LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VII Nr. 3, 1968
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VII № 3, 1968

ОБ АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГРАХ, РАЗЫГРЫВАЕМЫХ НА ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Е. Б. ЯНОВСКАЯ

В теории бесконечных антагонистических игр не существует общих методов их решения. Для игр, разыгрываемых не на единичном квадрате, рассмотрены лишь некоторые конкретные случаи. В настоящей статье анализируется два класса бесконечных антагонистических игр, у которых пространством стратегий одного игрока является единичный интервал, а пространством стратегий игрока П – множество функций, определенных на единичном интервале и подчиненных некоторым ограничениям.

§ 1. *Игры с мгновенной зависимостью функции выигрыша от стратегии игрока.* Рассмотрим следующую антагонистическую игру. Игрок I выбирает точку $t\in[0,1]$, а игрок II-измеримую функцию, определенную на интервале $[0,1]$ и удовлетворяющую следующим условиям:

$$0\leqslant p(t)\leqslant 1,\quad \int\limits_0^1 p(t)\,dt=\alpha<1,\quad t\in[0,1]. \tag{1}$$

Множество функций $p(t)$, удовлетворяющих условиям (1), обозначим через P. В дальнейшем функции p и p_1, равные почти всюду, будем отождествлять. Выигрыш в ситуации (t, p) зависит от t и значения функции p только в этой точке t, т. е. функция выигрыша $K(t, p)$ имеет вид:

$$K(t,\ p)=K\Big(t, p(t)\Big).$$

Будем считать, что функция $K(t, y)$ определена и измерима на произведении $[0,1]\times[0,\ \infty]$ и подчинена следующим ограничениям:

1.1) $K(t,\ y)\geqslant 0$ для всех t и y и $\lim\limits_{y\to\infty} K(t,\ y)=0$ для всех t;

1.2) $\dfrac{\partial K(t,\ y)}{\partial y}<0$ и непрерывна для всех t и y;

1.3) $\dfrac{\partial K(t,\ 0)}{\partial y}\leqslant\dfrac{\partial K(t,\ y)}{\partial y}\leqslant\dfrac{\partial K(t,\ 1)}{\partial y}$ для всех t и y;

1.4) $\mu\{t\,|\,K(t,\ 0)=C\}=0$ для любого C, где μ-мера Лебега.

Смешанной стратегией игрока I является функция распределения на интервале $[0,1]$. Выигрыш в условиях смешанной стратегии игрока I и выбора p игроком II определяется как интеграл

$$K(F,\ p)=\int\limits_0^1 K\Big(t,\ p(t)\Big)\,dF(t).$$

Далее мы найдем оптимальные стратегии для обоих игроков. Тем самым будет показано, что в играх с ядром $K(F,\ p)$ игрок II имеет чистую оптимальную стратегию. Заметим, что в рассматриваемом случае не предполагается выпуклости функции K по p (требуется выполнение более слабого условия

1.3), поэтому нельзя заранее утверждать существование оптимальных стратегий.

Будем искать такую стратегию игрока II p^*, что

$$\max_t K(t, p) \geqslant \max_t K(t, p^*)$$

для любой функции $p \in P$.

Так как функция $K(t, y)$ непрерывна и монотонно убывает по y, существует обратная к ней по y, т. е. обратная f_t^{-1} к функции $f_t(y) = K(t, y)$ для каждого $t \in [0,1]$.

Обозначим через A_C множество

$$A_C = \{t \mid t \in [0,1],\ K(t, 0] > C\}.$$

Для $t \in A_C$ определена функция $f_t^{-1}(C)$. Положим

$$p_C(t) = \begin{cases} \min\{1, f_t^{-1}(C)\} & t \in A_C \\ 0 & t \notin A_C. \end{cases}$$

Лемма 1. *Существует такое* C^*, *что*

$$\int_0^1 p_c^*(t)\, dt = \alpha.$$

Доказательство. Так как функция K убывает по y, $f_t^{-1}(C)$ убывает по C при фиксированном t. По определению множества A_C при $C_1 < C_2$ $A_{C_1} \supset A_{C_2}$. Следовательно, для всех t функция $p_C(t)$ не возрастает по C. Покажем, что интеграл $\int_0^1 p_C(t)\, dt$ непрерывен по C. Для этого достаточно показать, что

$$\mu(A_{C_1} \backslash A_{C_2}) \to 0. \tag{2}$$

$$\text{при } C_2 - C_1 \to 0, \quad C_1 \leqslant C_2.$$

Мы имеем

$$A_{C_1} \backslash A_{C_2} = \{t \mid t \in [0,1],\ C_2 \geqslant K(t, 0) > C_1\},$$

и предельный переход (2) имеет место ввиду свойства 1.4 функции $K(t, y)$.

При $C = 0$ множество A_C составляет весь интервал $[0, 1]$, и $p_C(t) \equiv 1$ для $t \in [0, 1]$, так как функция $K(x, y)$ убывает по y и неотрицательна, поэтому

$$\int_0^1 p_C(t)\, dt = 1 > \alpha.$$

При $C > \max_t K(t,0)$ множество A_C пусто и

$$\int_0^1 p_C(t)\, dt = \int_{A_C} p_C(t)\, dt = 0 < \alpha.$$

Следовательно, в интервале $(0, \max_t K(t, 0)]$ найдется такое C^*, что

$$\int_0^1 p_{C^*}(t)\, dt = \alpha.$$

Пусть $p \in P$ произвольная стратегия игрока II. Если существуют такие t, что $p_{C^*}(t) = 1$, то

$$\max_t K\left(t, p_c^*(t)\right) = \max_{\substack{t \\ p_C^*(t)=1}} K(t, 1) = K(t^*, 1) \leqslant K(t^*, p) \leqslant \max_t K\left(t, p(t)\right).$$

В случае, когда для всех $t \in A_{C^*}$ $p_{C^*}(t) < 1$, найдется $t' \in A_{C^*}$ такое, что

$$p(t') < P_{C^*}(t').$$

Тогда

$$K\Big(t',\ p(t')\Big) > K\Big(t',\ p_{C^*}(t')\Big) = \max_t K\Big(t,\ p_{C^*}(t)\Big) = C^*.$$

В обоих случаях мы получаем, что

$$\max_t K(t,\ p) \geqslant \max_t K(t,\ p_{C^*}).$$

Предположим, что существуют такие t, для которых $p_C{}^*(t) = 1$. Обозначим через M множество

$$M = \Big\{t \mid p_{C^*}(t) = 1,\ K\Big(t, p_{C^*}(t)\Big) = \max K\Big(t; p_{C^*}\ (t')\Big)\Big\}.$$

Покажем, что $p^* = p_{C^*}$ является оптимальной стратегией игрока II, а оптимальной стратегией игрока I является любое вероятностное распределение F^* на множестве M. Для $t \in M$ и произвольной стратегии p игрока II

$$1 = p^*(t) \geqslant p(t),$$

откуда

$$K(F^*,\ p) = \int\limits_M K\Big(t,\ p(t)\Big)\,dF^*(t) \geqslant \int\limits_M K(t,\ 1)\,dF^*(t) =$$

$$= \int\limits_M K\Big(t,\ p^*(t)\Big)\,dF^*(t) = K(F^*,\ p^*).$$

Так как по определению множества M

$$K(F^*,\ p^*) = \max_t K\Big(t,\ p^*(t)\Big), \tag{4}$$

из (3) и (4) мы имеем

$$K(t,\ p^*) \leqslant K(F^*,\ p^*) \leqslant K(F^*,\ p),$$

и F^*, p^* являются оптимальными стратегиями игроков I и II.

Пусть теперь для всех t $p^*(t) < 1$. Предположим, что существует такая плотность распределения на A_{C^*} $x^*(t)$

$$\Big(x^*(t) \geqslant 0,\quad x^*(t) = 0 \text{ при } t \notin A_{C^*},\ \int\limits_0^1 x^*(t)\,dt = 1\Big), \text{ что}$$

$$\int\limits_0^1 K\Big(t,\ p^*(t)\Big)\,x^*(t)\,dt = \min_p \int\limits_0^1 K\ \Big(t,\ p(t)\Big)\,x^*(t)\,dt. \tag{5}$$

Положим для $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ и произвольной стратегии p игрока II

$$I(\lambda) = \int\limits_0^1 K\Big(t,\ \lambda p^* + (1-\lambda)p\Big)\,x^*(t)\,dt.$$

Тогда

$$I'(\lambda) = \int\limits_0^1 \frac{\partial K\big(t,\ \lambda p^* + (1-\lambda)p\big)}{\partial y}\ (p^* - p)\,x^*(t)\,dt.$$

Так как по предподложению (5) $\min\limits_{\lambda \in [0,\ 1]} I(\lambda) = I(1)$, $I'(1) \leqslant 0$ для всех p, а при $p = p^*$ $I'(1) = 0$, следовательно,

$$\min_p \int\limits_0^1 \frac{\partial K(t,\ p^*)}{\partial y}\ p(t)\,x^*(t)\,dt$$

достигается при $p=p^*$, а по лемме Неймана-Пирсона мы имеем

$$p^*(t)=1, \quad \text{если} \quad -x^*(t)\cdot\frac{\partial K(t,p^*)}{\partial y}>k,$$

$$p^*(t)=0, \quad \text{если} \quad -x^*(t)\cdot\frac{\partial K(t,p^*)}{\partial y}<k,$$

$$0\leqslant p^*(t)\leqslant 1, \quad \text{если} \quad -x^*(t)\cdot\frac{\partial K(t,p^*)}{\partial y}=k \tag{6}$$

для некоторого $k>0$. Так как для $t\in A_{C^*}$ $0\leqslant p<1$ и $p^*(t)$ может равняться нулю лишь на множестве меры нуль, мы имеем

$$x^*(t)=\frac{-k}{\frac{\partial K(t,p^*)}{\partial y}}, \qquad t\in A_{C^*}, \tag{7}$$

где постоянная k находится из условия

$$\int_{A_{C^*}} x^*(t)\,dt=1.$$

Из непрерывности функции $K(t, y)$ и из того факта, что единичная сфера в пространстве интегрируемых функций слабо* компактна, мы имеем, что для некоторого $p_0\in P$

$$\min_{p\in P}\int_0^1 K\big(t, p(t)\big)x^*(t)\,dt=\int_0^1 K\big(t, p_0(t)\big)x^*(t)\,dt.$$

Используя (7) и лемму Неймана—Пирсона мы получаем, что функция p_0 должна удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{matrix} p_0(t)=1 \\ p_0(t)=0, \\ 0\leqslant p_0(t)\leqslant 1 \end{matrix} \quad \text{если} \quad \frac{\frac{\partial K(t,p_0)}{\partial y}}{\frac{\partial K(t,p^*)}{\partial y}} \begin{cases} >l, \\ <l, \\ =l \end{cases} \tag{8}$$

для некоторого $l>0$, если $t\in A_{C^*}$ и $p_0(t)=0$ для $t\notin A_{C^*}$.

Лемма 2. *Функция* $p_0(t)\in P$, *удовлетворяющая условиям* (8), *непрерывна на множестве* A_{C^*}.

Доказательство. По построению функция $p^*(t)$ непрерывна и, используя условие 1.2, мы получаем, что функция $\frac{\partial K(t,p^*)}{\partial y}$ также непрерывна. Следовательно, ввиду условий (8), $p_0(t)$ не может иметь разрыва в точках, в окрестности которых значения $p_0(t)$ отличны от 0 и 1. Предположим, что для некоторого $t_1\in A_{C^*}$ $p_0(t_1^-)=1$, $p_0(t_1^+)<1$, тогда по условию 1.3 мы имеем:

$$\frac{\frac{\partial K(t_1,1)}{\partial y}}{\frac{\partial K(t_1,p^*)}{\partial y}}<\frac{\frac{\partial K\big(t_1,p_0(t_1^+)\big)}{\partial y}}{\frac{\partial K(t_1,p^*)}{\partial y}},$$

и условия (8) не могут выполняться. Аналогично рассматриваются остальные возможные случаи разрывов $p_0(t)$.

Лемма 3. *Постоянная* l *в условиях* (8) *равна единице.*

Доказательство. Если существует такое $t' \in A_{C^*}$, что $p_0(t') = p^*(t') \neq \neq 0,1$, то для этого t' мы имеем

$$l = \frac{\dfrac{\partial K(t', p_0)}{\partial y}}{\dfrac{\partial K(t', p^*)}{\partial y}} = 1.$$

Предположим, что не существует такого $t' \in A_{C^*}$, что $p_0(t') = p^*(t') \neq 0,1$. Тогда множество A_{C^*} можно разбить на такие непересекающиеся множества L_1, L_2, L_3, что для $t \in L_1$ $p_0(t) < p^*(t)$ для $t \in L_2$ $p_0(t) > p^*(t)$, а для $t \in L_3$ $p_0(t) = p^*(t) = 0$.

Возьмем такую последовательность t_n из L_1 или L_2, чтобы она сходилась к точке $t_0 \in L_3$ и так чтобы $p_0(t_n) > 0$.

Тогда по условиям (8) мы имеем

$$\frac{\dfrac{\partial K(t_n, p_0(t_n))}{\partial y}}{\dfrac{\partial K(t_n, p^*(t_n))}{\partial y}} = l, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

а так как $t_0 \notin A_{C^*}$, $p_0(t_0) = p^*(t_0) = 0$, следовательно, по непрерывности производной $\frac{\partial K(t, y)}{\partial y}$ и функции p^* мы имеем

$$l = \frac{\dfrac{\partial K(t_n, p_0(t_n))}{\partial y}}{\dfrac{\partial K(t_n, p^*(t_n))}{\partial y}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\partial K(t_n, p^*(t_n))}{\partial y}}{\dfrac{\partial K(t_n, p^*(t_n))}{dy}} = \frac{\dfrac{\partial K(t_0, 0)}{\partial y}}{\dfrac{\partial K(t_0, 0)}{\partial y}} = 1$$

и функция $p^*(t)$ удовлетворяет условиям (8), а тогда, используя (3) и (7)

$$\min_p \int_0^1 K\big(t, p(t)\big) x^*(t)\,dt = \int_0^1 K\big(t, p^*(t)\big) x^*(t)\,dt = \max_t K\big(t, p^*(t)\big),$$

то есть, функция $p^*(t)$ является оптимальной стратегией игрока II, а оптимальной стратегией игрока I является функция распределения с плотностью $x^*(t)$.

Замечание. Функцию $K(x, y)$ можно рассматривать определенной не для всех $y \in [0, \infty)$, а для $y \in [0, T]$, где

$$T = \max_x \max_{C \leqslant \max K(x, 0)} f_x^{-1}(C),$$

так как максимальное рассматриваемое значение функции f_x^{-1} равно $\max_C f_x^{-1}(C)$, где $C \leqslant \max_x K(x, 0)$.

Следовательно, условие 1.1, налагаемое на функцию $K(x, y)$, а именно $\lim_{y\to\infty} K(x, y) = 0$ для всех x несущественно. Кроме того, вместо условия 1.2, налагаемого на функцию K, можно было бы потребовать выполнения противоположного неравенства $\frac{\partial K}{\partial y} > 0$ для всех t, так как вместо функции K можно рассматривать функцию $K'(x, y') = K(x, T - y)$.

§ 2. Обобщение дуэли снайпера с пулеметчиком

В этом параграфе мы рассмотрим игру, у которой пространства стратегий такие же, как и в игре § 1, но функция выигрыша имеет вид:

$$K(t,\ p)=V\left(t,\ \int_0^t p(u)\xi(u)\,du\right),$$

где $\xi(u)$ — некоторая функция, заданная на отрезке $[0,1]$, и $\xi(u)>0$, $\xi'(u)>0$ для $u\in[0,1]$.

Такая игра является обобщением дуэли снайпера с пулеметчиком [1, гл. XVI] в которой функция выигрыша $K(t,\ p)$ равна

$$K(t,\ p)=A(t)e^{-\int_0^t p(u)\xi(u)\,du}.$$

В дальнейшем будем предполагать, что функция $V(t,\ y)$ определена и ограничена на произведении $[0,1]\times[0,\ \infty)$ и удовлетворяет следующим условиям.

2.1) $V(t,\ y)$ имеет непрерывные частные производные по t и по y;

2.2) $V(t,\ y)$ возрастает по t и убывает по y;

2.3) $\frac{\partial^2 V(t,\ y)}{\partial y^2}>0$ для всех t и y;

2.4) $\lim\limits_{y\to\infty} V(t,\ y)=0$ для любого $t\in[0,1]$.

Из условий 2.2 и 2.4 следует, что $V(t,y)>0$ для всех t и y.

Ввиду условий 2.1 и 2.2, для любого $t\in[0,\ 1]$ существует функция $f_t^{-1}(C)$, определенная для $0<C\leqslant V(t,\ 0)$, обратная к функции

$$f_t(y)=V(t,\ y),$$

так что если

$$f_t(y)=C,$$

то

$$f_t^{-1}(C)=y.$$

2.5) Функция $\dfrac{\frac{d}{dt}f_t^{-1}(C)}{\xi(t)}$ убывает по t для любого фиксированного $0<C\leqslant V(t,\ 0)$;

2.6) Для всех $t\in[0,1]$ $\xi'(t)>0$.

Существование значения игры и оптимальных стратегий следует из теоремы Фань-Цзи [2], причем у игрока II существует чистая оптимальная стратегия.

Далее мы опишем оптимальные стратегии для обоих игроков. Для $0<C\leqslant V(1,\ 0)$ обозначим через $w_C(t)$ и $p_C(t)$ следующие функции

$$w_C(t)=\begin{cases}1; & 0\leqslant t<t_C\\ \min\left\{1,\ \dfrac{\frac{d}{dt}f_t^{-1}(C)}{\xi(t)}\right\}; & t_C\leqslant t\leqslant 1,\end{cases}$$

где $V(t_C,\ 0)=C$,

$$p_C(t)=\begin{cases}0; & 0\leqslant t<a_C,\\ w_C(t); & a_C\leqslant t\leqslant 1,\end{cases}$$

если существует такое $a_C \geqslant 0$, что

$$\int_{a_C}^{1} p_C(t)\,dt = \alpha$$

и

$$p_C(t) = w_C(t) \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

если

$$\int_{0}^{1} w_C(t)\,dt \leqslant \alpha.$$

В этом случае полагаем $a_C = 0$.

Через d_C обозначим единственное значение из промежутка [0, 1] (если оно существует), для которого

$$\frac{d}{dt} f_{d_C}^{-1}(C) = \xi(d_C).$$

Если для всех t $\frac{d}{dt} f_t^{-1}(C) > \xi(t)$, то полагаем $d_C = 0$; в случае когда выполняется противоположное неравенство, полагаем $d_C = 1$.

Лемма 4. *Существует C^* такое, что*

$$\int_{a_{C^*}}^{d_{C^*}} \xi(t)\,dt = f_{d_{C^*}}^{-1}(C^*). \tag{10}$$

Доказательство. Из непрерывности функций $V(t, y)$, $\frac{\partial V}{\partial t}$, $\frac{\partial V}{\partial}$ по обеим переменным следует непрерывность по t и C функций $f_t^{-1}(C)$ и $\frac{d}{dt} f_t^{-1}(C)$. Так как функция $\xi(t)$ также непрерывна, мы получаем, что обе части уравнения (10) непрерывны по C в интервале $0 < C \leqslant V(1, 0)$.

Для $C = V(1, 0)$ мы имеем $d_C = 1$ и

$$f_{d_C}^{-1}(C) = 0,$$

следовательно, $a_C = 1 - \alpha$ и

$$\int_{1-\alpha}^{1} \xi(t)\,dt > 0.$$

При $C \to 0$ $f_t^{-1}(C) > f_0^{-1}(C) \to \infty$, а так как функция $\xi(t)$ ограничена, интеграл

$$\int_{a_C}^{d_C} \xi(t)\,dt$$

равномерно ограничен для всех C. Следовательно, найдется такое C^*, что

$$\int_{a_{C^*}}^{d_{C^*}} \xi(t)\,dt = f_{d_{C^*}}^{-1}(C^*).$$

Оптимальная стратегия игрока II.

1 случай.

$$\int_{a_{C^*}}^{1} p_{C^*}(t)\,dt = \alpha.$$

Положим

$$p^*(t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t<a_{C^*},\\ w_{C^*}(t) & a_{C^*}\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}$$

Ожидаемый выигрыш в условиях этой стратегии равен

$$K(t,\ p^*)=V(t,\ 0),\qquad 0\leqslant t\leqslant a_{C^*},$$

$$K(t,\ p^*)=V\Big(t,\ \int\limits_{a_{C^*}}^{t} w_{C^*}(t)\,\xi(t)\,dt\Big)=V\Big(t,\ \int\limits_{a_{C^*}}^{d_{C^*}}\xi(t)\,dt+$$

$$+\int\limits_{d_{C^*}}^{t}\frac{d}{dt}f_t^{-1}(C^*)\,dt\Big)=V\Big(t,f_t^{-1}(C^*)\Big)=C^*,\ a_{C^*}\leqslant t\leqslant 1.$$

По непрерывности функции V мы имеем

$$V(a_{C^*},\ 0)=C^*,$$

и, так как V возрастает по t,

$$\max_t K(t,\ p^*)=C^*.$$

Покажем, что p^* — оптимальная стратегия игрока II. Пусть p — произвольная стратегия игрока II, не равная p^* почти всюду. Тогда по лемме 16. 4.1 [1, гл. XVI] существует такое значение t^*, что $K(t^*,\ p)>K(t^*,\ p^*)$. Это значение t^* не может находиться между 0 и a_{C^*}, так как в этом интервале функция $K(t,\ p^*)$ принимает наибольшее значение. Для остальных t $K(t,\ p^*)=$ $=\max\limits_t K(t,p^*)=C^*$, и, следовательно, $\max\limits_t K(t,\ p)>\max\limits_t K(t,\ p^*)$.

2 случай.

$$\int\limits_0^1 p_{C^*}(t)\,dt<\alpha.$$

Положим в качестве p^* произвольную стратегию, такую что $p^*(t)\geqslant p_{C^*}(t)$. Для такой стратегии мы имеем

$$p^*(t)=1,\qquad 0\leqslant t\leqslant d_{C^*},$$

$$1\geqslant p^*(t)\geqslant p_{C^*}(t),\qquad d_{C^*}\leqslant t\leqslant 1,$$

$$\int\limits_0^1 p^*(t)\,dt=\alpha.$$

Ожидаемый интеграл равен

$$K(t,\ p^*)=V\Big(t,\ \int\limits_0^t \xi(t)\,dt\Big),$$

$$K(d_{C^*},\ p^*)=V\Big(t,\ \int\limits_0^{d_{C^*}}\xi(t)\,dt\Big)=V\Big(t,\ f_{d_{C^*}}^{-1}(C^*)\Big)=C^*.$$

Так как для $t_{C^*}\leqslant t\leqslant d_{C^*}$,

$$\frac{d}{dt}f_t^{-1}(C^*)\leqslant\xi(t),$$

$$\int\limits_t^{d_{C^*}}\xi(t)\,dt\leqslant\int\limits_t^{d_{C^*}}\frac{d}{dt}f_t^{-1}(C^*)\,dt.$$

Следовательно, используя уравнение (10), мы имеем

$$\int_0^t \xi(t)\,dt \geqslant \int_{t_{C^*}}^t \frac{d}{dt} f_t^{-1}(C^*)\,dt = f_t^{-1}(C^*),$$

и, по монотонности функции V,

$$K(t,\ p^*) = V\left(t,\ \int_0^t \xi(t)\,dt\right) < V\left(t, f_t^{-1}(C^*)\right) = C^*.$$

Для $t > d_{C^*}$

$$p^*(t) \geqslant p_{C^*}(t)$$

и, следовательно,

$$K(t,\ p^*) \leqslant K(t,\ p_{C^*}) = C^*.$$

Пусть $p \neq p^*$ *п. b.* В интервале $0 \leqslant t \leqslant d_{C^*}$ мы имеем $p(t) \leqslant p^*(t) = 1$, поэтому

$$K(d_{C^*},\ p) \geqslant K(d_{C^*},\ p^*) = \max_t K(t,\ p^*) = C^*,$$

и p^* оптимальная стратегия игрока II. Значение игры v, таким образом, равно C^*, и, следовательно, уравнение (10) имеет единственное решение.

Оптимальная стратегия игрока I.

Для нахождения оптимальной стратегии игрока I применим лемму Неймана-Пирсона так же, как в § 1, а именно, пусть $F^*(t)$ — оптимальная стратегия игрока I, а v — значение игры. Тогда для любого p

$$\int_0^1 K(t,\ p)\,dF^*(t) \geqslant v$$

и

$$\int_0^1 K(t,\ p^*)\,dF^*(t) = v.$$

Положим для $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$

$$I(\lambda) = \int_0^1 K\left(t,\ \lambda p^* + (1-\lambda)p\right) dF^*(t) =$$

$$= \int_0^1 V\left(t,\ \int_0^t \xi(u)\,[\lambda p^*(u) + (1-\lambda)p(u)]\,du\right) dF^*(t).$$

Тогда

$$I'(\lambda) = \int_0^1 \frac{\partial V\left(t,\ \int_0^t \xi(u)\,[\lambda p^* + (1-\lambda)\,p]\,du\right)}{\partial y} \cdot \int_0^t \xi(u)\,(p^* - p)\,du\,dF^*(t).$$

Так как функция $I(\lambda)$ достигает своего минимума при $\lambda = 1$, $I'(1) \leqslant 0$ для всех p, а при $p=p^*$ $I'(1)=0$, значит функционал

$$-\int_0^1 \frac{\partial V\left(t, \int_0^t \xi p^* du\right)}{\partial y} \cdot \int_0^t \xi(u) p(u)\, du\, dF^*(t) =$$

$$= -\int_0^1 \xi(u) p(u) \int_u^1 \frac{\partial V\left(t, \int_0^t \xi p^* du\right)}{\partial y}\, dF^*(t)\, du$$

достигает максимума при $p=p^*$, где максимум берется по всем $p\in P$. Тогда по лемме Неймана-Пирсона для некоторого k мы имеем, что

$$\text{если} \qquad -\xi(u)\cdot\int_u^1 \frac{\partial V\left(t, \int_0^t \xi p^* du\right)}{dy}\, dF^*(t) \begin{cases} >k, & \text{то} \quad p^*(u)=1, \\ =k, & \text{то} \quad 0 \leqslant p^*(u) \leqslant 1, \\ <k, & \text{то} \quad p^*(u)=0. \end{cases}$$

1 случай. Для $t\in[d_{C^*}, 1]$ $0<p^*(t)<1$, следовательно, в этом интервале

$$\int_u^1 \frac{\partial V\left(t, \int_0^t \xi p^* du\right)}{\partial y}\, dF^*(t) = \frac{k}{\xi(u)} \tag{11}$$

и, дифференцируя равенство (11), мы получаем, что в интервале $(d_{C^*}, 1)$ оптимальная стратегиа игрокя I является абсолютно непрерывной функцией распределения с плотностью распределения

$$x^*(t) = \frac{k\xi'(t)}{\xi^2(t)\,\dfrac{\partial V\left(t, \int_0^t \xi p^* du\right)}{\partial y}},$$

а в точке $t=1$ имеется скачек величины $-\dfrac{k}{\xi(t)\,\dfrac{\partial V\left(t, \int_0^t \xi p^* du\right)}{\partial y}}$.

Кроме того, так как для $t<a_{C^*}$ $p^*(t)=0$, а для $d_{C^*}>t>a_{C^*}$ $p^*(t)=1$, то

$$\int_{a_{C^*}}^1 \frac{\partial V\left(t, \int_0^t \xi p^* du\right)}{\partial y}\, dF^*(t) = -\frac{k}{\xi(a_{C^*})}.$$

Спектром распределения $F^*(t)$ является интервал $[d_{C^*}, 1]$, следовательно,

$$\int_{a_{C^*}}^1 \frac{\partial V}{\partial y}\, dF^*(t) = \int_{d_{C^*}}^1 \frac{\partial V}{dy}\, dF^*(t) = -\frac{k}{\xi(a_{C^*})},$$

и в точке d_{C^*} распределение $F^*(t)$ имеет скачок величины $\frac{k}{\xi(a_{C^*})} - \frac{k}{\xi(d_{C^*})}$.
Постоянная k определяется из условия

$$\int_0^1 dF^*(t) = \frac{k}{\xi(a_{C^*})} - \frac{k}{\xi(d_{C^*})} + k \int_{d_{C^*}}^1 \frac{\xi'(t)}{\xi^2(t)\,\frac{\partial V}{\partial y}} dt - \frac{k}{\xi(1)\,\frac{\partial V}{\partial y}} = \alpha.$$

2 случай. Так как $\max_t K(t, p^*) = K(d_{C^*}, p^*)$, и для $t \in [0, d_{C^*}]$ $p^*(t) = 1$, то

$$F^*(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t < d_{C^*}, \\ 1, & d_{C^*} \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

т. е. игрок *I* обладает чистой оптимальной стратегией, сосредоточенной в точке d_{C^*}.

Ленинградское отделение
Центрального экономико-
математического института

Поступило в редакцию
10.I.1967

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Карлин. Математические методы в программировании, играх, экономике, ИЛ, 1964.
2. Фань Цзи. Теоремы о минимаксах, в сб. Бесконечные антагонистические игры, Физматгиз, 1963.

APIE ANTAGONISTINIUS LOŠIMUS FUNKCIONALINĖSE ERDVĖSE

J. JANOVSKAJA

(Reziumė)

Rastos abiejų lošėjų optimalios strategijos dviem klasėms begalinių antagonistinių lošimų, kai vieno lošėjo strategijų aibė yra intervalas [0,1], o kito — funkcijų, definuotų tame intervale ir patenkinančių tam tikras sąlygas, aibė.

SUR LES JEUX ANTAGONISTES JOUES EN ESPACES FONCTIONNELS

E. JANOVSKAJA

(Résumé)

On a trouvé les stratégies optimales des joueurs I et II en deux classes des jeux infinis antagonistes où l'espace des strategies d'un des joueurs est l'intervalle [0,1] et d'autre — un ensemble des fonctions definies en intervalle [0,1] et subordonnées aux certaines contraintes.