\{S_{n1}(x)\}$ сходится в области G_1, разрезанной вдоль линии Λ. Такую область обозначим через G_2.

Пусть $\tilde{M}_2(s)$ — оператор вида (2), порожденный четной функцией $\tilde{L}_2(t)=L_2(t)L_2(-t)$. Применяя его к соотношению (45), получим

$$\tilde{M}_2(S_{n1})=\tilde{M}_2(S_n)-\tilde{M}_2(S_{n2}). \tag{46}$$

Выше показано, что последовательность $\{M_2(S_n)\}$ сходится для всех x, удовлетворяющих требованиям $\rho+p<\operatorname{Im} x<R-p$ и $\operatorname{Re} x>\eta$. В таком случае последовательность $\{M_2(S_n)\}$ будет сходиться в области: $p+q+\rho<\operatorname{Im} x<R-p-q$, $\operatorname{Re} x>\eta$. Аналогично устанавливаем, что на любом ограниченном замкнутом множестве из вертикальной полуполосы $\eta+\beta<\operatorname{Re} x<r$, $\operatorname{Im} x<R-2q-\beta$ последовательность $\{\tilde{M}_2(S_{n2})\}$ сходится равномерно.

Принимая во внимание сказанное, из (46) получим равномерную сходимость последовательности $\{\tilde{M}_2(S_{n1})\}$ внутри прямоугольника T_0, вершины которого находятся в точках $(\eta+\beta)+i(\rho+p+q)$, $r+i(\rho+p+q)$, $r+i(R-2q-\beta)$ и $(\eta+\beta)+i(R-2q-\beta)$.

Заметим теперь, что функция

$$W_n(x)=\tilde{M}_2(S_{n1}) \tag{47}$$

не имеет особых точек в полуплоскости $\operatorname{Im} x > R^*+2q$ и в полуполосе $\eta+\beta<\operatorname{Re} x<r$, $\operatorname{Im} x>\rho+2q+\beta$. Кроме того, из интегрального представления оператора $\tilde{M}_2(S_{n1})$ следует, что в указанной области $W_n(x)=O\left(\frac{1}{x}\right)$, $|x|\to\infty$.

Применяя к (47) формулу обращения оператора (см. [1]), будем иметь

$$S_{n1}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L W_n(x-t)\,\Phi_2^*(t)\,dt \tag{48}$$

для всех x из полуплоскости $\operatorname{Im} x>R^*$, а также для x, расположенных внутри прямоугольника $T(r,\ \beta)$.

Напомним что построение контура L ведется следующим образом. На лучах $\arg t=-\frac{\pi}{6}$ и $\arg t=-\frac{5}{6}\pi$ на некотором расстоянии R_0 от начала отмечаются точки A и B. На горизонтальном отрезке AB на расстоянии ε справа и слева от мнимой оси берутся точки A_1 и B_1. Пусть, далее, точка C расположена на отрицательной части мнимой оси на расстоянии $2q-\delta_1$ от начала. Тогда контур L представляет собой линию, состоящую из луча $\left(\infty e^{-\frac{\pi}{6}i},\ A\right]$, прямолинейных отрезков $[A,\ A_1]$, $[A_1,\ C]$, $[C,\ B_1]$, $[B_1,\ B]$, и луча $\left[B,\ \infty e^{-\frac{5}{6}\pi i}\right)$.

В формуле (48) функция $\Phi_2^*(t)$ обладает, в частности, следующими свойствами:

1) регулярна во всей плоскости, кроме луча $[-i2q,\ -i\infty)$;
2) вне всякого угла $-\frac{3}{4}\pi-\varepsilon^*<\arg t<-\frac{\pi}{4}+\varepsilon^*$, $\varepsilon^*>0$ справедливо соотношение $\Phi_2^*(t)=0\left(\frac{1}{t}\right)$;
3) в плоскости, за исключением отрицательной части мнимой оси, выполняется условие $\tilde{M}_2(\Phi_2^*)=\frac{1}{t}$.

Учитывая поведение функций $\Phi_2^*(t)$ и $W_n(x)$, а также равномерную сходимость последовательности $\{W_n(x)\}$ внутри области T_0, с помощью равенства (48) устанавливаем равномерную сходимость последовательности $\{S_{n1}(x)\}$ внутри прямоугольника T_1 с вершинами в точках $(\eta+\beta)+i(\rho-h)$, $r+i(\rho-h)$, $r+i(R-\beta)$ и $(\eta+\beta)+i(R-\beta)$, где $h=q-p>0$. При этом все точки луча Λ, принадлежащие T_1, следует считать граничными для T_1.

Повторяя предыдущие рассуждения, мы снова увеличим высоту прямоугольника сходимости и т.д.

Таким путем можно, очевидно, установить сходимость последовательности $\{S_{n1}(x)\}$ в области G_2. Поскольку последовательность $\{S_{n2}(x)\}$ тоже сходится для $x\in G_2$, то из (45) вытекает сходимость в этой области и ряда (7). Опираясь на относительную свободу в выборе чисел r и β, участвующих в определении области $T(r,\ \beta)$, заключаем, что ряд (7) сходится в угле: $\operatorname{Im} x<R$, $\operatorname{Re} x>\eta$.

Вносяв доказательство незначительные изменения, можно получить сходимость ряда (7) и в угле: $\operatorname{Im} x>\rho$, $\operatorname{Re} x>\eta$.

Сопоставляя между собой последние два утверждения, убеждаемся в справедливости леммы.

Полученные выше результаты позволяют приступить к нахождению условий, обеспечивающих сходимость ряда (7). Заметим, что решение этой задачи эквивалентно решению вопроса о возможности представления решения $F(x)$ в виде ряда, составленного из элементарных решений уравнения (1).

Итак, пусть представление (6) справедливо для $\operatorname{Re} x>a>0$ и пусть величина δ, вычисляемая по формуле (8), конечна.

Принимая во внимание асимптотику решения $f_\nu(x)$, а также соотношения (8) и (44), в силу леммы 1 найдем

$$|C_\nu f_\nu(x)|<\exp[\operatorname{Re}(\alpha_\nu x)+(\delta+\varepsilon)|\alpha_\nu|-(d+\lambda)\operatorname{Re}\alpha_\nu], \tag{49}$$

где $\nu>\nu_1(\varepsilon)$, $\varepsilon>0$ и $x\in\pi(\beta)$.

Считая переменное x принадлежащим области G^*: $\rho<\operatorname{Im} x<R$, $\operatorname{Re} x>d$ $(R-\rho>4q)$, из (49) получим

$$|C_\nu f_\nu(x)|=O\{\exp[\operatorname{Re}\alpha_\nu(\operatorname{Re} x-d-\lambda)+(\delta+\varepsilon)|\alpha_\nu|]\}, \tag{50}$$

поскольку $\operatorname{Re}(\alpha_\nu x)=O(\operatorname{Re}\alpha_\nu \operatorname{Re} x)$.

Воспользуемся теперь известной формулой

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\frac{\nu}{|\alpha_\nu|}\leqslant qe,$$

которая имеет место для нулей $\{\alpha_\nu\}$ целой функции $L_2(t)$ первого порядка и конечного типа q. Примем также во внимание довольно очевидное соотношение $|\alpha_\nu|=O(-\operatorname{Re}\alpha_\nu)$. Тогда будем иметь

$$|C_\nu f_\nu(x)|=O[(e^{-\mu})^\nu],$$

где $\mu=\frac{1}{qe}(\operatorname{Re} x-d-\delta-\varepsilon^*)$, а $\varepsilon^*>0$ — весьма мало.

Полученная оценка обеспечивает сходимость ряда (7) в области G^{**}: $\rho<\operatorname{Im} x<R$, $\operatorname{Re} x>d+\delta$. Обращаясь затем к лемме 2, отсюда заключаем, что ряд (7) сходится в полуплоскости $\operatorname{Re} x>d+\delta$, разрезанной вдоль луча Λ.

Таким образом, для решения $F(x)$ уравнения (1) установлена

Теорема 2. *Пусть решение $F(x)$, представленное выражением* (6), *регулярно в полуплоскости* $\operatorname{Re} x>d$ *кроме линии* Λ, *и пусть величина* δ, *вычисляемая по формуле* (8), *конечна.*

Тогда ряд (7) *сходится и притом к $F(x)$ во всяком случае в полуплоскости* $\operatorname{Re} x>d+\delta$, *исключая луч* Λ.

Из этой теоремы сразу получаем

Следствие. Значение разности $a-d$ не превосходит величины δ.

Последний результат является точным в том смысле, что существуют (см. [1]) такие уравнения и такие их решения, для которых $a-d=\delta$.

В заключение отметим, что условия Б и В для функции $L_2(t)$ можно несколько ослабить. Так, не обязательно требовать, чтобы все особые точки функции $\gamma_2(z)$, ассоциированной по Борелю с $L_2(t)$, лежали на симметричном отрезке $[-pi, pi]$, принадлежащем $[-qi, qi]$. Достаточно предположить, что упомянутые точки расположены на некотором отрезке l^* мнимой оси, причем $l^* \subset (-qi, qi]$.

Горьковский Государственный
университет им. Н. И. Лобачевского

Поступило в редакцию
14.II.1967

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Ф. Леонтьев, Ряды полиномов Дирихле и их обобщения, Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова, АН СССР, XXXIX, 1951.
2. А. А. Миролюбов, Аналитические решения одного класса интегральных уравнений, Лит. мат. сб., VI, № 4 (1966), 549–568.
3. А. А. Миролюбов, Об одном применении сопряженного разностного уравнения, Изв. высших учебн. завед., „МАТЕМАТИКА", (в печати).

KAI KURIŲ HOMOGENINIŲ INTEGRALINIŲ LYGČIŲ ANALIZINIAI SPRENDINIAI

A. MIROLIUBOVAS

(Reziumė)

Sakykime, patenkintos sąlygos A, Б ir B ir funkcija $L_2(t)$ iš sąlygos A turi tik paprastus nulius.

Darbe rasta (1) lygties ir sujungtinės (3) lygties elementarių sprendinių asimptotika. Įrodyta, kad šie sprendiniai sudaro biortogonalinę sistemą. Išnagrinėtas uždavinys apie (1) lygties sprendinio išreiškimą eilute, kuri sudaryta iš šios lygties elementarių sprendinių. Nurodoma tokios eilutės konvergavimo sritis.

ANALYTICAL SOLUTIONS OF CERTAIN HOMOGENEOUS INTEGRAL EQUATIONS

A. MIROLYUBOV

(Summary)

It is required that the conditions A, Б, B be satisfied. The function $L_2(t)$ from the condition A is assumed to have only simple zeroes.

Asymptotic expansions are obtained for the elementary solutions of the equations (1) and (3). It is proved that these solutions form a biorthogonal system. There are found the conditions ensuring the convergence of the series (7). The sum of the series is given and its region of convergence is defined.