LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VII Nr. 4, 1967
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VII № 4, 1967

ОБ ОСТАТОЧНЫХ ЧЛЕНАХ В АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯХ ДЛЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ

А. БИКЯЛИС

1. Рассмотрим остаточные члены в асимптотических разложениях для степени характеристической функции $f(t)$ и ее производных случайной величины ζ с положительной дисперсией σ^2 и конечным абсолютным моментом β_s s-того порядка. Не ограничивая общности положим, что ζ имеет нулевое математическое ожидание.

Г. Крамером ([1], стр. 90), показано, что

$$f^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)=e^{-\frac{t^2}{2}}\left(1+\sum_{\nu=1}^{s-3}\left(P_\nu(it)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^\nu\right)\right)+R_n(t).$$

При этом в интервале $|t|\leqslant\sqrt[6]{\frac{n}{16}}\left(\frac{\sigma^s}{\beta_s}\right)^{\frac{1}{s}}$

$$|R_n(t)\leqslant\frac{\Theta_s}{n^{\frac{s-2}{2}}}\left(\frac{\beta_s}{\sigma^s}\right)^{\frac{3(s-2)}{s}}\left(|t|^s+|t|^{3(s-2)}\right)e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Г. Эссееном [2] был расширен интервал до $|t|\leqslant\frac{\sqrt{n}}{8s}\left(\frac{\sigma^s}{3_s}\right)^{\frac{3}{s}}$, но после замены $e^{-\frac{t^2}{2}}$ на $e^{-\frac{t^2}{4}}$.

Для произведения характеристических функций В. Статулявичус [3] получил асимптотическое разложение по дробям Ляпунова и в частности показал, что в интервале $|t|\leqslant\sqrt[6]{n}\left(\frac{\sigma^s}{\beta_s}\right)^{\frac{1}{3(s-2)}}$

$$|R_n(t)|\leqslant\frac{\Theta_s\beta_s}{\sigma^s n^{\frac{s-2}{2}}}\left(|t|^s+|t|^{3(s-2)}\right)e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

$$\text{Здесь } \Theta_s\leqslant e^{3s-4} \text{ при } |t|\leqslant\min\left\{\sqrt[6]{n}\left(\frac{\sigma^s}{\beta_s}\right)^{\frac{3}{3(s-2)}};\ \frac{\sigma^s n^{\frac{s-2}{2}}}{s\beta^s}\right\}.$$

Мы продолжим исследования остаточного члена $R_n(t)$ с целью расширить интервал изменения аргумента t и покажем, что

$$|R_n(t)|\leqslant\frac{2^{s-1}\beta_s|t|^s}{0{,}99^s\sigma^s n^{\frac{s-2}{2}}}e^{-\frac{t^2}{4}}$$

при $|t| \leqslant \frac{\sqrt{n}}{10} \left(\frac{\sigma^s}{\beta_s}\right)^{\frac{1}{s-2}}$.

Кроме того, в интервале $|t| \leqslant \frac{\sqrt{n}}{16e} \left(\frac{\sigma^s}{\beta_s}\right)^{\frac{1}{s-2}}$

$$\left| \frac{d^r}{dt^r} \left[f^n \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) - e^{-\frac{t^2}{2}} \left(1 + \sum_{\nu=1}^{s-3} P_\nu(it) \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^\nu \right) \right] \right| \leqslant \frac{r!^2 \, 2^{6(s+r-2)} \beta_s |t|^{s-r}}{(s-2)\,\sigma^s n^{\frac{s-2}{2}}} e^{-\frac{t^2}{6}}$$

для $r \leqslant s$.

Надо заметить, что асимптотические разложения для производных изучались в работах [4–6,9]. Например, в [6] показано, что остаточный член не больше

$$\frac{\Theta_s \beta_s}{\sigma^s n^{\frac{s-2}{2}}} \left(|t|^{s-r} + |t|^{3(s-2)+r}\right) e^{-\frac{t^2}{3}}$$

при $|t| \leqslant n^{\frac{\varepsilon}{6}} \left(\frac{\sigma^s}{\beta_s}\right)^{\frac{\varepsilon}{3(s-2)}}$, $0 < \varepsilon < 1$. Θ_s – зависит только от s.

Здесь, вместо известного неравенства

$$|\varkappa_s| \leqslant s^s \beta_s$$

К. Крамера ([1], стр. 39), мы пользуемся оценкой

$$|\varkappa_s| \leqslant (s-1)!\, \beta_s$$

(см. лемму 4). $\varkappa_s$ и β_s, соответственно, семиинвариант и абсолютный момент s-того порядка случайной величины ζ.

2. Сперва докажем ряд лемм.

Лемма 1. *Пусть $h(t)$ – некоторая s – раз дифференцируемая функция; тогда*

$$\frac{d^s}{dt^s} \ln h(t) = \frac{h^{(s)}(t)}{h(t)} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{s-1} \sum_{j_i=i}^{s-1} \sum_{j_{i-1}=i-1}^{j_i-1} \cdots \sum_{j_2=2}^{j_3-1} \sum_{j_1=1}^{j_2-1} \frac{(-1)^i (s-1)!}{(s-j_i)!\,(j_i-j_{i-1})! \ldots (j_2-j_1)!\,(j_1-1)!} \times$$

$$\times \frac{h^{(s-j_i)}(t)\, h^{(j_i-j_{i-1})}(t) \ldots h^{(j_2-j_1)}(t)\, h^{(j_1)}(t)}{[h(t)]^{i+1}}. \qquad (1)$$

Здесь $h^{(\nu)}(t)$ – ν-тая производная функции $h(t)$.

Для сокращения записи положим

$$\sum\nolimits^* \frac{(-1)^i (s-1)!}{(s-j_i)!\,(j_i-j_{i-1})! \ldots (j_2-j_1)!\,(j_1-1)!} \frac{h^{(s-j_i)}(t)\, h^{(j_i-j_{i-1})}(t) \ldots h^{(j_2-j_1)}(t)\, h^{(j_1)}(t)}{[h(t)]^{i+1}} =$$

$$= \sum_{j_i=i}^{s-1} \sum_{j_{i-1}=i-1}^{j_i-1} \cdots \sum_{j_2=2}^{j_3-1} \sum_{j_1=1}^{j_2-1} \frac{(-1)^i (s-1)!}{(s-j_i)!\,(j_i-j_{i-1})! \ldots (j_2-j_1)!\,(j_1-1)!} \times$$

$$\times \frac{h^{(s-j_i)}(t)\, h^{(j_i-j_{i-1})}(t) \ldots h^{(j_2-j_1)}(t)\, h^{(j_1)}(t)}{[h(t)]^{i+1}}.$$

Заметим, что формулу (1) (в ином виде) можно получить как следствие из классической формулы Фа де Бруно (см. [7], стр. 278). Для наших целей равенство (1) более подходящее.

Доказательство леммы 1. Нетрудно проверить, что (1) имеет место для $s=1,2$. Положим, что формула справедлива для всех $\nu \leqslant s-1$.

Очевидно

$$h^{(s)}(t)=\sum_{m=0}^{s-1} \frac{(s-1)!}{(s-m-1)!\ m!}\ h^{(s-m-1)}(t)\ \frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}}\ \ln h(t) \tag{2}$$

и

$$\frac{d^s}{dt^s}\ \ln h(t)=\frac{h^s(t)}{h(t)}-\sum_{m=0}^{s-2} \frac{(s-1)!}{(s-m-1)!\ m!}\ \frac{h^{(s-m-1)}(t)}{h(t)}\ \frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}}\ \ln h(t). \tag{3}$$

По предположению

$$\frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}}\ \ln h(t)=\frac{h^{(m+1)}(t)}{h(t)}-\sum_{j_1=1}^{m} \frac{m!}{(m+1-j_1)!\ (j^1-1)!}\ \frac{h^{(m+1-j_1)}(t)\ h^{(j_1)}(t)}{[h(t)]^2}+$$

$$+\sum_{j_2=2}^{m}\ \sum_{j_1=1}^{j_2-1} \frac{m!}{(m+1-j_2)!\ (j_2-j_1)!\ (j_1-1)!}\ \frac{h^{(m+1-j_2)}(t)\ h^{(j_2-j_1)}(t)\ h^{(j_1)}(t)}{[h(t)]^3}+\cdots+$$

$$+\sum_{j_m=m}^{m}\ \sum_{j_{m-1}=m-1}^{j_m-1} \cdots \sum_{j_2=2}^{j_3-1}\ \sum_{j_1=1}^{j_2-1} \frac{(-1)^m\, m!}{(m+1-j_m)!\ (j_m-j_{m-1})! \ldots (j_2-j_1)!\ (j_1-1)} \times$$

$$\times \frac{h^{(m+1-j_m)}(t)\ h^{(j_m-j_{m-1})}(t) \ldots h^{(j_2-j_1)}(t) h^{(j_1)}(t)}{[h(t)]^{m+1}}.$$

Отсюда и (3) следует

$$\frac{d^s}{dt^s}\ \ln h(t)=\frac{h^{(s)}(t)}{h(t)}-\sum_{m=0}^{s-2} \frac{(s-1)!}{(s-m-1)!\ m!}\ \frac{h^{(s-m-1)}(t)\ h^{(m+1)}(t)}{[h(t)]^2}+$$

$$+\sum_{m=1}^{s-2}\ \sum_{j_1=1}^{m} \frac{(s-1)!}{(s-m-1)!\ (m+1-j_1)!\ (j_1-1)!}\ \frac{h^{(s-m-1)}(t)\ h^{(m+1-j_1)}(t)\ h^{(j_1)}(t)}{[h(t)]^3}+\cdots+$$

$$+\sum_{m=s-2}^{s-2}\ \sum_{j_m=m}^{m}\ \sum_{j_{m-1}=m-1}^{j_m-1} \cdots \sum_{j_2=2}^{j_3-1}\ \sum_{j_1=1}^{j_2-1} \times$$

$$\times \frac{(-1)^m (r-1)!\ h^{(s-m-1)}(t)\ h^{(m+1-j_m)}(t)\ h^{(j_m-j_{m-1})}(t) \ldots h^{(j_2-j_1)}(t)\ h^{(j_1)}(t)}{(s-m-1)!\ (m+1-j_m)!\ (j_m-j_{m-1})! \ldots (j_2-j_1)!\ (j_1-1)!\ [h(t)]^{m+2}}.$$

Утверждение леммы получаем после замены в первой сумме $m+1$ на j_1, во второй сумме $m+1$ на j_2 и т.д.

Аналогично доказывается следующая лемма.

Лемма 2. *При выполнении условий леммы 1 имеет место равенство*

$$\frac{h^{(s)}(t)}{h(t)}=\varkappa^{(s)}(t)+\sum_{i=1}^{s-1}\ \sum\nolimits^{*} \frac{(s-j)!}{j_i j_{i-1} \ldots j_2 j_1 (s-j_i-1)!\ (j_i-j_{i-1}-1)! \ldots (j_2-j_1-1)!\ (j_1-1)!} \times$$

$$\times\ \varkappa^{(s-j_i)}(t)\ \varkappa^{(j_i-j_{i-1})}(t) \ldots \varkappa^{(j_2-j_1)}(t)\ \varkappa^{(j_1)}(t), \tag{4}$$

где

$$\varkappa^{(\nu)}(t) = \frac{d^\nu}{dt^\nu} \ln h(t).$$

Лемма 3. *Для малых* $|t|$ *имеем*

$$\left| \frac{d^s}{dt^s} \ln f(t) \right| \leqslant \frac{(s-1)!\ 2^{s-1} \beta_s}{|f(t)|^s}. \tag{5}$$

Следствие.

$$|\varkappa_s| \leqslant (s-1)!\ 2^{s-1} \beta_s.$$

Заметим, что это неравенство имеет место для нецентрированных случайных величин.

Доказательство леммы 3. Поскольку $\beta_1 \leqslant \beta_2^{\frac{1}{2}} \leqslant \ldots \leqslant \beta_s^{\frac{1}{s}}$, то из формулы (1) вытекает

$$\left| \frac{d^s}{dt^s} \ln f(t) \right| \leqslant \left(\frac{1}{(s-1)!} + \sum_{i=1}^{s-1} \sum{}^* \frac{1}{(s-j_i)!\ (j_i-j_{i-1})! \ldots (j_2-j_1)!\ (j_1-1)!} \right) \frac{(s-1)!\ \beta_s}{|f(t)|^s}. \tag{6}$$

Сумма

$$\Delta = 1 + \sum_{i=1}^{s-1} \sum_{j_i=1}^{s-1} \sum_{j_{i-1}=i-1}^{j_i-1} \ldots \sum_{j_2=2}^{j_3-1} \sum_{j_1=1}^{j_2-1} 1$$

не больше числа членов не равных нулю в раскрытом определителе

$$\varkappa_s = (-1)^{s-1} \begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_2 & \binom{1}{0}\alpha_1 & 1 & & 0 \\ \alpha_3 & \binom{2}{0}\alpha_2 & \binom{2}{1}\alpha_1 & & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_s & \binom{s-1}{0}\alpha_{s-1} & \binom{s-1}{1}\alpha_{s-2} & \cdots & \binom{s-1}{s-2}\alpha_1 \end{vmatrix},$$

где α_ν — начальный момент ν-того порядка случайной величины ξ, то есть не больше $2^{\nu-1}$:

$$\Delta \leqslant 2^{s-1}. \tag{7}$$

Лемма доказана.

Лемма 4. *Если* ξ *имеет нулевое математическое ожидание, то*

$$|\varkappa_s| \leqslant (s-1)!\ \beta_s. \tag{8}$$

Доказательство леммы 4. Лемму докажем методом математической индукции. Очевидно, $\varkappa_1=0$, $\varkappa_2=\beta_2$, $\varkappa_3=\alpha_3$.

Положим, что $|\varkappa_\nu| \leqslant (\nu-1)!\ |\beta_\nu$ для всех $\nu \leqslant s-1$.

Так как $\alpha_1=0$ и $\varkappa_1=0$, то из (3) вытекает

$$\varkappa_s = \alpha_s - \sum_{\nu=1}^{s-3} \frac{(s-1)!}{(s-\nu-1)!\ \nu!} \alpha_{s-\nu-1} \varkappa_{\nu+1}.$$

Отсюда получаем

$$|\varkappa_s| \leqslant \beta_s + \sum_{\nu=1}^{s-3} \frac{(s-1)!}{(s-\nu-1)!}\,\beta_{s-\nu-1}\,\beta_{\nu+1} \leqslant \left(\frac{1}{(s-1)!} + \sum_{\nu=1}^{s-3} \frac{1}{(s-\nu-1)!}\right)(s-1)!\;\beta_s,$$

где

$$\frac{1}{(s-1)!} + \sum_{\nu=1}^{s-3} \frac{1}{(s-\nu-1)!} < e-2.$$

Лемма доказана.

Лемма 5.

$$\left|\frac{d^\nu}{dt^\nu}\ln f^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right| \leqslant \frac{13}{16}\,(s-1)^\nu\,|t|^{2-\nu} \tag{9}$$

при

$$\nu \leqslant s,\ 3 \leqslant s \text{ и } |t| \leqslant \frac{\sqrt{n}}{16e}\left(\frac{\sigma^s}{\beta_s}\right)^{\frac{1}{s-2}}.$$

Доказательство леммы 5. По формуле Тейлора

$$\frac{d^\nu}{dt^\nu}\ln f^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \sum_{l=\nu}^{s-1} \frac{\varkappa_l\, i^l\, t^{l-\nu}}{(l-\nu)!\,\sigma^l\, n^{\frac{l-2}{2}}} + \frac{i^s\, t^{s-\nu}}{(s-\nu)!\,\sigma^s\, n^{\frac{s-2}{2}}}\,\frac{d^s}{dt^s}\ln f\left(\frac{\Theta_\nu t}{\sigma\sqrt{n}}\right),\quad |\Theta_\nu| < 1. \tag{10}$$

Так как

$$\left(\frac{\beta_l}{\sigma^l}\right)^{\frac{1}{l-2}} \leqslant \left(\frac{\beta_s}{\sigma^s}\right)^{\frac{1}{s-2}} \tag{11}$$

при $3 \leqslant l \leqslant s$, то из (5) и (8) следует

$$\left|\sum_{l=\nu+2}^{s-1} \frac{\varkappa_l\, i^l\, t^{l-\nu}}{(l-\nu)!\,\sigma^l\, n^{\frac{l-2}{2}}}\right| \leqslant \frac{9}{16}\,(s-1)^\nu\,|t|^{2-\nu} \tag{12}$$

и

$$\left|\frac{i^s\, t^{s-\nu}}{(s-\nu)!\,\sigma^s\, n^{\frac{s-2}{2}}}\,\frac{d^s}{dt^s}\ln f\left(\frac{t\Theta_\nu}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right| \leqslant \frac{(s-1)^\nu\,|t|^{2-\nu}}{4}$$

при $|t| \leqslant \frac{\sqrt{n}}{16e}\left(\frac{\sigma_s}{\beta_s}\right)^{\frac{1}{s-2}}$. При выводе последнего неравенства была использована оценка $\left|f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right| \geqslant 0{,}99$. Лемма 5 доказана.

Как обычно, многочлены $P_r(\omega)$ определим формальным равенством

$$\exp\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varkappa_{\nu+2}\,\omega^{\nu+2}}{\sigma^{\nu+2}\,(\nu+2)!}\, z^\nu\right\} = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} P_r(\omega)\, z^r. \tag{13}$$

С помощью леммы 2 нетрудно показать, что

$$P_r(it) = \frac{\varkappa_{r+2}\,(it)^{r+2}}{\sigma^{r+2}\,(r+2)!} + \sum_{l=1}^{r-1} \sum\nolimits^{*} \times$$

$$\times \frac{(r-j_l)(j_l-j_{l-1})\ldots(j_2-j_1)\,\varkappa_{r-j_l+2}\,\varkappa_{j_l-j_{l-1}+2}\ldots\varkappa_{j_2-j_1+2}\,\varkappa_{j_1+2}\,(it)^{r+2(l+1)}}{r j_l\, j_{l-1}\ldots j_2\,(r-j_l+2)!\,(j_l-j_{l-1}+2)!\ldots(j_2-j_1+2)!\,(j_1+2)!\,\sigma^{r-j_l+2}\,\sigma^{j_l-j_{l-1}+2}\ldots\sigma^{j_2-j_1+2}\,\sigma^{j_1+2}}.$$

Надо заметить, что эта формула (в ином виде) впервые получена В. В. Петровым в [8].

Лемма 6.

$$|P_r(\omega)| \leqslant 2^r |\omega|^r \left(\frac{\beta_s}{\sigma^s}\right)^{\frac{r}{s-2}} \sum_{\nu=1}^{r} \frac{|\omega|^{2\nu}}{4^\nu \nu!} \tag{14}$$

при $r \leqslant s-2$.

Доказательство леммы 6. Лемму докажем методом математической индукции. Очевидно

$$P_1(\omega) = \frac{\alpha_3 \omega^3}{6\sigma^3}$$

и

$$P_2(\omega) = \frac{\alpha_4 \omega^4}{24\sigma^4} + \frac{\omega^6}{72}\left(\frac{\alpha_3}{\sigma^3}\right)^2.$$

В силу (11) лемма верна при $r=1,2$. Положим, что неравенство (14) имеет место для всех $r \leqslant s-3$:

$$|P_r(\omega)| \leqslant 2^r |\omega|^r \left(\frac{\beta_s}{\sigma^s}\right)^{\frac{r}{s-2}} \sum_{\nu=1}^{r} \frac{|\omega|^{2\nu}}{4^\nu \nu!}$$

Нетрудно показать, что

$$P_{s-2}(\omega) = \frac{\varkappa_s \omega^s}{s!\, \sigma^s} + \sum_{r=1}^{s-3} \frac{(s-r-2)\varkappa_{s-r}\omega^{s-r}}{(s-r)!\,(s-2)\sigma^{s-r}} P_r(\omega). \tag{15}$$

Поскольку

$$\begin{aligned}
&\varkappa_3 = \alpha_3,\\
&\varkappa_4 = \alpha_4 - 3\alpha_2^2,\\
&\varkappa_5 = \alpha_5 - 10\alpha_3\alpha_2,\\
&\varkappa_6 = \alpha_6 - 15\alpha_4\alpha_2 - 10\alpha_3^2 + 30\alpha_2^3,\\
&\varkappa_7 = \alpha_7 - 21\alpha_5\alpha_2 - 35\alpha_4\alpha_3 + 210\alpha_3\alpha_2^2,
\end{aligned}$$

то $|\varkappa_3| \leqslant \beta_3$, $|\varkappa_4| \leqslant 4\beta_4$, $|\varkappa_5| \leqslant 11\beta_5$, $|\varkappa_6| \leqslant 56\beta_6$ и $|\varkappa_7| \leqslant 267\beta_7$.

Из (8), (11) и (15) заключаем

$$\begin{aligned}
|P_{s-2}(\omega)| &\leqslant \frac{\beta_s|\omega|^s}{s\sigma^s} + \frac{\beta_3|\omega|^3}{6(s-2)\sigma^3}|P_{s-3}(\omega)| + \frac{\beta_4|\omega|^4}{3(s-2)\sigma^4}|P_{s-4}|(\omega)| + \\
&+ \frac{33\beta_5|\omega|^5}{5!\,(s-2)\sigma^5}|P_{s-5}(\omega)| + \frac{224\beta_6\omega^6}{6!\,(s-2)\sigma^6}|P_{s-6}(\omega)| + \frac{5\cdot 267\beta_7|\omega|^7}{7!\,(s-2)\sigma^7}|P_{s-7}(\omega)| + \\
&+ \sum_{r=1}^{s-8} \frac{(s-r-2)\beta_{s-r}|\omega|^{s-r}}{(s-2)(s-r)\sigma^{s-r}}|P_r(\omega)| \leqslant \frac{2^{s-2}\beta_s|\omega|^{s-2}}{\sigma^s}\left(\frac{|\omega|^2}{s\,2^{s-2}} + \frac{1}{12(s-2)}\sum_{\nu=1}^{s-3}\frac{|\omega|^{2(\nu+1)}}{4^\nu \nu!} + \right.\\
&+ \frac{1}{12(s-2)}\sum_{\nu=1}^{s-4}\frac{|\omega|^{2(\nu+1)}}{4^\nu \nu!} + \frac{33}{8\cdot 5!\,(s-2)}\sum_{\nu=1}^{s-5}\frac{|\omega|^{2(\nu+1)}}{4^\nu \nu!} + \frac{7}{480(s-2)}\sum_{\nu=1}^{s-6}\frac{|\omega|^{2(\nu+1)}}{4^\nu \nu!} + \\
&\left. + \frac{5\cdot 257}{32\cdot 7!\,(s-2)}\sum_{\nu=1}^{s-7}\frac{|\omega|^{2(\nu+1)}}{4^\nu \nu!} + \sum_{r=1}^{s-8}\frac{(s-r-2)2^{r-s+2}}{(s-2)(s-r)}\sum_{\nu=1}^{r}\frac{|\omega|^{2(\nu+1)}}{4^\nu \nu!}\right) \leqslant \\
&\leqslant 2^{s-2}\frac{\beta_s|\omega|^{s-2}}{\sigma^s}\sum_{\nu=1}^{s-2}\frac{|\omega|^{2\nu}}{4^\nu \nu!}.
\end{aligned}$$

Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *В интервале* $|t| \leqslant \frac{\sqrt{n}}{16e}\left(\frac{\sigma^s}{\beta_s}\right)^{\frac{1}{s-2}}$

$$\left|\frac{d^r}{dt^r}\left(-\frac{t^2}{2}+\sum_{\nu=3}^{s-1}\frac{\varkappa_\nu (it)^\nu}{\nu!\,\sigma^\nu n^{\frac{\nu-2}{2}}}\right)\right| \leqslant (s-1)^r |t|^{2-r} \qquad (16)$$

для $s \geqslant 3$.

Доказательство не будем приводить, так как оно элементарно.

Теорема 1. *Пусть* ξ *имеет равное нулю математическое ожидание и конечный момент s-того порядка* ($s \geqslant 3$), *тогда в интервале* $|t| \leqslant \frac{\sqrt{n}}{10}\left(\frac{\sigma^s}{\beta_s}\right)^{\frac{1}{s-2}}$

$$\left|f^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)-e^{-\frac{t^2}{2}}\left(1+\sum_{\nu=1}^{s-3}P_\nu(it)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^\nu\right)\right| \leqslant \frac{2^{s-2}\beta_s |t|^s}{0{,}99^s\sigma^s n^{\frac{s-2}{2}}}\,e^{-\frac{t^2}{4}}. \qquad (17)$$

Доказательство теоремы 1. При $|t| \leqslant \frac{\sqrt{n}}{10}\left(\frac{\sigma^s}{\beta_s}\right)^{\frac{1}{s-2}}$ имеем

$$\left|f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right| \geqslant 0{,}99.$$

По формуле Тейлора

$$\ln f^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = -\frac{t^2}{2}+\sum_{\nu=3}^{s-1}\frac{\varkappa_\nu (it)^\nu}{\nu!\,\sigma^\nu n^{\frac{\nu-2}{2}}}+\frac{(it)^s}{s!\,\sigma^s n^{\frac{s-2}{2}}}\,\frac{d^s}{dt^s}\ln f\left(\frac{\Theta t}{\sigma\sqrt{n}}\right), \qquad |\Theta|<1.$$

Положим $\varkappa_s = \frac{d^s}{dt^s}\ln f\left(\frac{\Theta t}{\sigma\sqrt{n}}\right)$ и $\varkappa_{s+1}=\varkappa_{s+2}=\ldots=0$. Тогда

$$e^{\frac{t^2}{2}} f^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)=\exp\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\varkappa_{\nu+2}(it)^{\nu+2}}{(\nu+2)!\,\sigma^{\nu+2}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^\nu\right\}=1+\sum_{\nu=1}^{s-3}P_\nu(it)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^\nu+R_n(t)\,e^{\frac{t^2}{2}}.$$

Здесь

$$R_n(t)\,e^{\frac{t^2}{2}} = \left(e^{\frac{(it)^s\varkappa_s}{s!\,\sigma^s n^{\frac{s-2}{2}}}}-1\right)\exp\left\{\sum_{\nu=3}^{s-1}\frac{\varkappa_\nu (it)^\nu}{\nu!\,\sigma^\nu n^{\frac{\nu-2}{2}}}\right\}+\sum_{\nu=s-2}^{\infty}\bar{P}_\nu(it)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^\nu.$$

Многочлены $\bar{P}_\nu(\omega)$ определены равенством

$$\exp\left\{\sum_{\nu=3}^{s-1}\frac{\varkappa_\nu\omega^\nu}{\nu!\,\sigma^\nu n^{\frac{\nu-2}{2}}}\right\}=1+\sum_{\nu=1}^{s-3}P_\nu(\omega)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^\nu+\sum_{\nu=s-2}^{\infty}\bar{P}_\nu(\omega)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^\nu. \qquad (18)$$

Методом математической индукции (аналогично получению оценки (14)) можем показать, что для всех r

$$|\bar{P}_r(\omega)| \leqslant 2^r |\omega|^r \left(\frac{\beta_s}{\sigma^s}\right)^{\frac{r}{s-2}} \sum_{\nu=1}^{r} \frac{|\omega|^{2\nu}}{4^\nu \nu!}. \tag{19}$$

В силу лемм 3 и 4 в интервале $|t| \leqslant \frac{\sqrt{n}}{10} \left(\frac{\sigma^s}{\beta_s}\right)^{\frac{1}{s-2}}$

$$\left|\sum_{\nu=3}^{s-1} \frac{\varkappa_\nu (it)^\nu}{\nu!\, \sigma^\nu n^{\frac{\nu-2}{2}}}\right| \leqslant \frac{t^2}{20}$$

и

$$\left| e^{\frac{(it)^s \varkappa_s}{s!\, \sigma^s n^{\frac{s-2}{2}}}} - 1 \right| \leqslant \frac{|t|^s |\varkappa_s|}{s!\, \sigma^s n^{\frac{s-2}{2}}} \exp\left\{ \frac{|t|^s |\varkappa_s|}{s!\, \sigma^s n^{\frac{s-2}{2}}} \right\} \leqslant \frac{2^{s-1} \beta_s |t|^s e^{\frac{t^2}{5}}}{0{,}99^s s \sigma^s n^{\frac{s-2}{2}}}.$$

Отсюда и (19) вытекает

$$|R_n(t)| \leqslant \frac{2^{s-1} \beta_s |t|^s e^{-\frac{t^2}{4}}}{0{,}99^s s \sigma^s n^{\frac{s-2}{2}}} + \frac{2^{s-2} \beta_s |t|^s s\, e^{-\frac{t^2}{4}}}{\sigma^s n^{\frac{s-2}{2}}} \sum_{\nu=s-2}^{\infty} \left(\frac{2|t|}{\sqrt{n}} \left(\frac{\beta_s}{\sigma^s}\right)^{\frac{1}{s-2}} \right)^{\nu-(s-2)}$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *При выполнении условий теоремы 1 в интервале*

$$|t| \leqslant \frac{\sqrt{n}}{16e} \left(\frac{\sigma^s}{\beta_s}\right)^{\frac{1}{s-2}}$$

имеет место неравенство

$$\left| \frac{d^r}{dt^r} \left[f^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) - e^{-\frac{t^2}{2}} \left(1 + \sum_{\nu=1}^{s-3} P_\nu(it) \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^\nu \right) \right] \right| \leqslant \frac{r!^2\, 2^{8(s+r-2)} \beta_s |t|^{s-r}}{(s-2)\, \sigma^s n^{\frac{s-2}{2}}} e^{-\frac{t^2}{6}}$$

для $r \leqslant s$.

Доказательство теоремы 2. Положим

$$\varkappa(t) = \ln f^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right),$$

$$\psi(t) = \sum_{\nu=2}^{s-1} \frac{\varkappa_\nu (it)^\nu}{\nu!\, \sigma^\nu n^{\frac{\nu-2}{2}}}$$

и

$$b(t) = \frac{(it)^s}{s!\, \sigma^s n^{\frac{s-2}{2}}} \frac{d^s}{dt^s} \ln f\left(\frac{\Theta t}{\sigma\sqrt{n}}\right), \quad |\Theta| < 1.$$

Тогда равенство (10) можно записать в виде

$$\varkappa^{(\nu)}(t) = \psi^{(\nu)}(t) + b^{(\nu)}(t).$$

С помощью леммы 2 r-тую производную функции $f^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)$ выражаем через $\varkappa^{\nu}(t)$, то есть через суммы $\Psi^{\nu}(t)+b^{\nu}(t)$. Потом, после очевидных вычислений, получаем

$$I_1=\left|\frac{d^r f^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)}{dt^r}-\frac{f^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)}{e^{\psi(t)}}\frac{d^r e^{\psi(t)}}{dt^r}\right|=$$

$$=\left|f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\left[b^{(r)}(t)+\sum_{i=1}^{r-1}\sum{}^{*}\sum_{l=0}^{i}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\frac{(r-1)!\,\varkappa^{(j_{i+1}-j_i)}(t)\ldots\varkappa^{(j_{i-l+2}-j_{i-l+1})}(t)\,b^{(j_{i-l+1}-j_{i-l})}(t)\,\psi^{(j_{i-l}-j_{i-l-1})}(t)\ldots\psi^{(j_1-j_0)}(t)}{j_i j_{i-1}\ldots j_1(j_{i+1}-j_i-1)!\ldots(j_2-j_1-1)!\,(j_2-j_1)!}\right]\right|,\tag{20}$$

где $j_0=0$ и $j_{i+1}=r$.

Имеем

$$\left|\frac{d^r}{dt^r}\left[f^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)-g(t)\right]\right|\leqslant I_1+I_2+I_3.\tag{21}$$

Здесь

$$I_2\leqslant e^{-\psi(t)}\left|\frac{d^r e^{\psi(t)}}{dt^r}\right|\left\{\left|e^{\psi(t)}-g(t)\right|+\left|f^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)-g(t)\right|\right\},$$

$$I_3=\left|\frac{d^r}{dt^r}\left(e^{\psi(t)}-g(t)\right)\right|$$

и

$$g(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}\left(1+\sum_{\nu=1}^{s-3}P_\nu(it)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\nu}\right).$$

Оценим разности I_1, I_2 и I_3 при $|t|\leqslant\frac{\sqrt{n}}{16e}\left(\frac{\sigma^s}{\beta_s}\right)^{\frac{1}{s-2}}$. Оценка I_1. Очевидно

$$|b^{(\nu)}(t)|\leqslant\frac{(s-1)^{\nu}2^{s-1}\beta_s|t|^{s-\nu}}{0{,}99^s\sigma^s n^{\frac{s-2}{2}}}.$$

Отсюда, (9) и (12) немедленно получаем

$$\left|\sum_{l=0}^{i}\varkappa^{(j_{i+1}-j_i)}(t)\ldots\varkappa^{(j_{i-l+2}-j_{i-l+2})}(t)\,b^{(j_{i-l+1}-j_{i-l})}(t)\,\psi^{(j_{i-l}-j_{i-l-1})}(t)\ldots\psi^{(j_1-j_0)}(t)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2^s(s-1)^r\beta_s|t|^{s-r+2i}}{0{,}99^s\sigma^s n^{\frac{s-2}{2}}}.\tag{22}$$

Так как

$$\left|f^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right|\leqslant e^{-\frac{t^2}{3}}$$

при $|t|\leqslant\frac{\sqrt{n}}{16e}\left(\frac{\sigma^s}{\beta_s}\right)^{\frac{1}{s-2}}$, то из (20) и (22) следует

$$I_1\leqslant\frac{(r-1)!\,(s-1)^r\,2^{s+6r-3}\beta_s|t|^{s-r}}{0{,}99^s\sigma^s n^{\frac{s-2}{2}}}e^{-\frac{t^2}{4}}.\tag{23}$$

Оценка I_2. В силу (4) и (12)

$$e^{-\psi(t)}\left|\frac{d^r e^{\psi(t)}}{dt^r}\right|=\left|\psi^{(r)}(t)+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{r-1}\sum{}^{*}\frac{(r-1)!\,\psi^{(r-j_i)}(t)\,\psi^{(j_i j_{i-1})}(t)\ldots\psi^{(j_2-j_1)}(t)\,\psi^{(j_1)}(t)}{j_i j_{i-1}\ldots j_2 j_1 (r-j_i-1)!\,(j_i-j_{i-1}-1)!\ldots(j_2-j_1-1)!\,(j_1-1)!}\right|\leqslant$$

$$\leqslant r!\ (s-1)^r\, 2^{5(r-1)}\,|t|^{-r}\, e^{-\frac{t^2}{16}}.$$

С помощью леммы 6 нетрудно показать, что

$$\left|e^{\psi(t)}-g(t)\right|\leqslant\frac{2^{3,s-5}\,\beta_s\,|t|^s}{(s-2)\,\sigma^s\, n^{\frac{s-2}{2}}}\,e^{-\frac{t^2}{4}}.$$

Из двух последних неравенств и теоремы 1 вытекает

$$I_2\leqslant\frac{r!\ (s-1)^r\, 2^{4,1s+5(r-1)-8}\,\beta_s\,|t|^{s-r}}{(s-1)\,\sigma^s\, n^{\frac{s-2}{2}}}\,e^{-\frac{t^2}{6}}.$$

Оценка I_3. Пусть $\varkappa_s=\varkappa_{s+1}=\ldots=0$, тогда

$$\exp\left\{-\frac{t^2}{2}+\sum_{\nu=1}^{s-3}\frac{\varkappa_{\nu+2}\,(it)^{\nu+2}}{(\nu+2)!\ \sigma^{\nu+2}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\nu}\right\}-e^{-\frac{t^2}{2}}\left(1+\sum_{\nu=1}^{s-3}P_\nu(it)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\nu}\right)=$$

$$=\sum_{\nu=s-2}^{\infty}P_\nu(it)\,\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{n^{\frac{\nu}{2}}}.$$

Отсюда следует

$$\frac{d^r}{dt^r}\left(e^{\psi(t)}-g(t)\right)=\sum_{\nu=s-2}^{\infty}\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{n^{\frac{\nu}{2}}}\sum_{m=0}^{r}\sum_{l=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\frac{(-1)^l\, r!\ t^{m-2l}}{(r-m)!\ 2^l\, l!\ (m-2l)!}\ \frac{d^{r-m}P_\nu(it)}{dt^{r-m}}. \tag{24}$$

В силу (19)

$$\frac{d^{r-m}P_\nu(it)}{dt^{r-m}}=\frac{\varkappa_{\nu+2}\, i^{\nu+2}\, t^{\nu-r+m+2}}{(\nu-r+m+2)!\ \sigma^{\nu+2}}+$$

$$+\sum_{l=1}^{\nu-1}\sum{}^{*}\frac{(\nu-j_l)(j_l-j_{l-1})\ldots(j_2-j_1)(\nu+2l+2)(\nu+2l+1)\ldots(\nu+2l+m+1-r)\, i^{\nu+2(l+1)}\, t^{\nu+m+2(l+1)-r}}{j_l j_{l-1}\ldots j_2\,\nu\,(\nu-j_l+2)!\ (j_l-j_{l-1}+2)!\ldots(j_2-j_1+2)!\ (j_1+2)!}\times$$

$$\times\frac{\varkappa_{\nu-j_l+2}\,\varkappa_{j_l-j_{l-1}+2}\ldots\varkappa_{j_2-j_1+2}\,\varkappa_{j_1+2}}{\sigma^{\nu-j_l+2}\,\sigma^{j_l-j_{l-1}+2}\ldots\sigma^{j_2-j_1+2}\,\sigma^{j_1+2}}.$$

С помощью неравенств (8) и (11) получаем

$$\left|\frac{d^{r-m}P_\nu(it)}{dt^{r-m}}\right|\leqslant 2^{3(\nu-1)}\,(3\nu)^{r-m}\,|t|^{\nu-r+m+2}\left(\frac{\beta_s}{\sigma^s}\right)^{\frac{\nu}{s-2}}e^{\frac{t^2}{4}}. \tag{25}$$

Далее, отсюда и (25) следует

$$I_3\leqslant\frac{r!\ 3^r\, 2^{3s-9}\,\beta_s\,|t|^{s-r}\, e^{-\frac{t^2}{4}}}{(s-2)\,\sigma^s\, n^{\frac{s-2}{2}}}\sum_{\nu=s-2}^{\infty}\nu^r\left(\frac{8\,|t|}{\sqrt{n}}\left(\frac{\beta_s}{\sigma^s}\right)^{\frac{1}{s-2}}\right)^{\nu-(s-2)}\times$$

$$\times\sum_{m=0}^{r}\sum_{l=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\frac{t^{2(m-l)}}{(3\nu)^m\,(r-m)!\ 2^l\, l!\ (m-2l)!}.$$

Поскольку

$$\sum_{m=0}^{r} \sum_{l=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{t^{2(m-l)}}{(3\nu)^m l!\, 2^l (r-m)!\, (m-2l)!} \leqslant \frac{2^{4r}}{3^r} e^{\frac{t^2}{12}},$$

то в интервале $|t| \leqslant \frac{\sqrt{n}}{16e} \left(\frac{\sigma^s}{\beta_s}\right)^{\frac{1}{s-2}}$

$$I_3 \leqslant \frac{r!^2 e^{s-2}\, 2^{3s+4r-8}\, \beta_s |t|^{s-r}}{(s-2)\, \sigma^s\, n^{\frac{s-2}{2}}} e^{-\frac{t^2}{6}}. \tag{26}$$

Утверждение теоремы 2 немедленно следует из (21), (23), (24) и (26).

Вильнюсский Государственный университет
им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
24.III.1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Крамер, Случайные величины и распределения вероятностей, ГИИЛ, 1947.
2. C.-G. Esseen, Fourier analysis of distribution functions, A mathematical study of the Laplace-Gaussian law, Acta Mathem., **77** (1945), 1–125.
3. В. Статулявичус, Об асимптотическом разложении характеристической функции сумм независимых случайных величин, Лит. мат. сб., II, №2(1962), 227–233.
4. C.-G. Esseen, On mean central limit theorems, Trans. Roy. Inst. Technol., Stockholm, **121** (1958), 1–31.
5. Б. А. Рогозин, Некоторые экстремальные задачи в области предельных теорем, кандид. диссертация, Москва, 1961.
6. П. Сурвила, Остаточный член в асимптотическом разложении для плотностей, Лит. мат. сб., II, № 2 (1962), 233–251.
7. A. Renyi, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Berlin, 1962.
8. В. В. Петров, О некоторых полиномах встречающихся в теории вероятностей, Вестник Ленингр. Ун-та, 19 (1962).
9. В. В. Петров, О локальных предельных теоремах для сумм независимых случайных величин, Теор. вер. и ее прим., **9** (1964), 343–352.

APIE CHARAKTERINGŲ FUNKCIJŲ IR JŲ IŠVESTINIŲ ASIMPTOTINIŲ IŠDĖSTYMŲ LIEKAMUOSIUS NARIUS

A. BIKELIS

(Reziumė)

Jeigu atsitiktinis dydis ξ turi lygią nuliui matematinę vertę, teigiamą dispersiją σ^2 ir baigtinį s -tos eilės absoliutinį momentą β_s, tai

$$\left| f^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) - e^{-\frac{t^2}{2}} \left(1 + \sum_{\nu=1}^{s-3} P_\nu(it) \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^\nu\right)\right| \leqslant \frac{2^{s-1} \beta_s |t|^s}{0{,}99^s \sigma^s n^{\frac{s-2}{2}}} e^{-\frac{t^2}{4}},$$

kai $|t| \leqslant \frac{\sqrt{n}}{10} \left(\frac{\sigma^s}{\beta_s}\right)^{\frac{1}{s-2}}$. Be to,

$$\left| \frac{d^r}{dt^r} \left[f^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) - e^{-\frac{t^2}{2}} \left(1 + \sum_{\nu=1}^{s-3} P_\nu(it) \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^\nu\right)\right]\right| \leqslant \frac{r!^2\, 2^{6(s+r-2)} \beta_s |t|^{s-r}}{(s-2)\, \sigma^s\, n^{\frac{s-2}{2}}} e^{-\frac{t^2}{6}},$$

kai

$$r \leqslant s \quad \text{ir} \quad |t| \leqslant \frac{\sqrt{n}}{16e} \left(\frac{\sigma^s}{\beta_s}\right)^{\frac{1}{s-2}}.$$

Taip pat įrodoma, kad

$$|\varkappa_s| \leqslant (s-1)!\ \beta_s;$$

$\varkappa_s$ yra ξ s-tos eilės semiinvariantas.

ON THE REMAINDER TERMS OF THE ASYMPTOTIC EXPANSIONS OF THE CHARACTERISTIC FUNCTIONS AND THEIR DERIVATES

A. BIKELIS

(Summary)

If the random variables ξ has mean value zero, σ^2 — positive variance and β_s — finite absolute moment of s -th order ($s \geqslant 3$), then

$$\left| f^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) - e^{-\frac{t^2}{2}}\left(1 + \sum_{\nu=1}^{s-3} P_\nu(it)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^\nu\right)\right| \leqslant \frac{2^{s-1}\beta_s |t|^s}{0{,}99^s \sigma^s n^{\frac{s-2}{2}}} e^{-\frac{t^2}{4}},$$

as $|t| \leqslant \frac{\sqrt{n}}{10}\left(\frac{\sigma^s}{\beta_s}\right)^{\frac{1}{s-2}}$, moreover

$$\left| \frac{d^r}{dt^r}\left[f^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) - e^{-\frac{t^2}{2}}\left(1 + \sum_{\nu=1}^{s-3} P_\nu(it)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^\nu\right)\right]\right| \leqslant \frac{r!^2\, 2^{6(s+r-2)}\beta_s |t|^{s-r}}{(s-2)\,\sigma^s n^{\frac{s-2}{2}}} e^{-\frac{t^2}{6}}$$

as $r \leqslant s$ and $|t| \leqslant \frac{\sqrt{n}}{16e}\left(\frac{\sigma^s}{\beta_s}\right)^{\frac{1}{s-2}}$.

Also it is proved that

$$|\varkappa_s| \leqslant (s-1)!\ \beta_s$$

where $\varkappa_s$ is cumulant of s -th order.