LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VII Nr. 4, 1967
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VII № 4, 1967

ОТЫСКАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Часть II

П. ГОЛОКВОСЧЮС

В работе [1] указывалось, что в общем случае основной промежуток $(0,1)$ распадается на части $\{(\alpha, \beta)\}$, на каждой из которых (α, β) матрица $Q_0(t)$ в системе дифференциальных уравнений (1) имеет вид (27), где величины b_k $(k=1,2,3)$ сохраняют постоянное значение. Однако при переходе от одного промежутка (α, β) к другому (α', β') b_k могут изменяться скачком.

Рассмотрим теперь тот случай, когда множество $\{(\alpha, \beta)\}$ состоит из двух элементов, т.е.

$$(0,1)=(0,\gamma) \cup (\gamma, 1) \quad 0<\gamma<1,$$

причем матрица коэффициентов $Q_0(t)$ соответствующей предельной системы, получаемой из (1) при $\mu \to 0$, в точке $t=\gamma$ имеет разрыв первого рода*).

§ 1. Условия непрерывности и перестановочности

В данном случае матрицу (27) запишем в виде

$$Q_0(t)=\left\| \begin{matrix} \varphi_1(t)+b_1(t)\varphi_2(t), & b_3(t)\varphi_2(t) \\ b_2(t)\varphi_2(t), & \varphi_1(t) \end{matrix} \right\|, \tag{224}$$

где

$$b_k(t)=\begin{cases} b_k & \text{при } 0<t\leqslant\gamma, \\ c_k & \text{при } \gamma<t<1. \end{cases} \tag{225}$$

Здесь b_k и c_k не равные нулю вещественные постоянные, причем по крайней мере для одного $k=1, 2, 3$ имеем $b_k \neq c_k$. Как и прежде, функции $\varphi_k(t)$ $(k=1, 2)$ будем предполагать непрерывными и периодическими с периодом $\omega=1$, обладающими свойством $\varphi_k(0)=\varphi_k(1)=0$.

Укажем для матрицы (224) условия непрерывности и ее перестановочности со своим интегралом.

Так как

$$\lim_{t\to\gamma-0}[b_k(t)\varphi_2(t)]=b_k\varphi_2(\gamma) \quad (k=1,\ 2,\ 3),$$

$$\lim_{t\to\gamma+0}[b_k(t)\varphi_2(t)]=c_k\varphi_2(\gamma) \quad (k=1,\ 2,\ 3),$$

---

*) Идея исследования этого случая возникла на семинаре проф. Н. П. Еругина и автору была предложена Ю. С. Богдановым.

то необходимым и достаточным условием непрерывности матрицы $Q_0(t)$ в точке $t=\gamma$ является осуществление равенства

$$\varphi_2(\gamma)=0. \tag{226}$$

Из (32) имеем

$$a_1=\int_0^1 \varphi_1(t)\,dt, \tag{227}$$

$$a_2=\int_0^1 \varphi_2(t)\,dt=\int_1^\gamma \varphi_2(t)\,dt+\int_\gamma^1 \varphi_2(t)\,dt=0, \tag{228}$$

так как для перестановочности (4), т.е.

$$Q_0(t)\int_0^t Q_0(\tau)\,d\tau=\int_0^t Q_0(\tau)\,d\tau\cdot Q_0(t),$$

необходимы условия

$$\int_0^\gamma \varphi_2(t)\,dt=0;\quad \int_\gamma^1 \varphi_2(t)\,dt=0. \tag{229}$$

Следовательно, в данном случае в формуле (31) непрерывные и периодические с периодом $\omega=1$ функции $\psi_k(t)$ принимают вид

$$\psi_1(t)=\int_0^t \varphi_1(\tau)\,d\tau-t\int_0^1 \varphi_1(t)\,dt, \tag{230}$$

$$\psi_2(t)=\int_0^t \varphi_2(\tau)\,d\tau, \tag{231}$$

причем

$$\psi_1(0)=\psi_1(1)=0, \tag{232}$$

$$\psi_2(0)=\psi_2(\gamma)=\psi_2(1)=0. \tag{233}$$

В рассматриваемом случае условия непрерывности матриц $P_k(t)$ $(k=1,2,\ldots)$, определяемых по формуле (8), укажем в § 3.

§ 2. Канонический вид матриц $P_0(t)$, $\exp(\pm A_0 t)$ и $z_0^{\pm 1}(t)$

Рассмотрим канонический вид указанных матриц, входящих в формулы (15) и (26), в различных случаях.

Ради краткости записи обозначим

$$\Delta_\nu=\begin{cases} b_1^2+4b_2b_3 & \text{при } \nu=1,\\ c_1^2+4c_2c_3 & \text{при } \nu=2;\end{cases} \tag{234}$$

$$\rho_1^{(\nu)}-\rho_2^{(\nu)}=\beta_\nu=\sqrt{\Delta_\nu}\quad (\nu=1,\ 2), \tag{235}$$

где

$$\rho_{1,2}^{(1)}=\frac{1}{2}\,(-b_1\pm\beta_1), \tag{236}$$

$$\rho_{1,2}^{(2)}=\frac{1}{2}\,(-c_1\pm\beta_2). \tag{237}$$

1. Предположим

$$a_1 \neq 0, \quad \Delta_\nu \neq 0 \quad (\nu = 1,2), \tag{238}$$

где $\nu = 1$ для $0 < t \leqslant \gamma$ и $\nu = 2$ для $\gamma < t < 1$.

Тогда в системе (1) матрица $Q_0(t)$ имеет разные характеристические числа (х. ч.)

$$\zeta_{1,2}(t) = \begin{cases} \varphi_1(t) + \frac{1}{2}(b_1 \pm \beta_1)\varphi_2(t) & \text{при } 0 < t \leqslant \gamma, \\ \varphi_1(t) + \frac{1}{2}(c_1 \pm \beta_2)\varphi_2(t) & \text{при } \gamma < t < 1 \end{cases} \tag{239}$$

и согласно (8) получаем

$$P_0(t) = S_\nu^{-1} Q_0(t) S_\nu = \begin{Vmatrix} \zeta_1(t), & 0 \\ 0, & \zeta_2(t) \end{Vmatrix}, \tag{240}$$

причем

$$S_\nu = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ \rho_1^{(\nu)} & \rho_2^{(\nu)} \end{Vmatrix} \quad (\nu = 1,\ 2), \tag{241}$$

$$D(S_\nu) = -\beta_\gamma \neq 0 \quad (\nu = 1,\ 2).$$

Принимая во внимание (226), из (239) и (240) видно, что матрица $P_0(t)$ в основном промежутке (0,1) является непрерывной.

Учитывая (16) – (18), (34) – (36), (227), (228), (230) и (231), имеем

$$A_0 = \begin{Vmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{Vmatrix}, \tag{242}$$

$$\Phi_0(t) = \begin{Vmatrix} \eta_1(t) & 0 \\ 0 & \eta_2(t) \end{Vmatrix}, \tag{243}$$

где периодические с периодом $\omega = 1$ функции

$$\eta_{1,2}(t) = \begin{cases} \psi_1(t) + \frac{1}{2}(b_1 \pm \beta_1)\psi_2(t) & \text{при } 0 < t \leqslant \gamma, \\ \psi_1(t) + \frac{1}{2}(c_1 \pm \beta_2)\psi_2(t) & \text{при } \gamma < t < 1 \end{cases} \tag{244}$$

в точке $t = \gamma$ являются непрерывными, так как согласно (230) и (233)

$$\eta_{1,2}(\gamma - 0) = \eta_{1,2}(\gamma) = \eta_{1,2}(\gamma + 0) = \psi_1(\gamma) = \int_0^\gamma \varphi_1(\tau)\,d\tau - \gamma \int_0^1 \varphi_1(\tau)\,d\tau. \tag{245}$$

Кроме того, из (232) и (233) следует, что функции (244) обладают свойством

$$\eta_{1,2}(0) = \eta_{1,2}(1) = 0.$$

Таким образом, на основании (19), (242) и (243) находим

$$\exp(\pm A_0 t) = \begin{Vmatrix} e^{\pm a_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\pm a_1 t} \end{Vmatrix} = I e^{\pm a_1 t}, \tag{246}$$

$$z_0^{\pm 1}(t) = \begin{Vmatrix} e^{\pm \eta_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\pm \eta_2 t} \end{Vmatrix}, \tag{247}$$

причем здесь и в дальнейших аналогичных выражениях берем соответственно верхние или нижние знаки.

2. Пусть

$$a_1 \neq 0, \quad \Delta_\nu = 0 \quad (\nu = 1,2), \tag{248}$$

где, как и выше, $\nu = 1$ для $0 < t \leqslant \gamma$ и $\nu = 2$ для $\gamma < t < 1$.

В этом случае в системе (1) х. ч. матрицы $Q_0(t)$ равны с непростым элементарным делителем.

Тогда

$$P_0(t) = S_\nu^{-1} Q_0(t) S_\nu = \begin{Vmatrix} \zeta(t) & 0 \\ \chi(t) & \zeta(t) \end{Vmatrix}, \tag{249}$$

где

$$S_\nu = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \rho^{(\nu)} \end{Vmatrix} \quad (\nu = 1, \ 2),$$

$$\rho^{(\nu)} = \begin{cases} -\dfrac{b_1}{2b_3} & \text{при } 0 < t \leqslant \gamma, \\ -\dfrac{c_1}{2c_3} & \text{при } \gamma < t < 1; \end{cases} \tag{250}$$

$$\zeta(t) = \begin{cases} \varphi_1(t) + \dfrac{1}{2} b_1 \varphi_2(t) & \text{при } 0 < t \leqslant \gamma, \\ \varphi_1(t) + \dfrac{1}{2} c_1 \varphi_2(t) & \text{при } \gamma < t < 1; \end{cases} \tag{251}$$

$$\chi(t) = \begin{cases} b_3 \varphi_2(t) & \text{при } 0 < t \leqslant \gamma, \\ c_3 \varphi_2(t) & \text{при } \gamma < t < 1. \end{cases} \tag{252}$$

Согласно (16), (228), (229) и (248)–(252), матрица A_0 имеет вид (242) и $\exp(\pm A_0 t)$ определяется по формуле (246). На основании (17)–(19), (31), (251) и (252) получаем

$$\Phi_0(t) = \begin{Vmatrix} \eta(t) & 0 \\ \vartheta(t) & \eta(t) \end{Vmatrix}, \tag{253}$$

где, учитывая (229)–(231), периодические с периодом $\omega = 1$ функции

$$\eta(t) = \begin{cases} \psi_1(t) + \dfrac{1}{2} b_1 \psi_2(t) & \text{при } 0 < t \leqslant \gamma, \\ \psi_1(t) + \dfrac{1}{2} c_1 \psi_2(t) & \text{при } \gamma < t < 1, \end{cases} \tag{254}$$

$$\vartheta(t) = \begin{cases} b_3 \psi_2(t) & \text{при } 0 < t \leqslant \gamma, \\ c_3 \psi_2(t) & \text{при } \gamma < t < 1 \end{cases} \tag{255}$$

являются непрерывными и в точке $t = \gamma$. Кроме того, имеем

$$\eta(\gamma - 0) = \eta(\gamma) = \eta(\gamma + 0) = \int_0^\gamma \varphi_1(t) dt - \gamma \int_0^1 \varphi_1(t)\, dt,$$

$$\vartheta(\gamma - 0) = \vartheta(\gamma) = \vartheta(\gamma + 0) = 0,$$

$$\vartheta(0) = \vartheta(1) = \eta(0) = \eta(1) = 0.$$

В данном случае матрица $z_0^\pm(t)$ имеет вид (48), т.е.

$$z_0^{\pm 1}(t) = e^{\pm \eta(t)} \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ \pm \vartheta(t) & 1 \end{Vmatrix}, \tag{256}$$

причем $\eta(t)$ и $\vartheta(t)$ даны соответственно формулами (254) и (255).

3. Предположим

$$a_1=0, \quad \Delta_\nu \neq 0 \quad (\nu=1,2), \tag{257}$$

где, напоминаем, $\nu=1$ для $0<t\leqslant\gamma$ и $\nu=2$ для $\gamma<t<1$.

Тогда, согласно (16), (227), (228) и (242) получаем

$$A_0=\int_0^1 P_0(t)\,dt=0, \tag{258}$$

$$\exp(\pm A_0 t)=\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}=I, \tag{259}$$

а матрица $z_0^{\pm 1}(t)$ принимает вид (247), где $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$ определяются по формулам (244).

Из рассуждений, проведенных в случае 1, нетрудно заметить, что в случае 3 х. ч. матрицы $Q_0(t)$ разные и что они даны соответственно формулой (239).

4. Пусть

$$a_1=0, \quad \Delta_1\neq 0, \quad \Delta_2=0. \tag{260}$$

Тогда, согласно двум последним условиям, в системе (1) матрица $Q_0(t)$ имеет при $0<t\leqslant\gamma$ разные х. ч., определяемые равенствами (239), а при $\gamma<t<1$ ее х.ч. равны с непростым элементарным делителем, причем они даны формулой (251). Учитывая первое из условий (260), нетрудно заметить, что в данном случае имеют место формулы (258) и (259). Кроме того, в данном случае

$$z_0^{\pm 1}(t)=\begin{Vmatrix} e^{\pm\eta_1(t)} & 0 \\ 0 & e^{\pm\eta_2(t)} \end{Vmatrix} \qquad (0<t\leqslant\gamma), \tag{261}$$

$$\eta_{1,2}(t)=\psi_1(t)+\frac{1}{2}(b_1\pm\beta_1)\,\psi_2(t); \tag{262}$$

$$z_0^{\pm 1}(t)=e^{\pm\eta(t)}\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ \pm\vartheta(t) & 1 \end{Vmatrix} \qquad (\gamma<t<1), \tag{263}$$

$$\eta(t)=\psi_1(t)+\frac{1}{2}c_1\psi_2(t), \tag{264}$$

$$\vartheta(t)=c_3\psi_2(t). \tag{265}$$

5. Аналогично, в случае выполнения равенств

$$a_1=0, \quad \Delta_1=0, \quad \Delta_2\neq 0 \tag{266}$$

A_0 и $\exp(\pm A_2(t))$ имеем соответственно в виде (258) и (259), а

$$z_0^{\pm 1}(t)=e^{\pm\eta(t)}\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ \pm\vartheta(t) & 1 \end{Vmatrix} \qquad (0<t\leqslant\gamma), \tag{267}$$

$$\eta(t)=\psi_1(t)+\frac{1}{2}b_1\psi_2(t), \tag{268}$$

$$\vartheta(t)=b_3\psi_2(t); \tag{269}$$

$$z_0^{\pm 1}(t)=\begin{Vmatrix} e^{\pm\eta_1(t)} & 0 \\ 0 & e^{\pm\eta_2(t)} \end{Vmatrix} \qquad (\gamma<t<1), \tag{270}$$

$$\eta_{1,2}(t)=\psi_1(t)+\frac{1}{2}(c_1\pm\beta_2)\,\psi_2(t). \tag{271}$$

В данном случае в системе (1) матрица $Q_0(t)$ имеет при $0<t\leqslant\gamma$ равные х. ч. с непростым элементарным делителем, а при $\gamma<t<1$ ее х. ч. разные. Они определяются соответственно формулами (251) и (239).

6. Предположим, наконец,

$$a_1=0,\ \Delta_\nu=0\ (\nu=1,2). \tag{272}$$

Тогда матрица $Q_0(t)$ имеет при $0<t\leqslant\gamma$ и при $\gamma<t<1$ соответственно равные х. ч. с непростым элементарным делителем, причем в этих интервалах они даны соответственно формулой (251). Для A_0, $\exp(\pm A_0 t)$ и $z_0^{\mp 1}(t)$ имеют место равенства (258), (259) и (256), где $\eta(t)$ и $\vartheta(t)$ получаем из (254) и (255).

§ 3 Элементы матрицы $P_k(t)$

Принимая во внимание преобразование (5) и формулы (8), в основном промежутке (0,1) для матричных коэффициентов ряда (7) имеем

$$P_k(t)=S_j^{-1}Q_k(t)S_j=P_k^{(j)}(t)=\|p_{\sigma\nu}^{(jk)}(t)\| \tag{273}$$

$$(\sigma,\ \nu,\ j=1,2;\ k=1,2,3,\ \ldots),$$

где

$$P_k(t)=\begin{cases} P_k^{(1)}(t) & \text{при} \quad 0<t\leqslant\gamma, \\ P_k^{(2)}(t) & \text{при} \quad \gamma<t<1. \end{cases} \tag{274}$$

Определим элементы матрицы (273) для $0<t\leqslant\gamma$ и для $\gamma<t<1$ в двух случаях.

1. Предположим сначала, что в системе (1) выполняются два последних условия (238).

Тогда, учитывая (241) и обозначения (235), получаем выражения элементов матриц $P_k^{(\nu)}(t)$ $(\nu=1,2)$, составляющих матрицу $P_k(t)$ по формуле (274), через элементы $q_{\sigma\nu}^{(k)}(t)$ $(\sigma,\ \nu=1,2)$ матрицы $Q_k(t)$ и величины (236) или (237):

$$\begin{aligned} p_{11}^{(\nu k)}(t)&=\frac{1}{\beta_\nu}\left[q_{21}^{(k)}(t)-\rho_2^{(\nu)}q_{11}^{(k)}(t)+\rho_1^{(\nu)}\left(q_{22}^{(k)}(t)-\rho_2^{(\nu)}q_{12}^{(k)}(t)\right)\right],\\ p_{22}^{(\nu k)}(t)&=\frac{1}{\beta_\nu}\left[\rho_1^{(\nu)}q_{11}^{(k)}(t)-q_{21}^{(k)}(t)+\rho_2^{(\nu)}\left(\rho_1^{(\nu)}q_{12}^{(k)}(t)-q_{22}^{(k)}(t)\right)\right],\\ p_{12}^{(\nu k)}(t)&=\frac{1}{\beta_\nu}\left[q_{21}^{(k)}(t)-\rho_2^{(\nu)}q_{11}^{(k)}(t)+\rho_2^{(\nu)}\left(q_{22}^{(k)}(t)-\rho_2^{(\nu)}q_{12}^{(k)}(t)\right)\right],\\ p_{21}^{(\nu k)}(t)&=\frac{1}{\beta_\nu}\left[\rho_1^{(\nu)}q_{11}^{(k)}(t)-q_{21}^{(k)}(t)+\rho_1^{(\nu)}\left(\rho_1^{(\nu)}q_{12}^{(k)}(t)-q_{22}^{(k)}(t)\right)\right]. \end{aligned} \tag{275}$$

Отсюда при $\nu=1$ получаем элементы матрицы $P_k^{(1)}(t)$, а при $\nu=2$ имеем элементы матрицы $P_k^{(2)}(t)$.

2. Пусть, теперь, в системе (1) имеют место два последних условия (248).

Тогда, аналогично вышерассмотренному случаю, учитывая обозначения (250) и формулы (273) и (274), получаем

$$\left.\begin{aligned} p_{11}^{(\nu k)}(t)&=q_{22}^{(k)}(t)-\rho^{(\nu)}q_{12}^{(k)}(t),\\ p_{22}^{(\nu k)}(t)&=q_{11}^{(k)}(t)+\rho^{(\nu)}q_{12}^{(k)}(t),\\ p_{12}^{(\nu k)}(t)&=q_{21}^{(k)}(t)-\rho^{(\nu)}q_{11}^{(k)}(t)+\rho^{(\nu)}\left(q_{22}^{(k)}(t)-\rho^{(\nu)}q_{12}^{(k)}(t)\right),\\ p_{21}^{(\nu k)}(t)&=q_{12}^{(k)}(t), \end{aligned}\right\} \tag{276}$$

причем при $\nu=1$ имеем элементы матрицы $P_k^{(1)}(t)$, а при $\nu=2$ — элементы матрицы $P_k^{(2)}(t)$.

Так как в матрице (224), по крайней мере, для одного $j=1,2,3$ имеем $b_j \neq c_j$, то в равенствах (275) и (276) величины $\rho_k^{(\nu)}(k,\ \nu=1,2)$ и $\rho^{(\nu)}\ (\nu=1,2)$ удовлетворяют соответственно условиям

$$\rho_k^{(1)} \neq \rho_k^{(2)} \quad (k=1,\ 2), \qquad \rho^{(1)} \neq \rho^{(2)}.$$

Кроме того, в соотношениях (275) и (276) функции $q_{\sigma\nu}^{(k)}(t)$ $(\sigma,\ \nu=1,2)$, как элементы матрицы $Q_k(t)$, являются непрерывными. Следовательно, необходимым и достаточным условием непрерывности матриц $P_k(t)$ $(k=1,2,\ldots)$ в точке $t=\gamma$ является осуществление равенств*)

$$q_{\sigma\nu}^{(k)}(\gamma)=0 \quad (\sigma,\ \nu=1,2;\quad k=1,2,\ldots). \tag{277}$$

Следует заметить, что эти равенства должны иметь место и в случаях выполнения двух последних условий (260) и (266), т.е. когда матрица $P_0(t)$ при $0<t\leqslant\gamma$ имеет один, а при $\gamma<t<1$ другой канонический вид.

§ 4. Характеристические числа матрицы $P_0(t)$ вещественные и разные

Учитывая обозначения (234), предположим, что в матрице (224) велчины b_k и c_k удовлетворяют условиям

$$\Delta_\nu>0 \quad (\nu=1,2). \tag{278}$$

Тогда х. ч. матрицы $Q_0(t)$, а следовательно, и матрицы $P_0(t)$ (см. (240)) определяются равенствами (239) и они будут вещественные и разные.

Предполагая выполняемость неравенств (278), найдем разложения х. ч. матрицы $A(\mu)$ по целым степеням достаточно малого параметра μ в двух случаях.

1. Пусть

$$a_1=\int\limits_0^1 \varphi_1(t)\,dt \neq 0. \tag{279}$$

Тогда матрица A_0 имеет диагональный вид (242), причем ее х. ч. равные, т.е.

$$\xi_1=\xi_2=a_1, \tag{280}$$

а матрицы $\Phi_0(t)$, $\exp(\pm A_0 t)$ и $z_0^{\pm1}(t)$ находим соответственно по формулам (243), (246) и (247). Принимая во внимание (280), из (66) получаем $a=0$. Следовательно, из (65) имеем

$$z_1(t)=\left\| \begin{matrix} \int\limits_0^t p_{11}^{(1)}(\tau)\,d\tau - a_{11}^{(1)} t & \int\limits_0^t g_{12}^{(1)}(\tau)\,d\tau - a_{12}^{(1)} t \\ \int\limits_0^t g_{21}^{(1)}(\tau)\,d\tau - a_{21}^{(1)} t & \int\limits_0^t p_{22}^{(1)}(\tau)\,d\tau - a_{22}^{(1)} t \end{matrix} \right\| z_0(t), \tag{281}$$

---

*) Из соотношений (276) нетрудно заметить, что в случае 2 элемент $q_{21}^{(k)}(t)$ не обязательно подвергать условию (277).

где функции

$$g_{\sigma\nu}^{(1)}(\tau)=p_{\sigma\nu}^{(1)}(\tau)\ e^{\pm v(\tau)}\quad (\sigma,\ \nu=1,2;\ \sigma\neq\nu), \tag{282}$$

$$v(\tau)=\eta_1(\tau)-\eta_2(\tau)=\begin{cases}\beta_1\psi_2(\tau) & \text{при}\quad 0<\tau\leqslant\gamma,\\ \beta_2\psi_2(\tau) & \text{при}\quad \gamma<\tau<1\end{cases} \tag{283}$$

являются непрерывными и периодическими периода $\omega=1$.

Чтобы матрица $z_1(t)$ была периодической с периодом $\omega=1$, необходимо выполнение равенств:

$$a_{\sigma\sigma}^{(1)}=\int_0^\gamma p_{\sigma\sigma}^{(11)}(t)\,dt+\int_\gamma^1 p_{\sigma\sigma}^{(21)}(t)\,dt\qquad(\sigma=1,2), \tag{284}$$

$$a_{\sigma\nu}^{(1)}=\int_0^\gamma p_{\sigma\nu}^{(11)}(t)e^{\pm\beta_1\psi_2(t)}\,dt+\int_\gamma^1 p_{\sigma\nu}^{(21)}(t)\ e^{\pm\beta_2\psi_2(t)}\,dt \tag{285}$$

$$(\sigma,\ \nu=1,\ 2;\ \sigma\neq\nu),$$

где знак „+“ соответствует индексам $\sigma=1$, $\nu=2$, а знак „−“ индексам $\sigma=2$, $\nu=1$. При этом, согласно (247) и (281) $z_1(t)$ получаем в виде (80), где непрерывные и периодические периоды $\omega=1$ функции $\varphi_{\sigma\nu}^{(1)}(t)$ в данном случае определяются так:

$$\varphi_{\sigma\sigma}^{(1)}(t)=\int_0^t p_{\sigma\sigma}^{(1)}(\tau)\,d\tau-t\left[\int_0^\gamma p_{\sigma\sigma}^{(11)}(t)\,dt+\int_\gamma^1 p_{\sigma\sigma}^{(21)}(t)\,dt\right]\quad(\sigma=1,2), \tag{286}$$

$$\varphi_{\sigma\nu}^{(1)}(t)=\int_0^t g_{\sigma\nu}^{(1)}(\tau)\,d\tau-t\left[\int_0^\gamma p_{\sigma\nu}^{(11)}(t)\ e^{\pm\beta_1\psi_2(t)}\,dt+\int_\gamma^1 p_{\sigma\nu}^{(21)}(t)\ e^{\pm\beta_2\psi_2(t)}\,dt\right] \tag{287}$$

$$(\sigma,\ \nu=1,2;\ \sigma\neq\nu),$$

причем, как и выше, „+“ соответствует индексам $\sigma=1$, $\nu=2$, а знак „−“ – индексам $\sigma=2$, $\nu=1$.

Теперь находим дискриминант (12) характеристического уравнения (13) в виде ряда

$$\Delta(\mu)=\left[\frac{1}{4}\ (a_{11}^{(1)}-a_{22}^{(1)})^2+a_{12}^{(1)}\ a_{21}^{(1)}\right]\mu^2+\ldots, \tag{288}$$

коэффициент которого при μ^2 выражается только через элементы (284) и (285) матрицы A_1.

Предположим*)

$$\Delta''(0)\neq 0, \tag{289}$$

т.е.

$$\frac{1}{4}\ (a_{11}^{(1)}-a_{22}^{(1)})^2+a_{12}^{(1)}a_{21}^{(1)}\neq 0, \tag{290}$$

или, учитывая (284) и (285),

$$\frac{1}{4}\left[\int_0^\gamma\left(p_{11}^{(11)}(t)-p_{22}^{(11)}(t)\,dt+\int_\gamma^1\left(p_{11}^{(21)}(t)-p_{22}^{(21)}(t)\right)dt\right.\right]^2+\left[\int_0^\gamma p_{12}^{(11)}(t)\,e^{\beta_1\psi_2(t)}\,dt+\right.$$

$$\left.+\int_\gamma^1 p_{12}^{(21)}(t)\,e^{\beta_2\psi_2(t)}\,dt\right]\cdot\left[\int_0^\gamma p_{21}^{(11)}(t)\,e^{-\beta_1\psi_2(t)}\,dt+\int_\gamma^1 p_{21}^{(21)}(t)\,e^{-\beta_2\psi_2(t)}\,dt\right]^2\neq 0. \tag{291}$$

*) Если условие (290) не выполнено, то, используя (26), привлекаем к рассмотрению следующее приближение матрицы (10).

где функции $p_{\sigma\nu}^{(kj)}(t)$ определяются по формулам (275), а числа β_ν — из равенств (235).

Тогда на основании [2] и [3] х.ч. матрицы $A(\mu)$ при достаточно малых μ разлагаются по целым степеням μ:

$$\lambda_{1,2}(\mu)=a_1+\frac{1}{2}\left[a_{11}^{(1)}+a_{22}^{(1)}\pm\sqrt{(a_{11}^{(1)}-a_{22}^{(1)})^2+4a_{12}^{(1)}a_{21}^{(1)}}\right]\mu+o_\pm(\mu), \tag{292}$$

причем a_1, $a_{\sigma\nu}^{(1)}$ (σ, $\nu=1,2$) даны соответственно формулами (227), (284) и (285), а величины $o_+(\mu)$ и $o_-(\mu)$ являются бесконечно малыми порядка выше первого по сравнению с μ при $\mu\to0$. Учитывая эти формулы и обозначения (231), (235) и (273), получаем

$$a_{11}^{(1)}+a_{22}^{(1)}=\int_0^\gamma \sigma\left(P_1^{(1)}(t)\right)dt+\int_\gamma^1 \sigma\left(P_1^{(2)}(t)\right)dt,$$

$$a_{11}^{(1)}-a_{22}^{(1)}=\int_0^\gamma \left(p_{11}^{(11)}(t)-p_{22}^{(11)}(t)\right)dt+\int_\gamma^1 \left(p_{11}^{(21)}(t)-p_{22}^{(21)}(t)\right)dt, \tag{293}$$

$$a_{12}^{(1)}a_{21}^{(1)}=\left[\int_0^\gamma p_{12}^{(11)}(t)\,e^{\beta_1\psi_2(t)}\,dt+\int_\gamma^1 p_{12}^{(21)}(t)\,e^{\beta_2\psi_2(t)}\,dt\right]\cdot\left[\int_0^\gamma p_{21}^{(11)}(t)\,e^{-\beta_1\psi_2(t)}\,dt+\right.$$
$$\left.+\int_\gamma^1 p_{21}^{(21)}(t)\,e^{-\beta_2\psi_2(t)}\,dt\right],$$

где σ обозначает след матрицы.

2. Предположим теперь

$$a_1=\int_0^1 \varphi_1(t)\,dt=0, \tag{294}$$

т.е. характеристические числа матрицы A_0 равны нулю.

Тогда, согласно (242) будет $A_0=0$, а $z_0^{\pm1}(t)$ определяется равенством (247). На основании (25) или (65) нетрудно убедиться, что при достаточно малых μ и при выполнении условия (291) х. ч. матрицы $A(\mu)$ разлагаются по целым степеням μ:

$$\lambda_{1,2}(\mu)=\frac{1}{2}\left[a_{11}^{(1)}+a_{22}^{(1)}\pm\sqrt{(a_{11}^{(1)}-a_{22}^{(1)})^2+4a_{12}^{(1)}a_{21}^{(1)}}\right]\mu+o_\pm(\mu), \tag{295}$$

причем элементы $a_{\sigma\nu}^{(1)}$ определяются по формулам (284) и (285), т.е. имеют место соотношения (293).

§ 5. Характеристические числа матрицы $P_0(t)$ равные

Принимая во внимание (234), предположим, что в матрице (224) величины b_k и c_k удовлетворяют условиям

$$\Delta_\nu=0\quad(\nu=1,\ 2). \tag{296}$$

Тогда х. ч. матрицы $Q_0(t)$, а следовательно, и матрицы $P_0(t)$ (см. (249)) определяются равенствами (251) и будут равные с непростым элементарным делителем.

Предполагая выполняемость условий (296), рассмотрим тот же вопрос, как и в § 4., в случаях (279) и (294).

1. Пусть имеет место неравенство (279).

Тогда $\exp(\pm A_0 t)$, $\Phi_0(t)$ и $z_0^{\pm 1}(t)$ получаем соответственно в виде (246), (253) и (256). Кроме того, согласно (25) и (246) имеем

$$z_1(t)=\int_0^t (z_0 P_1 z_0^{-1}-A_1)\,d\tau\cdot z_0(t). \tag{297}$$

Чтобы эта матрица была периодической с периодом $\omega=1$ необходимо положить

$$A_1=\int_0^{\gamma} z_0 P_1^{(1)} z_0^{-1}\,dt+\int_{\gamma}^{1} z_0 P_1^{(2)} z_0^{-1}\,dt,$$

где матрицы $P_1^{(k)} (k=1,2)$ определяются формулой (274). Отсюда, принимая во внимание (254)–(256) и обозначения (273) и (276), получаем

$$a_{\sigma\sigma}^{(1)}=\int_0^{\gamma}\left[p_{\sigma\sigma}^{(11)}(t)\mp b_3 p_{12}^{(11)}(t)\,\psi_2(t)\right]dt+$$

$$+\int_{\gamma}^{1}\left[p_{\sigma\sigma}^{(21)}(t)\mp c_3 p_{12}^{(21)}(t)\,\psi_2(t)\right]dt \quad (\sigma=1,\,2), \tag{298}$$

$$a_{12}^{(1)}=\int_0^{\gamma} p_{12}^{(11)}(t)\,dt+\int_{\gamma}^{1} p_{12}^{(21)}(t)\,dt, \tag{299}$$

$$a_{21}^{(1)}=\int_0^{\gamma}\left[p_{21}^{(11)}(t)+b_3\left(p_{11}^{(11)}(t)-p_{22}^{(11)}(t)\right)\psi_2(t)-b_3^2 p_{12}^{(11)}(t)\,\psi_2^2(t)\right]dt+$$

$$+\int_{\gamma}^{1}\left[p_{21}^{(21)}(t)+c_3\left(p_{11}^{(21)}(t)-p_{22}^{(21)}(t)\right)\psi_2(t)-c_3^2 p_{12}^{(21)}(t)\,\psi_2^2(t)\right]dt, \tag{300}$$

причем в (298) индексу $\sigma=1$ соответствует знак „ – “, а индексу $\sigma=2$ знак „ + “.

При таком выборе элементов (298)–(300) матрица

$$z_1(t)=\Phi_1(t)\,z_0(t), \tag{301}$$

где

$$\Phi_1(t)=\|\varphi_{\sigma\nu}^{(1)}(t)\|=\int_0^t z_0 P_1 z_0^{-1}\,d\tau-t\left(\int_0^{\gamma} z_0 P_1^{(1)} z_0^{-1}\,dt+\int_{\gamma}^{1} z_0 P_1^{(2)} z_0^{-1}\,dt\right)$$

$$(\sigma,\ \nu=1,2),$$

является непрерывной и периодической периода $\omega=1$. Учитывая (256), из (301) находим

$$z_1(t)=\begin{Vmatrix}\varphi_{11}^{(1)}(t)+\varphi_{12}^{(1)}(t)\,\vartheta(t) & \varphi_{12}^{(1)}(t)\\ \varphi_{21}^{(1)}(t)+\varphi_{22}^{(1)}(t)\,\vartheta(t) & \varphi_{22}^{(1)}(t)\end{Vmatrix} e^{\eta(t)}. \tag{302}$$

Здесь функции $\eta(t)$ и $\vartheta(t)$ определяются соответственно равенствами (254) и (255).

Так как матрицу $\exp(\pm A_0 t)$ находим из (246) и выполнено условие (279), то нетрудно заметить, что в рассматриваемом случае дискриминант $\Delta(\mu)$ имеет вид (288).

Предположим, что выполняется условие (290), где элементы $a_{\sigma\nu}^{(1)}$ даны формулами (298) – (300).

Тогда х. ч. матрицы $A(\mu)$ при достаточно малых μ разлагаются по целым степеням μ и разложение будет вида (292), причем надо принимать во внимание (279) и (298) – (300). При этом в разложении (292) верны соотношения

$$a_{11}^{(1)}+a_{22}^{(1)}=\int_0^\gamma \sigma\left(P_1^{(1)}(t)\right)dt+\int_\gamma^1 \sigma\left(P_1^{(2)}(t)\right)dt, \tag{303}$$

$$a_{11}^{(1)}-a_{22}^{(1)}=\int_0^\gamma \left[p_{11}^{(11)}(t)-p_{22}^{(11)}(t)-2b_3\psi_2(t)p_{12}^{(11)}(t)\right]dt+\int_\gamma^1 \left[p_{11}^{(21)}(t)-p_{22}^{(21)}(t)-\right.$$
$$\left.-2c_3\psi_2(t)p_{12}^{(21)}(t)\right]dt. \tag{304}$$

Здесь элементы $a_{12}^{(1)}$ и $a_{21}^{(1)}$ определяются равенствами (299) и (300), а функции $p_{\sigma\nu}^{(kj)}(t)$ – формулами (276).

2. Пусть теперь имеет место равенство (294).

Тогда, согласно (242) имеем $A_0=0$. На основании (25), (254), (259), (263), (297) нетрудно убедиться, что при выполнении условия (290) имеет место разложение (295), причем принимаем во внимание (299), (300), (303) и (304).

Наконец, приступим к рассмотрению данного вопроса в более интересном случае.

§ 6. В основном промежутке матрица $P_0(t)$ разной структуры

Рассмотрим разложение х. ч. матрицы $A(\mu)$ по целым степеням достаточно малого параметра μ в двух случаях, когда матрица $Q_0(t)$ имеет при $0<t\leqslant\gamma$ один канонический вид, а при $\gamma<t<1$ ее канонический вид другой.

1. Пусть, например, выполняются условия (260), т.е.

$$a_1=\int_0^1 \varphi_1(t)\,dt=0,\quad \Delta_1=b_1^2+4b_2b_3\neq 0,\quad \Delta_2=c_1^2+4c_2c_3=0. \tag{305}$$

В этом случае $A_0=0$ и матрица $Q_0(t)$ при $0<t\leqslant\gamma$ имеет разные х. ч., а при $\gamma<t<1$ ее х. ч. равные с непростым элементарным делителем. Тогда структура матрицы $P_0(t)$ будет (240) при $0<t\leqslant\gamma$ и (249) при $\gamma<t<1$, причем ее х.ч. $\zeta_{1,2}(t)$, $\zeta(t)$ и элемент $\chi(t)$ получаем соответственно из (239), (251) и (252).

Согласно (297), (247) и (256) в данном случае имеем

$$a_{\sigma\sigma}^{(1)}=\int_0^\gamma p_{\sigma\sigma}^{(11)}(t)\,dt+\int_\gamma^1 \left[p_{\sigma\sigma}^{(21)}(t)\mp c_3p_{12}^{(21)}(t)\;\psi_2(t)\right]dt \qquad (\sigma=1,2), \tag{306}$$

$$a_{12}^{(1)}=\int_0^\gamma p_{12}^{(11)}(t)\;e^{\beta_1\psi_1(t)}dt+\int_\gamma^1 p_{12}^{(21)}(t)\,dt, \tag{307}$$

$$a_{21}^{(1)}=\int_0^{\gamma} p_{21}^{(11)}(t)\,e^{-\beta_1\psi_2(t)}\,dt+$$

$$+\int_{\gamma}^{1}\left[p_{21}^{(21)}(t)+c_3\left(p_{11}^{(21)}(t)-p_{22}^{(21)}(t)\right)\psi_2(t)-c_3^2\psi_2^2(t)\,p_{12}^{(21)}(t)\right]dt, \tag{308}$$

где функции $p_{\sigma\nu}^{(11)}(t)$ и $p_{\sigma\nu}^{(21)}(t)$ определяются соответственно по формулам (275) и (276), а величина β_1 – равенством (235).

При таком выборе элементов $a_{\sigma\nu}^{(1)}$ (σ, $\nu=1$, 2) матрица $z_1(t)$ получается непрерывной и периодической с периодом $\omega=1$. При $0<t\leqslant\gamma$ из (301) имеем

$$z_1(t)=\begin{Vmatrix} \varphi_{11}^{(1)}(t)\,e^{\eta_1(t)} & \varphi_{12}^{(1)}(t)\,e^{\eta_2(t)} \\ \varphi_{21}^{(1)}(t)\,e^{\eta_1(t)} & \varphi_{22}^{(1)}(t)\,e^{\eta_2(t)} \end{Vmatrix}, \tag{309}$$

где функции $\eta_\sigma(t)$ даны верхним равенством (244). При $\gamma<t<1$ $z_1(t)$ будет вида (302), причем $\eta(t)$ и $\vartheta(t)$ определяются соответственно нижними равенствами (254) и (255).

В рассматриваемом случае дискриминант $\Delta(\mu)$ имеем в виде (288). Следовательно, согласно (306)–(308), при выполнении условия (290), которое будет

$$\left[\int_0^{\gamma}\left(p_{11}^{(11)}(t)-p_{22}^{(11)}(t)\right)dt+\int_{\gamma}^{1}\left(p_{11}^{(21)}(t)-p_{22}^{(21)}(t)\right)dt-2c_3\int_{\gamma}^{1}p_{12}^{(21)}(t)\,\psi_2(t)\,dt\right]^2+$$

$$+\left[\int_0^{\gamma}p_{12}^{(11)}(t)\,e^{\beta_1\psi_2(t)}\,dt+\int_{\gamma}^{1}p_{12}^{(21)}(t)\,dt\right]\cdot\left\{\int_0^{\gamma}p_{21}^{(11)}(t)\,e^{-\beta_1\psi_2(t)}\,dt+\right.$$

$$\left.+\int_{\gamma}^{1}\left[p_{21}^{(21)}(t)+c_3\left(p_{11}^{(21)}(t)-p_{22}^{(21)}(t)\right)\psi_2(t)-c_3^2p_{12}^{(21)}(t)\,\psi_2^2(t)\right]dt\right\}\neq 0, \tag{310}$$

х.ч. матрицы $A(\mu)$ разлагаются по целым степеням μ и имеем разложение вида (295). При этом, учитывая (306), справедливы соотношения (303) и

$$a_{11}^{(1)}-a_{22}^{(1)}=\int_0^{\gamma}\left(p_{11}^{(11)}(t)-p_{22}^{(11)}(t)\right)dt+$$

$$+\int_{\gamma}^{1}\left[p_{11}^{(21)}(t)-p_{22}^{(21)}(t)-2\,c_3p_{12}^{(21)}(t)\,\psi_2(t)\right]dt, \tag{311}$$

а элементы $a_{12}^{(1)}$ и $a_{21}^{(1)}$ даны соответственно формулами (307) и (308).

2. Предположим, что имеют место условия (266), т.е.

$$a_1=\int_0^1\varphi_1(t)\,dt=0,\quad \Delta_1=b_1^2+4\,b_2b_3=0,\quad \Delta_2=c_1^2+4\,c_2c_3\neq 0. \tag{312}$$

Тогда $A_0=0$ и матрица $Q_0(t)$ при $0<t\leqslant\gamma$ имеет равные х.ч. с непростым элементарным делителем, а при $\gamma<t<1$ ее х.ч. разные. При этом структура матрицы $P_0(t)$ будет (249) при $0<t\leqslant\gamma$ и (240) при $\gamma<t<1$, причем ее х. ч. $\zeta(t)$ и элемент $\chi(t)$ определяются соответственно верхними равенствами (251) и (252), а х. ч. $\zeta_{1,2}(t)$ – нижними равенствами (239).

Аналогично, как и выше, используя (297), (256), (247) и подчиняя $z_1(t)$ условию периодичности, находим элементы матрицы A_1:

$$a_{\sigma\sigma}^{(1)}=\int\limits_0^{\gamma}\left[p_{\sigma\sigma}^{(11)}(t)\mp b_3 p_{12}^{(11)}(t)\psi_2(t)\right]dt+\int\limits_{\gamma}^{1}p_{\sigma\sigma}^{(21)}(t)\,dt\quad(\sigma=1,2),\tag{313}$$

$$a_{12}^{(1)}=\int\limits_0^{\gamma}p_{12}^{(11)}(t)\,dt+\int\limits_{\gamma}^{1}p_{12}^{(21)}(t)\,e^{\beta_2\psi_2(t)}\,dt,\tag{314}$$

$$a_{21}^{(1)}=\int\limits_0^{\gamma}\left[p_{21}^{(11)}(t)+b_3\left(p_{11}^{(11)}(t)-p_{22}^{(11)}(t)\right)\psi_2(t)-b_3^2p_{12}^{(11)}(t)\psi_2^2(t)\right]dt+$$

$$+\int\limits_{\gamma}^{1}p_{21}^{(21)}(t)\,e^{-\beta_2\psi_2(t)}\,dt,\tag{315}$$

где в формуле (313) индексу $\sigma=1$ соответствует верхний знак „$-$“, а индексу $\sigma=2$ – знак „$+$“. Функции $p_{\sigma\nu}^{(11)}(t)$ и $p_{\sigma\nu}^{(21)}(t)$ получаем соответственно из (276) и (275). Величину β_2 находим из (235).

В данном случае дискриминант $\Delta(\mu)$ выражается тоже в виде (288). Предполагая выполняемость условия (290), т.е.

$$\frac{1}{4}\left\{\int\limits_0^{\gamma}\left[p_{11}^{(11)}(t)-p_{22}^{(11)}(t)-2b_3p_{12}^{(11)}(t)\,\psi_2(t)\right]dt+\int\limits_{\gamma}^{1}\left(p_{11}^{(21)}(t)-p_{22}^{(21)}(t)\right)dt\right\}^2+$$

$$+\left[\int\limits_0^{\gamma}p_{12}^{(11)}(t)\,dt+\int\limits_{\gamma}^{1}p_{12}^{(21)}(t)\,e^{\beta_2\psi_2(t)}dt\right]\cdot\left\{\int\limits_0^{\gamma}\left[p_{21}^{(11)}(t)+b_3\left(p_{11}^{(11)}(t)-p_{22}^{(11)}(t)\right)\psi_2(t)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\,b_3^2p_{12}^{(11)}(t)\,\psi_2^2(t)\right]dt+\int\limits_{\gamma}^{1}p_{21}^{(21)}(t)\,e^{-\beta_2\psi_2(t)}\,dt\right\}\neq 0,\tag{316}$$

получаем при достаточно малых μ разложение $\lambda_{1,2}(\mu)$ в виде (295), причем, при учитывании (313), имеют место соотношение (303) и

$$a_{11}^{(1)}-a_{22}^{(1)}=\int\limits_0^{\gamma}\left[p_{11}^{(11)}(t)-p_{22}^{(11)}(t)-2b_3p_{12}^{(11)}(t)\,\psi_2(t)\right]dt+$$

$$+\int\limits_{\gamma}^{1}\left[p_{11}^{(21)}(t)-p_{22}^{(21)}(t)\right]dt.\tag{317}$$

В данном случае в (295) элементы $a_{12}^{(1)}$ и $a_{21}^{(1)}$ находим по формулам (314) и (315).

Если в полученных разложениях (292) и (295) вещественная часть свободного члена или коэффициент при наименьшей степени μ не равен нулю, то вопрос об ограниченных решениях системы (1), в которой матрица $Q_0(t)$ имеет вид (224), решается при всех достаточно малых значениях μ.

Случаи, когда множество $\{(\alpha,\beta)_i^1\}$ состоит из n или из бесконечного (исчислимого) множества элементов, рассматриваются аналогично.

Пример. В заключение рассмотрим систему

$$\frac{dX}{dt} = X\left[\begin{Vmatrix} \sin 2\pi t + b_1(t)\sin 4\pi t & b_3(t)\sin 4\pi t \\ b_2(t)\sin 4\pi t & \sin 2\pi t \end{Vmatrix} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty} \begin{Vmatrix} 0 & \sin 2k\pi t \\ 1-\cos 4k\pi t & 0 \end{Vmatrix} \mu^k \right], \tag{318}$$

где

$$b_k(t) = \begin{cases} -2; \quad -1; \quad 1 & \text{при} \quad 0 < t \leqslant \frac{1}{2}, \\ 1; \quad \frac{1}{4}; \quad 3 & \text{при} \quad \frac{1}{2} < t < 1, \end{cases}$$

причем здесь в каждой строчке последовательно выписанные значения соответствуют индексу $k=1,2,3$.

В данном случае

$$\gamma = \frac{1}{2}, \qquad \varphi_1(t) = \sin 2\pi t,$$

а функция

$$\varphi_2(t) = \sin 4\pi t$$

обладает свойствами (226) и (229). Кроме того,

$$\psi_\nu(t) = \frac{1}{2\pi\nu}(1-\cos 2\pi\nu t) \quad (\nu = 1, 2);$$

$$q_{11}^{(k)}(t) = q_{22}^{(k)}(t) = 0, \quad q_{11}^{(k)}(t) = \sin 2k\pi t,$$

$$q_{21}^{(k)}(t) = 1 - \cos 4k\pi t,$$

где $k = 1,2,\ldots$

Для системы (318) выполняются условия (312), так как

$$a_1 = \int_0^1 \sin 2\pi t\, dt = 0, \quad \Delta_1 = 0, \quad \Delta_2 = 4.$$

Следовательно, элементы $a_{\sigma\nu}^{(1)}$ (σ, $\nu=1,2$) матрицы A_1 находим по формулам (313)–(315), в которых, учитывая (275) и (276)

$$p_{22}^{(11)}(t) = p_{21}^{(11)}(t) = -p_{11}^{(11)}(t) = \sin 2\pi t,$$

$$p_{12}^{(11)}(t) = 1 - \sin 2\pi t - \cos 4\pi t;$$

$$p_{11}^{(21)}(t) = -p_{22}^{(21)}(t) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{4}\sin 2\pi t - \cos 4\pi t\right),$$

$$p_{12}^{(21)}(t) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos 4\pi t - \frac{9}{4}\sin 2\pi t\right),$$

$$p_{21}^{(21)}(t) = \frac{1}{2}\left(-1 + \cos 4\pi t + \frac{1}{4}\sin 2\pi t\right),$$

а величину $\beta_2 = 2$ вычисляем по (235). Таким образом, имеем

$$a_{11}^{(1)} = -a_{22}^{(1)} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3\pi^2} - \frac{25}{16\pi},$$

$$a_{12}^{(1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2\pi)^n n!\,(n+1)!} + \frac{9}{8\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{\pi^n (2n+1)!!},$$

$$a_{21}^{(1)} = \frac{1}{\pi} - \frac{143}{192\pi^2} + \frac{17}{120\pi^3} + \frac{1}{8\pi}\exp\left(-\frac{1}{\pi}\right)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\pi(2n+1)!! - (2n)!!\,(n+1)}{(2\pi)^n n!\,(n+1)!\,(2n+1)},$$

причем нетрудно убедиться, что

$$a_{11}^{(1)}+a_{22}^{(1)}=0, \quad a_{12}^{(1)}>0, \quad a_{21}^{(1)}>0.$$

Так как

$$(a_{11}^{(1)}-a_{22}^{(1)})^2+4a_{12}^{(1)}a_{21}^{(1)}>0,$$

то выполняется условие (290). Следовательно, согласно (295), характеристические числа системы (318) при достаточно малых μ разлагаются по целым степеням μ:

$$\lambda_{1,2}(\mu)=\pm\frac{1}{2}\sqrt{(a_{11}^{(1)}-a_{22}^{(1)})^2+4a_{12}^{(1)}a_{21}^{(1)}}\;\mu+o_{\pm}(\mu),$$

где один из вещественных коэффициентов при μ является положительным, а остаточный член $o_{\pm}(\mu)\to 0$ при $\mu\to 0$. Таким образом, интегральная матрица системы (318) будет неограниченной при $t\to+\infty$.

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
17.III.1967

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Б. Голоквосчюс, Отыскание характеристических чисел решений одного класса систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, III, № 1 (1963), 77–101.
2. Н. П. Еругин, Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 13, 1946.
3. Н. П. Еругин, Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, изд. АН БССР, 1963.

VIENOS KLASĖS DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ SU PERIODINIAIS KOEFICIENTAIS SISTEMŲ SPRENDINIŲ CHARAKTERINGŲJŲ SKAIČIŲ RADIMAS

II dalis

P. GOLOKVOSČIUS

(Reziumė)

Šiame darbe, kuris yra [1] tęsinys, tiriama lygčių sistema

$$\frac{dX}{dt}=XQ(t,\ \mu), \tag{1}$$

kur antros eilės periodinė su periodu $\omega=1$ reali matrica

$$Q(t,\ \mu)=\sum_{k=0}^{\infty}Q_k(t)\,\mu^k \quad \Big(Q_k(t+1)=Q_k(t)\Big) \tag{2}$$

yra aprėžta srityje $t\geqslant 0\cdot\mu$ — skaitinis realus mažas parametras, o (2) eilutė konverguoja intervale $|\mu|<R$. Čia X — sistemos integralinė matrica. (2) eilutėje

$$Q_0(t)=\left\|\begin{matrix}\varphi_1(t)+b_1(t)\,\varphi_2(t) & b_3(t)\,\varphi_2(t)\\ b_2(t)\,\varphi_2(t) & \varphi_1(t)\end{matrix}\right\|,$$

$$b_k(t)=\begin{cases}b_k, & \text{kai}\quad 0<t\leqslant\gamma,\\ c_k, & \text{kai}\quad \gamma<t<1,\end{cases}$$

kur $0<\gamma<1$, b_k ir c_k – nelygūs nuliui pastovūs realūs skaičiai ir $b_k \neq c_k$ mažiausiai dėl vieno $k=1,2,3$. Funkcijos $\varphi_k(t)$ $(k=1,2)$ yra tolydinės ir patenkina sąlygas:

$$\varphi_k(t+1)=\varphi_k(t), \quad \varphi_k(0)=\varphi_k(1)=0, \quad \varphi_2(\gamma)=0,$$

$$\int_0^\gamma \varphi_2(t)\,dt = \int_\gamma^1 \varphi_2(t)\,dt = 0.$$

Šiame darbe yra gauti (1) sistemos sprendinių charakteringų skaičių išdėstymai mažo parametro μ laipsniais tuo atveju, kai

$$Q(t,\mu)\int_0^t Q(\tau,\mu)\,d\tau \neq \int_0^t Q(\tau,\mu)\,d\tau\cdot Q(t,\mu),$$

o matrica $O_0(t)$ kamutuoja su savo integralu ir intervaluose $(0,\mu)$ ir $(\mu, 1)$ yra skirtingo kanoninio pavidalo.

LA RECHERCHE DES NOMBRES CARACTERISTIQUES POUR LE SYSTÈME D'UNE CLASSE D'ÉQUATIONS DIFFERENTIELLES À COEFFICIENTS PÉRIODIQUES

II

P. GOLOKVOSČIUS

(Résumé)

Cet article est la continuation d'article [1]. Ici nous recherchons les nombres caractéristiques pour le système

$$\frac{dX}{dt} = XQ(t,\mu), \tag{1}$$

où

$$Q(t,\mu)=\sum_{k=0}^{\infty} Q_k(t)\,\mu^k \qquad \Big(Q_k(t+1)=Q_k(t)\Big) \tag{2}$$

est une matrice réelle du second degré. Catte matrice admet la période $\omega=1$ par rapport à t. Les matrices $Q_k(t)$ $(k=1,2,\ldots)$ sont bornées et continues de la variable réelle $t\geqslant 0$. X est une matrice integrale, μ est un petit réel parametre variable independant de t. La serie (2) est convergente pour $|\mu|<R$.

Supposons que les matrices $Q(t,\mu)$ et $Q_0(t)$ satisfont respectivement aux relations:

$$Q(t,\mu)\int_0^t Q(\tau,\mu)\,d\tau \neq \int_0^t Q(\tau,\mu)\,d\tau\cdot Q(t,\mu),$$

$$Q_0(t)\int_0^t Q_0(\tau)\,d\tau = \int_0^t Q_0(\tau)\,d\tau\cdot Q_0(t),$$

où

$$Q_0(t)=\begin{Vmatrix} \varphi_1(t)+b_1(t)\,\varphi_2(t) & b_3(t)\,\varphi_2(t) \\ b_2(t)\,\varphi_2(t) & \varphi_1(t) \end{Vmatrix},$$

$$b_k(t)=\begin{cases} b_k & \text{pour} \quad 0<t\leqslant\gamma, \\ c_k & \text{pour} \quad \gamma<t<1. \end{cases}$$

Observons que dans les cas mentionés ci-dessus b_k et c_k sont des constantes quelconques différents de 0 et que $b_k\neq c_k$ au moins pour un nouméro $k=1,2,3$. Supposons que les fonctions $\varphi_k(t)$ $(k=1,2)$ sont continues, admettant la période $\omega=1$ et satisfaisant aux conditions:

$$\varphi_k(0)=\varphi_k(1)=0 \qquad (k=1,\ 2), \quad \varphi_2(\gamma)=0,$$

$$\int_0^\gamma \varphi_2(t)\,dt = \int_\gamma^1 \varphi_2(t)\,dt = 0.$$