LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VII Nr. 4, 1967
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VII № 4, 1967

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ УРАВНЕНИЯ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА В ОБОБЩЕННЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ГЕЛЬФОНДА – ЛЕОНТЬЕВА В НЕКОТОРОМ КЛАССЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

Т. И. ДЕМЧЕНКО

Пусть $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ – целая функция такая, что

$$a_k \neq 0, \quad k=0,1, \ldots; \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k| k!^{\frac{1}{\rho}}} = (\rho\sigma)^{\frac{1}{\rho}}, \tag{1}$$

$y(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} y_k x^k$ – произвольная функция, аналитическая в круге $|x|<R$, $0<R\leqslant\infty$. Назовем функцию

$$D^n y(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_{k-n}}{a_k} y_k x^{k-n},$$

введенную в работе [1], обобщенной производной Гельфонда-Леонтьева n-го порядка от функции $y(x)$, порожденной функцией $f(x)$. Уравнения бесконечного порядка в обобщенных производных с постоянными коэффициентами подробно изучены в работах А. Ф. Леонтьева и его учеников (см. [2]–[4] и др.), а с полиномиальными коэффициентами исследованы в работах [5], [6] при определенных условиях на коэффициенты уравнения.

Целью настоящей работы является исследование уравнения бесконечного порядка в обобщенных производных Гельфонда-Леонтьева с полиномиальными коэффициентами

$$Ly \equiv \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x)\, D^k y(x) = g(x), \quad P_k(x) = \sum_{s=0}^{p} a_s^k x^s, \ p \geqslant 1, \tag{2}$$

при условии

$$\sup_{0\leqslant s\leqslant p} \varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_s^k|\, k!^{\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\nu}}} = D < \infty \tag{3}$$

в классе целых функций $\left[\nu, \frac{1}{\nu}(\rho\sigma)^{\frac{\nu}{\rho}} D^{-\nu}\right)$.

Можно показать, что для применимости оператора Ly к классу $[\nu, \tau]$, $\nu<\rho$, необходимо и достаточно, чтобы $D<(\rho\sigma)^{\frac{1}{\rho}}(\nu\tau)^{-\frac{1}{\nu}}$. Отсюда следует, что если оператор Ly удовлетворяет условию (3), то максимальным классом применимости (в шкале классов $[\nu, \alpha]$) будет класс $\left[\nu, \frac{1}{\nu}(\rho\sigma)^{\frac{\nu}{\rho}} D^{-\nu}\right)$. При этом обычная применимость эквивалентна регулярной (определения различных типов применимости даны в работе [7]).

Отметим, что функции $d_s(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_s^k k!^{\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\nu}} z^k$, $s=0, 1, \ldots, p$, в силу (3) аналитичны в круге $|z| \leqslant (\nu\tau)^{\frac{1}{\nu}} (\rho\sigma)^{-\frac{1}{\rho}}$ и, значит, в немного более широком $|z| \leqslant [(\nu\tau)^{\frac{1}{\nu}}+h](\rho\sigma)^{-\frac{1}{\rho}}$, $h=h(\tau)>0$, для любого $\tau<\frac{1}{\nu}(\rho\sigma)^{\frac{\nu}{\rho}} D^{-\nu}$.

Исследуем оператор Ly в классе $[\nu, \tau]$, $\nu<\rho$, $\tau<\frac{1}{\nu}(\rho\sigma)^{\frac{\nu}{\rho}} D^{-\nu}$, для чего введем банаховы пространства функций

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty} y_k x^k:$$

B_Q с нормой

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|y_k|}{|a_k|} Q^k k!^{\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\rho}}=\|y\|_{B_Q}$$

и C_Q с нормой

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|y_k|}{|a_{k-p}|} Q^k |(k-p)|!^{\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\rho}}=\|y\|_{C_Q}$$

для

$$Q \in \Omega=\left[\frac{(\rho\sigma)^{\frac{1}{\rho}}}{(\nu\tau)^{\frac{1}{\nu}}+h}, \frac{(\rho\sigma)^{\frac{1}{\rho}}}{(\nu\tau)^{\frac{1}{\nu}}}\right];$$

считаем, что $a_n=a_{|n|}$, когда $n<0$. Очевидно, что

$$\left[\nu, \frac{1}{\nu}(\rho\sigma)^{\frac{\nu}{\rho}} Q^{-\nu}\right) \subseteq B_Q, C_Q \subseteq \left[\nu, \frac{1}{\nu}(\rho\sigma)^{\frac{\nu}{\rho}} Q^{-\nu}\right].$$

Лемма 1. *Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям* (1) *и*

$$\sup_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|(n+1)^{\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\rho}}}=A<\infty. \tag{4}$$

Тогда оператор Ly $(p \geqslant 1)$ является линейным, непрерывным из B_Q в C_Q при любом фиксированном $Q \in \Omega$.

В классе $[\nu, \tau]$ уравнение (2) эквивалентно алгебраической системе

$$(Ly)_m=\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{[p, m]} a_s^k \frac{a_{m-s}}{a_{m+k-s}} y_{m+k-s}=g_m, \qquad m=0, 1, \ldots, \tag{5}$$

где

$$[p, m]=\min\{p, m\}.$$

Пусть $y(x) \in B_Q$, $Q \in \Omega$, обозначим

$$d_k=\frac{|y_k|}{|a_k|} Q^k k!^{\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\rho}}.$$

Из условия (4) следует, что

$$\frac{|a_{m-s}|\,|(m-p)|!^{\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\rho}}}{|a_{m-p}|\,(m-s)!^{\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\rho}}} \leqslant A^{p-s} < A^p+1$$

для любых m и $0 \leqslant s \leqslant [p,\ m]$. Поэтому

$$\|Ly\|_{C_Q} = \sum_{m=0}^{\infty} |(Ly)_m|\ \frac{Q^m\,|(m-p)|!^{\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\rho}}}{|a_{m-p}|} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{[p,m]} |a_s^k|\ \frac{|a_{m-s}|}{|a_{m-p}|}\ d_{m+k-s}\,Q^{-k+s}\left[\frac{|(m-p)|!}{(m+k-s)!}\right]^{\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\rho}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{[p,m]} |a_s^k|\,k!^{\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\nu}}\ Q^{-k+s}\ \frac{|a_{m-s}|\,|(m-p)|!^{\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\rho}}}{|a_{m-p}|\,(m-s)!^{\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\rho}}}\ d_{m+k-s}\left[\frac{(m-s)!\,k!}{(m+k-s)!}\right]^{\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\rho}} \leqslant$$

$$\leqslant (A^p+1)\sum_{l=0}^{\infty} d_l \sum_{k=0}^{l}\sum_{s=0}^{p} |a_s^k|\,k!^{\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\nu}}\ Q^{-k+s} \leqslant$$

$$\leqslant (A^p+1)\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{p} |a_s^k|\,k!^{\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\nu}}\ Q^{-k+s}\sum_{l=0}^{\infty} d_l = H(Q)\,\|y\|_{B_Q},\quad H(Q)<\infty,\quad Q\in\Omega.$$

Замечание 1. Если $p=0$ и выполняются условия (1), то оператор Ly является непрерывным из B_Q в C_Q, $Q\in\Omega$, так как

$$(Ly)_m = \sum_{k=0}^{\infty} a_0^k\,y_{m+k},\qquad m=0,\ 1,\ \ldots,$$

и

$$\|Ly\|_{C_Q} \leqslant \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} |a_0^k|\,d_{m+k}\,Q^{-k}\left[\frac{m!}{(m+k)!}\right]^{\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\rho}} \leqslant H_0(Q)\,\|y\|_{B_Q},\ H_0(Q)<\infty,\ Q\to\Omega.$$

Замечание 2. Условие (4) при $p\geqslant 1$ в некотором смысле необходимо для справедливости леммы 1. Например, если

$$a_{2n}=\frac{1}{(2n)!},\ a_{2n+1}=\frac{1}{(2n+2)!\,(n+1)^2},\ n=0,\ 1,\ \ldots,\qquad (\rho=1,\ \sigma=1),$$

то оператор $L_1 y = yx(x)$ не является ограниченным в C_Q, $\nu=\frac{1}{2}$, $Q\in\Omega$, так как в любом B_Q, $Q\in\Omega$, всегда найдется функция

$$y_Q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{n^{3/2}(2n)!^2\,Q^{2n}},$$

для которой

$$\|L_1 y_Q\|_{C_Q} = \|xy_Q(x)\|_{C_Q} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}} = \infty.$$

Очевидно, что класс $[\nu,\ \tau]$ — проективный предел банаховых пространств B_Q, $Q\in\Omega$, с другой стороны, проективный предел C_Q, $Q\in\Omega$; кроме того, согласно лемме 1 и замечанию 1 к ней, оператор Ly всякое ограниченное множество из $\bigcap_{Q\in\Omega} B_Q$ переводит в ограниченное из $\bigcap_{Q\in\Omega} C_Q$. Следовательно, справедлива

Лемма 2. *Пусть выполняется условие* (1). *Тогда оператор Ly при $p=0$ и, если выполняется условие* (4), *при $p\geqslant 1$ непрерывен в*

$$[\nu, \tau], \ \nu<\rho, \ \tau<\frac{1}{\nu}(\rho\sigma)^{\frac{\nu}{\rho}}D^{-\nu}.$$

При $p=0$ этот факт другим способом показан Ю. Н. Фроловым [3].

Пусть

$$z_m=\frac{y_m}{a_m}Q^m m!^{\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\rho}}, \quad h_m=\frac{g_m}{a_{m-p}}Q^m|(m-p)|!^{\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\rho}}, \qquad m=0, 1, \ldots$$

С помощью равенств (5) введем оператор $D_Q z$:

$$(D_Q z)_m=(Ly)_m\frac{Q^m|(m-p)|!^{\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\rho}}}{a_{m-p}}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{[p,m]}a_s^k\frac{a_{m-s}}{a_{m-p}}z_{m+k-s}Q^{-k+s}\left[\frac{|(m-p)|!}{(m+k-s)!}\right]^{\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\rho}}=h_m, \qquad m=0, 1, \ldots \tag{6}$$

$D_Q z$, в силу леммы 1, непрерывен в l_1 при любом фиксированном $Q\in\Omega$. Действительно,

$$\|D_Q z\|_{l_1}=\sum_{m=0}^{\infty}|(Ly)_m|\frac{Q^m|(m-p)|!^{\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\rho}}}{|a_{m-p}|}=\|Ly\|_{C_Q}\leqslant H(Q)\|y\|_{B_Q}=H(Q)\|z\|_{l_1},$$

$$H(Q)<\infty.$$

Лемма 3. *Пусть $a_p^0\neq 0$, выполняются условия* (1) *и*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|(n+1)^{\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\rho}}}=0. \tag{7}$$

Тогда оператор $D_Q z$ при любом фиксированном $Q\in\Omega$ нормально разрешим в l_1 и имеет конечную d – характеристику (α_Q, α_Q+p).

Представим $D_Q z$ в виде суммы $L_Q^1 z+L_Q^2 z$, где

$$(L_Q^1 z)_m=0, \qquad m=0, 1, \ldots, p-1,$$

$$(L_Q^1 z)_m=a_p^0 Q^p z_{m-p}, \qquad m=p, p+1, \ldots,$$

$$(L_Q^2 z)_m=\sum_{s=0}^{m}\sum_{k=0}^{\infty}a_s^k\frac{a_{m-s}}{a_{m-p}}z_{m+k-s}Q^{-k+s}\left[\frac{(p-m)!}{(m+k-s)!}\right]^{\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\rho}}, \quad m=0, 1, \ldots, p-1,$$

$$(L_Q^2 z)_m=\sum_{s=0}^{p-1}\sum_{k=0}^{\infty}a_s^k\frac{a_{m-s}}{a_{m-p}}z_{m+k-s}Q^{-k+s}\left[\frac{(m-p)!}{(m+k-s)!}\right]^{\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\rho}}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}a_p^k z_{m+k-p}\left[\frac{(m-p)!}{(m+k-p)!}\right]^{\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\rho}}Q^{-k+p}, \qquad m=p, p+1, \ldots$$

Оператор $L_Q^1 z$ является нормально разрешимым в l_1 с конечной d – характеристикой $(0, p)$. Покажем, что $L_Q^2 z$ вполне непрерывен в l_1. Из условия (7) следует, что при $m>N\geqslant p$

$$\frac{|a_{m-s}|(m-p)!^{\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\rho}}}{|a_{m-p}|(m-s)!^{\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\rho}}}<\varepsilon,$$

если $0 \leqslant s < p$. Следовательно,

$$\sum_{m=n}^{\infty} |(L_Q^2 z)_m| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=n}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{p-1} |a_s^k| Q^{-k+s} \frac{|a_{m-s}| (m-p)!^{\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\rho}}}{|a_{m-p}| (m-s)!^{\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\rho}}} |z_{m+k-s}| \left[\frac{(m-s)!}{(m+k-s)!}\right]^{\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\rho}} +$$

$$+ \sum_{m=n}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_p^k| k!^{\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\nu}} Q^{-k+p} |z_{m+k-p}| \left[\frac{k!(m-p)!}{(m+k-p)!}\right]^{\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\rho}} <$$

$$< \varepsilon \sum_{l=n-p+1}^{\infty} |z_l| \sum_{s=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{l} |a_s^k| k!^{\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\nu}} Q^{-k+s} +$$

$$+ (n-p+1)^{\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\nu}} \sum_{l=n-p+1}^{\infty} |z_l| \sum_{k=1}^{l} |a_p^k| k!^{\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\nu}} Q^{-k+p} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \sum_{s=0}^{p} \sum_{k=0}^{\infty} |a_s^k| k!^{\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\nu}} Q^{-k+s} \sum_{l=0}^{\infty} |z_l| = \varepsilon_1 \|z\|_{l_1}$$

при достаточно больших $n > N_1 \geqslant N$, для которых $(n-p+1)^{\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\nu}} \leqslant \varepsilon$.

Согласно работе [8], оператор $D_Q z$ нормально разрешим в l_1 при любом фиксированном $Q \in \Omega$, имеет конечную d – характеристику (α_Q, β_Q), причем $\alpha_Q - \beta_Q = -p$, т.е. $\beta_Q = \alpha_Q + p$, и d – характеристика $D_Q z$ в l_1 равна $(\alpha_Q, \alpha_Q + p)$.

Замечание. Если выполняются условия (1), $p=0$, $a_0^0 \neq 0$, то $D_Q z$ нормально разрешим в l_1 $(Q \in \Omega)$ с d – характериристикой (α_Q, α_Q).

Выясним смысл условий разрешимости системы (6) в l_1. Согласно теории нормально разрешимых операторов, они имеют вид:

$$\Psi_j(h) = \sum_{m=0}^{\infty} \eta_m^{(j)} h_m = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, \alpha_Q + p. \tag{8}$$

где $\Psi_j = \{\eta_m^{(j)}\}$ – линейно независимые решения однородного сопряженного уравнения $D_Q^* \Psi = 0$ из l_∞. D_Q^* определяется равенством:

$$D_Q^* \varphi(z) = \varphi\,(D_Q z), \quad \varphi = \{\eta_k\} \in l_\infty, \quad D_Q^* \varphi \in l_\infty.$$

$$\varphi(D_Q z) = \sum_{m=0}^{\infty} \eta_m (D_Q z)_m =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{[p,\, m]} a_s^k \frac{a_{m-s}}{a_{m-p}} Q^{-k+s} \left[\frac{|(m-p)|!}{(m+k-s)!}\right]^{\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\rho}} \eta_m z_{m+k-s} =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} z_l \sum_{k=0}^{l} \sum_{s=0}^{p} a_s^k \frac{a_{l-k}}{a_{l-k+s-p}} Q^{-k+s} \left[\frac{|(l-k+s-p)|!}{l!}\right]^{\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\rho}} \eta_{l-k+s} = \sum_{l=0}^{\infty} z_l t_l,$$

где

$$t_l = \sum_{k=0}^{l} \sum_{s=0}^{p} a_s^k \frac{a_{l-k}}{a_{l-k+s-p}} Q^{-k+s} \left[\frac{|(l-k+s-p)|!}{l!}\right]^{\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\rho}} \eta_{l-k+s}, \qquad l = 0, 1, \ldots$$

Следовательно, $\Psi_j = \{\eta_m^{(j)}\}$, $j = 1, 2, \ldots, \alpha_Q + p$, из (8) – линейно независимые решения системы $t_l = 0$, $l = 0, 1, \ldots$, из l_∞.

Лемма 4. *Оператор Ly при $a_p^0 \neq 0$, $p \geqslant 1$, и условиях* (1) *и* (7) *нормально разрешим в B_Q при любом фиксированном $Q \in \Omega$ и его d — характеристика равна* $(0, p)$.

Нормальная разрешимость Ly в B_Q, $Q \in \Omega$, следует из леммы 3 и взаимно однозначного изометричного соответствия между l_1 и B_Q, $Q \in \Omega$. Отсюда же его d — характеристика равна $(\alpha_Q, \alpha_Q + p)$.

Если положить $\eta_m = \bar{\eta}_m \dfrac{a_{m-p}}{a_m} Q^{-m} |(m-p)|!^{\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\nu}}$, то (8) примут вид

$$\sum_{m=0}^{\infty} g_m \frac{1}{a_m} \bar{\eta}_m^{(j)} = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, \alpha_Q + p. \tag{9}$$

$\{\bar{\eta}_m^{(j)}\}$, $j = 1, 2, \ldots, \alpha_Q + p$, — линейно независимые решения соответствующей системы

$$\bar{t}_l = \sum_{k=0}^{l} \sum_{s=0}^{p} a_s^k \frac{a_{l-k}}{a_{l-k+s}} \bar{\eta}_{l-k+s} = 0, \qquad l = 0, 1, \ldots, \tag{10}$$

из множества T_Q таких последовательностей $\{\bar{\eta}_m\}$, что

$$\left\{\bar{\eta}_m \frac{a_{m-p}}{a_m} Q^m |(m-p)|!^{\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\rho}}\right\} \in l_\infty.$$

Очевидно, что $T_Q \subseteq s$ (s — пространство всех последовательностей). Учитывая, что при $a_p^0 \neq 0$ система (10) имеет в sp линейно независимых решений, мы получим, что в T_Q, $Q \in \Omega$, она имеет их $q_Q \leqslant p$. Но d — характеристика Ly в B_Q равна $(\alpha_Q, \alpha_Q + p)$, $\alpha_Q \geqslant 0$, $\alpha_Q + p \geqslant 0$, $\alpha_Q + p = q_Q$. Значит, $\alpha_Q = 0$, $q_Q = p$, т.е. d — характеристика Ly в B_Q, $Q \in \Omega$, равна $(0, p)$. Очевидно, что $T_{Q_1} \subseteq T_{Q_2} \subseteq s$, если $Q_1 \geqslant Q_2$, кроме того, размерности множеств R_Q решений системы (10) из T_Q, $Q \in \Omega$, равны между собой и равны p — размерности множества R решений системы (10) в s. Поэтому $R_Q = R$, $Q \in \Omega$.

Замечание. При $p = 0$, $a_0^0 \neq 0$ и условиях (1) оператор Ly нормально разрешим в B_Q, $Q \in \Omega$, с d — характеристикой $(0, 0)$.

Рассмотрим уравнение (2) в классе целых функций $[\nu, \tau]$, $\nu < \rho$,

$$\tau < \frac{1}{\nu} (\rho\sigma)^{\frac{\nu}{\rho}} D^{-\nu}.$$

Очевидно, что $[\nu, \tau] = \bigcap\limits_{Q \in \Omega} B_Q = \bigcap\limits_{Q \in \Omega} C_Q$. Согласно работе [9], учитывая лемму 4 и тот факт, что $R_Q = R$, $Q \in \Omega$, получим следующий результат:

Теорема 1. *Уравнение* (2) *при $a_p^0 \neq 0$, $p \geqslant 1$, и условиях* (1) *и* (7) *разрешимо в классе $[\nu, \tau]$, $\nu < \rho$, $\tau < \frac{1}{\nu} (\rho\sigma)^{\frac{\nu}{\rho}} D^{-\nu}$, тогда и только тогда, когда $g(x) \ni [\nu, \tau]$ удовлетворяет p однородным условиям* (9), *где $\{\bar{\eta}_m^{(j)}\}$, $j = 1, 2, \ldots, p$, — линейно независимые решения системы* (10) *из s. В случае разрешимости, уравнение* (2) *имеет в $[\nu, \tau]$ единственное решение.*

Лемма 2 позволяет уточнить теорему 1.

Теорема 2. *Пусть $g(x) \in \{\nu, \tau\}$, $\nu < \rho$, $\tau < \frac{1}{\nu} (\rho\sigma)^{\frac{\nu}{\rho}} D^{-\nu}$, $a_p^0 \neq 0$ и выполняются условия* (1) *и* (7). *Тогда, в случае разрешимости, уравнение* (2) *имеет в $[\nu, \tau]$ единственное решение, причем оно принадлежит $\{\nu, \tau\}$.*

Действительно, если бы $y(x) \in \{\nu_1, \tau_1\}$, где либо $\nu_1 < \nu$, либо $\nu_1 = \nu$, но $\tau_1 < \tau$, то по лемме 2 $Ly(x) = g(x) \in [\nu_1, \tau_1]$, чего быть не может. Следовательно, $y(x) \leftarrow \{\nu, \tau\}$.

При $p=0$, $a_0^0 \neq 0$ и условиях (1) получим результат Ю. Н. Фролова [3]. Если же $a_0^0 = a_0^1 = \ldots = a_0^{k_0-1} = 0$, $a_0^{k_0} \neq 0$ и выполняются условия (1), аналогичным методом получим, что уравнение (2) (при $p=0$) разрешимо в $[\nu, \tau]$, $\nu < \rho$, $\tau < \frac{1}{\nu}(\rho\sigma)^{\frac{\nu}{\rho}} D^{-\nu}$, для любой правой части из $[\nu, \tau]$, причем однородное уравнение (с $g(x) \equiv 0$) имеет в $[\nu, \tau]$ k_0 линейно независимых решений.

Так как $\{\bar{\eta}_m^{(j)}\}$, $j=1, 2, \ldots, p$, не зависят от класса $[\nu, \tau]$ и теоремы 1 и 2 справедливы при любом $\tau < \frac{1}{\nu}(\rho\sigma)^{\frac{\nu}{\rho}} D^{-\nu}$, то имеет место

Теорема 3. *Уравнение* (2) *при* $a_p^0 \neq 0$, *условиях* (1) *и* (7) *разрешимо в классе* $E_0 = \left[\nu, \frac{1}{\nu}(\rho\sigma)^{\frac{\nu}{\rho}} D^{-\nu}\right)$ *тогда и только тогда, когда правая часть* $g(x) \in E_0$ *удовлетворяет* p *однородным условиям* (9), *где* $\{\bar{\eta}_m^{(j)}\}$, $j=1, 2, \ldots, p$ — *линейно независимые решения системы* (10) *из* s. *В случае разрешимости, уравнение* (2) *имеет в* E_0 *единственное решение, причем рост его совпадает с ростом* $g(x)$.

В случае, когда $f(x) = l^x$ (условия (1) и (7) выполняются), мы получим один из результатов, полученных Ю. Ф. Коробейником [5] для неособых квазирегулярных уравнений в обычных производных.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Ю. Ф. Коробейнику за постановку задачи и обсуждение результатов.

Ростовский Государственный
университет

Поступило в редакцию
13.II.1967

ЛИТЕРАТУРА

1. А. О. Гельфонд и А. Ф. Леонтьев, Об одном обобщении ряда Фурье, Мат., сб., 29 (71), № 3 (1951), 477–500.
2. Ю. Н. Фролов, О неоднородных уравнениях бесконечного порядка в обобщенных производных, Вестник МГУ, № 4 (1960), 3–12.
3. Ю. Н. Фролов, О решении уравнения бесконечного порядка в классе единственности, ДАН СССР, 161, № 4 (1965), 783–784.
4. В. П. Громов, О полноте систем производных аналитической функции, Изв. АН СССР, сер. матем., 25, № 4 (1961), 543–546.
5. Ю. Ф. Коробейник, Об одном классе уравнений бесконечного порядка в обобщенных производных, Лит. мат. сб. IV, № 4 (1964), 497–515.
6. Ю. Ф. Коробейник, Об уравнениях бесконечного порядка в обобщенных производных, Сиб. мат. ж., 5, № 6 (1964), 1259–1281.
7. Ю. Ф. Коробейник, О преобразовании аналитических пространств с помощью дифференциальных операторов бесконечного порядка, УМН, XX, в. 5 (1965), 208–213.
8. И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов, УМН, XII, в. 2 (74), (1957), 43–119.
9. Ю. Ф. Коробейник и Т. И. Демченко, О разрешимости одного класса дифференциальных уравнений бесконечного порядка, Сиб. мат. ж. (принято к печати).

BEGALINĖS EILĖS DIFERENCIALINĖS LYGTIES, APIBENDRINTOS GELFONDO – LEONTJEVO PRASME, SVEIKI SPRENDINIAI

T. DEMČENKO

(Reziumė)

Simboliu Dy žymime analizinės funkcijos $y=y(x)$ Gelfondo – Leontjevo išvestinę ir nagrinėjame lygtį

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(x)\, D^k y = g(x),$$

kur $P_k(x)$ yra polinomų seka, o $g(x)$ – analizinė funkcija.

ÜBER GANZE LÖSUNGEN EINER NACH GELFOND – LEONTJEW VERALLGEMEINERTEN DIFFERENTIALGLEICHUNG VON UNENDLICH HOHER ORDNUNG

T. DEMTSCHENKO

(Zusammenfassung)

Mit Dy bezeichnen wir die Gelfond – Leontjewsche Ableitung der analytischen Funktion $y=y$ (x) und untersuchen die ganzen Lösungen der Gleichung

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(x)\, D^k y = g(x),$$

wo $P_k(x)$ eine Polynomenfolge und $g(x)$ eine analytische Funktion bedeutet.