LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VII Nr. 3, 1968
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VII № 3, 1968

О ВЕРОЯТНОСТЯХ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ СУММЫ СЛУЧАЙНОГО ЧИСЛА НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

В. А. СТАТУЛЯВИЧУС

Пусть случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots,$ независимы и одинаково рас пределены с $m_1=\mathbf{M}\xi_1$, $\sigma_1^2=\mathbf{D}\xi_1$, и пусть случайная величина η принимает лишь целые неотрицательные значения и не зависит от $\xi_1, \xi_2, \ldots$ Рассмотрим

$$S_\eta=\xi_1+\ldots+\xi_\eta$$

(считаем $S_0=0$). Если распределения ξ_1 и η удовлетворяют известному условию Крамера, то для функции распределения $F_{S_\eta}(x)$ суммы S_η справедлива следующая теорема о больших уклонениях.

Теорема. *Если существуют неотрицательные числа H_1, H_2, K_1, K_2 и a такие, что*

$$|\mathbf{M}(\xi_1-m_1)^k|\leqslant k!\ H_1K_1^{k-2}\sigma_1^2,\quad k=3,4,\ \ldots, \tag{1}$$

а k-й семиинвариант $\Gamma_k\{\eta\}$ случайной величины η

$$|\Gamma_k\{\eta\}|\leqslant k!\ H_2K_2^{k-1}(\mathbf{M}\eta)^{1+(k-1)a},\quad k=2,\ 3,\ \ldots, \tag{2}$$

то в интервале

$$1\leqslant x\leqslant\bar{\delta}\Delta,\quad \bar{\delta}<\bar{\delta}_H$$

имеют место соотношения

$$\frac{\mathbf{P}\{S_\eta\geqslant m_1\mathbf{M}\eta+x\sigma_1\sqrt{\mathbf{M}\eta}\}}{1-\Phi(x)}=e^{\frac{x^3}{\Delta}\lambda\left(\frac{x}{\Delta}\right)}\left(1+f_1(\bar{\delta},\ H)\frac{x}{\Delta}\right), \tag{3}$$

$$\frac{\mathbf{P}\{S\eta<m_1\mathbf{M}\eta-x\sigma_1\sqrt{\mathbf{M}\eta}\}}{\Phi(-x)}=e^{-\frac{x^3}{\Delta}\lambda\left(\frac{x}{\Delta}\right)}\left(1+f_2(\bar{\delta},\ H)\frac{x}{\Delta}\right). \tag{3}$$

Здесь

$$\Delta=\frac{\sqrt{\mathbf{M}\eta}}{\max\left\{\sqrt{3}K_2^{\frac{1}{2}}(\mathbf{M}\eta)^{\frac{a}{2}},\ K_1(1+2H_1)\sigma_1^{-1},\ \sqrt{2}\right\}},$$

$$|f_i(\bar{\delta},\ H)|<\frac{8H\left\{1+7{,}2\left(1+2\delta+\min\left\{\frac{1}{3}(1-\bar{\delta})^3H^{-1},\ \frac{1}{2}H^{-\frac{1}{4}}\right\}\right)^4\right\}}{(1-\delta)^4(1-\rho)^{\frac{3}{2}}},$$

$i=1,\ 2,\quad H=\frac{3}{2}\left(1+\frac{H_2}{2}\right)$, *величины* $\bar{\delta}_H>0$, $\delta>0$ *определяются из уравнений*

$$\bar{\delta}_H=\frac{\delta_H(1+\delta_H)}{2},\quad \bar{\delta}=\frac{\delta(1+\delta)}{2},\quad \frac{6H\delta_H}{(1-\delta_H)^3}=1.$$

Далее,

$$\rho=\frac{6H\delta}{(1-\delta)^3},\quad \lambda(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k t^k$$

— степенной ряд Крамера, сходящийся при $|t| < \bar{\delta}_H$, *причем*

$$|\lambda_k| \leqslant \frac{\delta_H}{(k+3)\,\bar{\delta}_H^{k+2}}, \quad k=0,\ 1, \dots, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

Заметим, кроме того, что

$$\bar{\delta}_H > \frac{1}{14{,}55\,H},$$

а выражение λ_k через

$$\Gamma_k\{S_\eta\} = \sum_{\substack{0 \leqslant m_1, \dots, m_k \leqslant k \\ m_1 + 2m_2 + \dots + km_k = k}} \frac{k!\,\Gamma_{m_1+\dots+m_k}\{\eta\}}{m_1! \dots m_k!} \prod_{l=1}^{k} \left(\frac{\Gamma_l\{\xi_1\}}{l!} \right)^{m_l} \tag{4}$$

можно найти в [1]. (У нас везде $\Gamma_k\{\xi\}$ означает семинвариант k-ого порядка случайной величины ξ.)

Например, если η имеет распределение Пуассона

$$\mathbf{P}\{\eta = k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k=0,\ 1,\ \dots,$$

с параметром λ, то $\Gamma_k\{\eta\} = \lambda$, $k=1,\ 2 \dots$, следовательно, можно положить

$$H_2 = 1, \quad H = 2{,}25, \quad K_2 = 1, \quad a = 0$$

и

$$\Delta = \frac{\sqrt{\lambda}}{\max\{\sqrt{3},\ K_1(1+2H_1)\,\sigma_1^{-1}\}}.$$

Если же η распределено по биномиальному закону

$$\mathbf{P}\{\eta = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k=0,\ 1,\ \dots,$$

то $\mathbf{M}\eta = p$, и, как легко проверить,

$$|\Gamma_k\{\eta\}| \leqslant k!\ (0{,}57)\,3^k np, \quad k=2,\ 3,\ \dots$$

Таким образом, в этом случае $H_2 = 1{,}71$, $H < 4{,}065$, $K_2 = 3$, $a = 0$
и

$$\Delta = \frac{\sqrt{np}}{\max\{3,\ K_1(1+2H_1)\,\sigma_1^{-1}\}}.$$

В случае, когда $\eta = \eta_t$, $\mathbf{M}\eta_t \to \infty\ (t \to \infty)$ и вместо условия (2) выполняется более сильное условие

$$|\Gamma_k\{\eta_t\}| \leqslant C^k (\mathbf{M}\eta)^{1+(k-1)a}, \quad k=2,\ 3,\ \dots$$

теоремы о больших уклонениях для $F_{S_{\eta_t}}(x)$ в интервале

$$1 \leqslant x = 0\left((\mathbf{M}\eta_t)^{\frac{1-a}{2}} \right)$$

с остаточным членом

$$O\left(\frac{x}{(\mathbf{M}\eta_t)^{\frac{1-a}{2}}} \right)$$

было получено А. Аксомайтисом [2].

Доказательство. Согласно одной лемме автора (см. [1], лемма и замечание к ней) для того, чтобы для функции распределения $F(x)$ случайной величины ξ с $m=\mathbf{M}\xi$ и $\sigma^2=\mathbf{D}\xi$ в интервале

$$1\leqslant x\leqslant \bar{\delta}\Delta,\quad \bar{\delta}<\bar{\delta}_H$$

имели место соотношения

$$\frac{1-F(m+x\sigma)}{1-\Phi(x)}=e^{\frac{x^3}{\Delta}\lambda\left(\frac{x}{\Delta}\right)}\left(1+f_2(\bar{\delta},\,H)\,\frac{x}{\Delta}\right),$$

$$\frac{F(m-x\sigma)}{\Phi(-x)}=e^{-\frac{x^3}{\Delta}\lambda\left(-\frac{x}{\Delta}\right)}\left(1+f_2(\bar{\delta},\,H)\,\frac{x}{\Delta}\right) \tag{5}$$

(здесь $f_i(\bar{\delta},\,H)$, $i=1,\ 2$, $\bar{\delta}_H$, $\lambda(t)$ те же самые, что в формулировке теоремы) достаточно, чтобы в круге $|z|\leqslant\frac{\Delta}{\sigma}$ было аналитическим преобразование Лапласа $\varphi_\xi(z)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{zx}\,dF(x+m)$ и удовлетворяло условию

$$|\ln\varphi_\xi(z)|_{|z|=\frac{\Delta}{\sigma}}\leqslant H\Delta^2. \tag{6}$$

(У нас везде в качестве логарифма берется главное значение.)

В нашем случае $\xi=S_\eta$. Имеем

$$m=\mathbf{M}S_\eta=m_1\mathbf{M}_\eta,\quad \sigma^2=\mathbf{D}S_\eta=\sigma_1^2\mathbf{M}\eta.$$

Оценим $\varphi_{S_\eta}(z)$, причем при этом, не нарушая общности, можем считать, что $m_1=0$. Тогда

$$\varphi_{S_\eta}(z)=\mathbf{M}\exp\{\eta\ln\varphi_{\xi_1}(z)\}. \tag{7}$$

Существование правой и левой частей соотношения (7) в некотором круге $z|\leqslant r$ следует из условий (1), (2). Действительно, имеем

$$\ln\mathbf{M}e^{\eta w}=w\mathbf{M}\eta+\sum_{k=2}^{\infty}\Gamma_k\{\eta\}\,\frac{w^k}{k!}=\mathbf{M}\eta\,\left\{w+\Theta H_2\sum_{k=2}^{\infty}\left(K_2|w|(\mathbf{M}\eta)^a\right)^k\right\}=$$

$$=\left(1+\frac{\Theta H}{2}\right)w\mathbf{M}\eta \tag{8}$$

для всех

$$|w|\leqslant r_1=\frac{1}{2K_2(\mathbf{M}\eta)^a},$$

где Θ обозначает величину с $|\Theta|\leqslant 1$.

Далее, пусть

$$r_2=\frac{1}{\max\{K_1(1+2H_1),\ \sqrt{2}\,\sigma_1\}}.$$

Согласно (1), в круге $|z|\leqslant r_2$ имеем

$$\varphi_{\xi_1}(z)=1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\,\mathbf{M}\xi_1^k=1+\Theta\,|z|^2\sigma_1^2.$$

Кроме того, $\ln(1+w)=w+\Theta\,|w|^2$ при $|w|\leqslant\frac{1}{2}$, и, так как $|z^2\sigma_1^2|\leqslant\frac{1}{2}$, то находим

$$|\ln\varphi_{\xi_1}(z)|\leqslant\frac{3}{2}\,|z|^2\sigma_1^2. \tag{9}$$

При

$$|z| \leqslant r = \min\left\{r_2, \sqrt{\frac{2}{3} r_1}\ \sigma_1^{-1}\right\} \tag{10}$$

из (7)–(9) получаем

$$|\ln \varphi_{S_\eta}(z)|_{|z|=r} \leqslant \frac{3}{2}\left(1 + \frac{H_1}{2}\right) r^2 \sigma_1^2 \mathrm{M}\eta.$$

Таким образом, при $\xi = S_\eta$, $\sigma^2 = \sigma_1^2 \mathrm{M}\eta$, $\Delta = r\sigma$ и $H = \frac{3}{2}\left(1 + \frac{H_1}{2}\right)$ выполняется (6), а следовательно (5) и (3), (3′). Если учесть (10), то отсюда находим Δ.

Формула (4) для $\Gamma_k\{S_\eta\}$ следует из (7). Теорема доказана.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР
Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
24. II. 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. V. Statulevičius, On Large Deviations, Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Geb., 6, 133–144 (1966).
2. А. Аксомайтис, О больших уклонениях сумм случайного числа случайных величин, Лит. мат. сб., V, № 2, 193–196 (1965).

DIDELIŲ ATSILENKIMŲ TIKIMYBIŲ NEPRIKLAUSOMŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ SUMAI SU ATSITIKTINIU DĖMENŲ SKAIČIUMI KLAUSIMU

V STATULEVIČIUS

(Reziumė)

Sakykime, atsitiktiniai dydžiai ξ_1, ξ_2, ... nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę, $m_1 = \mathrm{M}\xi_1$, $\sigma_1^2 = \mathrm{D}\xi_1$, ir, sakykime, atsitiktinis dydis η priima tik sveikas neneigiamas reikšmes ir nepriklauso nuo ξ_1, ξ_2, ... Jeigu ξ_1 ir η pasiskirstymai patenkina sąlygas (1), (2), tai sumos $S_\eta = \xi_1 + \ldots + \xi_\eta$ pasiskirstymo funkcijai $F_{S_\eta}(x)$ galioja didelių atsilenkimų priklausomybės (3) ir (3′).

ON THE PROBABILITIES OF LARGE DEVIATIONS FOR SUMS OF RANDOM NUMBER OF INDEPENDENT RANDOM VARIABLES

V. STATULEVIČIUS

(Summary)

Let random variables ξ_1, ξ_2,... be independent and identically distributed with $m_1 = \mathrm{M}\xi_1$, $\sigma_1^2 = \mathrm{D}\xi_1$ and let a random variable η obtain only positive integer values and is independent of ξ_1, ξ_2,... If the distributions of ξ_1 and η satisfies the condition (1) (2), then for the function of distribution of the sum $S_\eta = \xi_1 + \ldots + \xi_\eta$ the large deviation relations (3) and (3′) are valid.