LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VII Nr. 3, 1968
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VII № 3, 1968

ОБ ОСОБЫХ ТОЧКАХ ФУНКЦИЙ, ПРЕДСТАВИМЫХ РЯДАМИ ДИРИХЛЕ

Л. А. ОСКОЛКОВ

Пусть $\{\lambda_n\}$ – монотонная последовательность действительных положительных чисел и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n}{\lambda_n}=\bar{D}<\infty,$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n}{\lambda_n}=\underline{D}.$$

Для характеристической функции $L(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\lambda_n^2}\right)$ последовательности $\{\lambda_n\}$ Г. Л. Лунцем [1] получены оценки вида

$$\underline{h}(\varphi)-\varepsilon<\frac{1}{r}\cdot\ln|L(r\cdot e^{i\varphi})|<\bar{h}(\varphi)+\varepsilon, \tag{1}$$

где $\varepsilon>0$ – любое и r – достаточно велико, причем

$$\underline{h}(\varphi)=\pi\underline{D}\cdot|\sin\varphi|-H_1\cdot(|\cos\varphi|-|\sin\varphi|)+\frac{\bar{D}-\underline{D}}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\cdot\ln|\sin 2\varphi|,$$

$$\bar{h}(\varphi)=\pi\bar{D}\cdot|\sin\varphi|+H_2\cdot(|\cos\varphi|-|\sin\varphi|),$$

если $0<|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{4}$ и $\frac{3}{4}\pi\leqslant|\varphi|<\pi$,

$$\underline{h}(\varphi)=\pi\cdot\underline{D}\cdot|\sin\varphi|,$$

$$\bar{h}(\varphi)=\pi\bar{D}\cdot|\sin\varphi|,$$

если $\frac{\pi}{4}\leqslant|\varphi|\leqslant\frac{3}{4}\pi$, где $H_1=H_1(\underline{D},\ \bar{D})\geqslant 0$ и $H_2=H_2(\underline{D},\ \bar{D})\geqslant 0$ – некоторые элементарные функции, которые „малы“ вместе с разностью $\bar{D}-\underline{D}$.

§ 1. Укажем прежде всего область голоморфности ряда Дирихле

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda_n s}}{L'(\lambda_n)}. \tag{I}$$

С этой целью рассмотрим сначала функции

$$I_\gamma(s)=\int_{l_\gamma}\frac{e^{-s\cdot z}}{L(z)}\cdot dz$$

и

$$I_{-\gamma}(s)=\int_{l_{-\gamma}}\frac{e^{-s\cdot z}}{L(z)}\cdot dz \qquad (s=\sigma+i\tau),$$

где пути интегрирования l_γ и $l_{-\gamma}$ идут из точки $z=0$ в точку $z=\infty$ вдоль лучей $\arg z=\gamma$ и $\arg z=-\gamma$ $\left(\alpha<\gamma<\pi-\alpha,\ \ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ соответетственно.

Используя нижнюю оценку из неравенств (1) и учитывая, что $z = re^{i\gamma}$ на l_γ, получим для достаточно большого r и любого $\varepsilon > 0$ неравенство

$$\left| \frac{e^{-s.z}}{L(z)} \right| < \exp\{[-\sigma\cdot\cos\gamma+\tau\cdot\sin\gamma-\underline{h}(\gamma)+\varepsilon]\cdot r\}.$$

Отсюда следует, что $I_\gamma(s)$ сходится и определяет функцию, голоморфную в полуплоскости

$$\tau\cdot\sin\gamma-\sigma\cdot\cos\gamma<\underline{h}(\gamma). \tag{1.1}$$

Последнее неравенство означает для $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$, что

$$\tau\cdot\sin\gamma-\sigma\cdot\cos\gamma<\pi\underline{D}\cdot\sin\gamma-H_1\cdot(\cos\gamma-\sin\gamma)+\frac{\bar{D}-\underline{D}}{\sqrt{\cos 2\gamma}}\cdot\ln|\sin 2\gamma|, \tag{1.1'}$$

если $\alpha<\gamma<\frac{\pi}{4}$,

$$\tau\cdot\sin\gamma-\sigma\cdot\cos\gamma<\pi\underline{D}\cdot\sin\gamma, \tag{1.1''}$$

если $\frac{\pi}{4}\leqslant\gamma\leqslant\frac{3}{4}\pi$,

$$\tau\cdot\sin\gamma-\sigma\cdot\cos\gamma<\pi\underline{D}\cdot\sin\gamma+H_1\cdot(\cos\gamma+\sin\gamma)+\frac{\bar{D}-\underline{D}}{\sqrt{\cos 2\gamma}}\cdot\ln|\sin 2\gamma|, \tag{1.1'''}$$

если $\frac{3}{4}\pi<\gamma<\pi-\alpha$; а для $\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$ неравенство (1.1) означает, что

$$\tau\cdot\sin\gamma-\sigma\cdot\cos\gamma<\pi\underline{D}\cdot\sin\gamma,$$

если $\alpha<\gamma<\pi-\alpha$.

Легко видеть, что объединение всех полуплоскостей (1.1) для $\alpha<\gamma<\pi-\alpha$ содержит в себе область G_1, дополнительную к заштрихованной на рис. 1, если $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$.

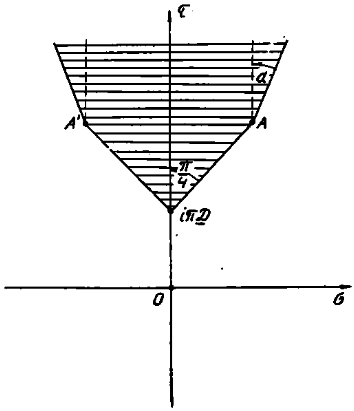

Рис. 1

Решая совместно уравнения соответствующих участков границы области G_1, находим координаты точки A: $\sigma=H_1+p$, $\tau=H_1+p+\pi\underline{D}$, где

$$p=\frac{(\bar{D}-\underline{D})\cdot\ln|\sin 2\alpha|}{\sqrt{\cos 2\alpha}\cdot(\sin\alpha-\cos\alpha)}\geqslant 0.$$

Точки A и A' симметричны относительно мнимой оси.

В том случае, когда $\frac{\pi}{4} \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$, область G_1 – объединение всех полуплоскостей (1.1) для $\alpha < \gamma < \pi - \alpha$ является областью, дополнительной к углу

$$\frac{\pi}{2} - \alpha \leqslant \arg(s - i\pi \underline{D}) \leqslant \frac{\pi}{2} + \alpha.$$

Аналогичные рассуждения для интеграла $I_{-\gamma}(s)$ приводят к области G_2, симметричной с G_1 относительно действительной оси.

Рассмотрим далее функцию

$$g_R(s) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_R} \frac{e^{-s\cdot z}}{L(z)} \cdot dz,$$

где C_R – замкнутый контур, состоящий из участков лучей l_γ и $l_{-\gamma}$ и дуги окружности $|z| = R$.

Из результатов И. Ф. Красичкова [2] вытекает, что для рассматриваемого нами случая индекс конденсации

$$\delta = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\lambda_n} \cdot \ln \left| \frac{1}{L'(\lambda_n)} \right|$$

последовательности $\{\lambda_n\}$ бесконечен (если $\underline{D} \neq \bar{D}$). Учитывая этот факт и повторяя рассуждения, аналогичные тем, которыми автор пользовался ранее ([6], см. также [5]), приходим к утверждению, что *функция* $g(s) = I^-(s) - I^+(s)$ $\left(\textit{здесь обозначено } I^-(s) = I_{-\gamma}(s) \textit{ и } I^+(s) = I_\gamma(s)\right)$ *и* $g(s)$ *голоморфна в области* $G_1 \cap G_2$, *где под функцией* $g(s)$ *понимается предел соответствующей последовательности частных сумм ряда* (I).

§ 2. Обратимся теперь к изучению особенностей ряда Дирихле

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot e^{-\lambda_n \cdot s}, \tag{2.1}$$

имеющего непустую область сходимости.

Рассмотрим функцию $\varphi(z)$ экспоненциального типа в угле

$$|\arg z| < \beta, \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2},$$

имеющую в углах

$$\alpha < |\arg z| < \beta, \quad 0 < \alpha < \beta$$

индикатрису, не превышающую функции

$$h(\psi) = k \cdot \pi \bar{D} \cdot |\sin\psi|,$$

и удовлетворяющую условиям

$$\varphi(\lambda_n) = a_n \cdot L'(\lambda_n) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Если $k > 0$, то, очевидно, индикаторная (а, следовательно, и сопряженная) диаграмма функции $\varphi(z)$ содержится в области I, являющейся общей частью полуплоскостей

$$x \cdot \cos\beta + y \cdot \sin\beta - k\pi\bar{D} \cdot \sin\beta < 0,$$

$$x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha - k\pi\bar{D} \cdot \sin\alpha < 0,$$

$$x \cdot \cos\beta - y \cdot \sin\beta - k\pi\bar{D} \cdot \sin\beta < 0,$$

$$x \cdot \cos\alpha - y \cdot \sin\alpha - k\pi\bar{D} \cdot \sin\alpha < 0.$$

Область S, точки которой имеют вид z_1+z_2, где z_1 принадлежит I, а z_2 — области, дополнительной к $G_1 \cap G_2$, изображена на рис. 2 для случая

$$0<\alpha<\frac{\pi}{4} \quad \text{и} \quad 0<k<\frac{H_1+p+\pi \underline{D}}{\pi \cdot \bar{D}}$$

и на рис. 3 — для случая

$$\frac{\pi}{4} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad 0<k<\frac{\underline{D}}{\bar{D}}.$$

Координаты точек C (рис. 2) и C_1 (рис. 3), как нетрудно подсчитать, равны соответственно

$$x=H_1+p-(H_1+p+\pi \underline{D}-k\pi \bar{D})\cdot \operatorname{tg}\alpha, \quad y=0$$

и

$$x=-\pi\cdot(\underline{D}-k\cdot \bar{D})\cdot \operatorname{tg}\alpha, \quad y=0.$$

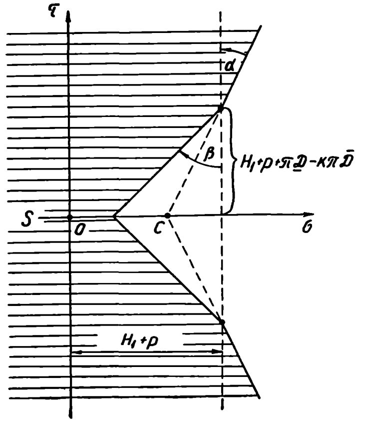

Рис. 2

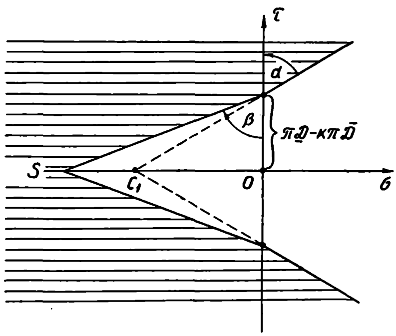

Рис. 3

Если же $k<0$, то область I представляет собой угол

$$\frac{\pi}{2}+\beta<\arg(z-z_0)<\frac{\pi}{2}-\beta, \quad 0<\beta<\frac{\pi}{2},$$

где

$$z_0=k\pi \bar{D}\cdot \operatorname{tg}\beta.$$

Область S в этом случае изображена на рис. 4 для $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$ и на рис. 5 — для $\frac{\pi}{4} \leqslant \alpha<\frac{\pi}{2}$. Точки C' и C_1' имеют координаты

$$x=H_1+p-(H_1+p+\pi \underline{D})\cdot \operatorname{tg}\alpha + k\pi \bar{D}\cdot \operatorname{tg}\beta, \quad y=0$$

и

$$x=-\pi \underline{D}\cdot \operatorname{tg}\alpha+k\pi \bar{D}\cdot \operatorname{tg}\beta, \quad y=0,$$

соответственно.

Применяя теорему Крамера — Полиа [3], можно утверждать, что функция

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda_n)\cdot e^{-\lambda_n s}}{L'(\lambda_n)}=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot e^{-\lambda_n\cdot s}$$

голоморфна внутри области, дополнительной к S. Этот результат можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема 1. *Если существует функция* $\varphi(z)$ *экспоненциального типа в угле* $|\arg z|<\beta$, *имеющая индикатрису, которая при* $\alpha<|\psi|<\beta$, $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$ *не превышает функции* $h(\psi)=k\pi\bar{D}\,|\sin\psi|$, *и такая, что*

$$\varphi(\lambda_n)=a_n\cdot L'(\lambda_n) \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots),$$

то сумма $f(s)$ *ряда* (2.1) *при*

$$0<k<\frac{H_1+p+\pi\underline{D}}{\pi\cdot\bar{D}}$$

голоморфна в угле

$$|\arg(s-s_0)|<\frac{\pi}{2}-\alpha$$

с вершиной

$$s_0=H_1+p-(H_1+p+\pi\cdot\underline{D}-k\pi\bar{D}).\operatorname{tg}\alpha$$

и на отрезках сторон этого угла длины

$$l=\frac{H_1+p+\pi\underline{D}-k\cdot\pi\bar{D}}{\cos\alpha}$$

каждый, примыкающих к вершине угла. При $k<0$ *функция* $f(s)$ *голоморфна в угле*

$$|\arg(s-s_1)|<\frac{\pi}{2}-\alpha,$$

где

$$s_1=H_1+p-(H_1+p+\pi\underline{D})\cdot\operatorname{tg}\alpha+k\cdot\pi\cdot\bar{D}\cdot\operatorname{tg}\beta<H_1+p-$$
$$-(H_1+p+\pi\cdot\underline{D}-k\cdot\pi\bar{D})\cdot\operatorname{tg}\alpha.$$

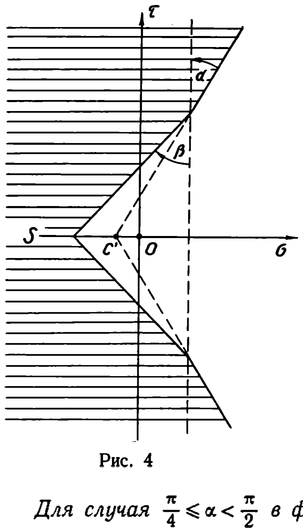

Рис. 4

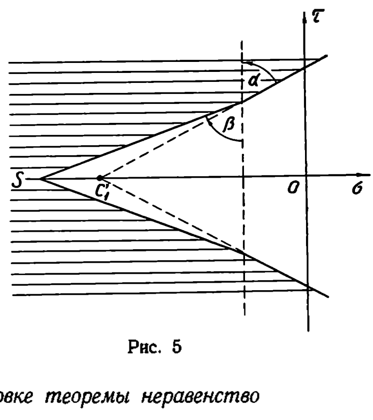

Рис. 5

Для случая $\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$ *в формулировке теоремы неравенство*

$$0<k<\frac{H_1+p+\pi\underline{D}}{\pi\bar{D}}$$

заменяется на неравенство $0<k<\frac{\underline{D}}{\bar{D}}$ *и надо взять*

$$s_0=-\pi(\underline{D}-k\bar{D})\cdot\operatorname{tg}\alpha,\quad l=\frac{\pi(\underline{D}-k\cdot\bar{D})}{\cos\alpha}$$

и

$$s_1 = -\pi \underline{D} \cdot \operatorname{tg}\alpha + k \cdot \pi \bar{D} \cdot \operatorname{tg}\beta < -\pi(\underline{D} - k\bar{D}) \cdot \operatorname{tg}\alpha.$$

Предположим теперь, что функция

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot e^{-\lambda_n \cdot s}$$

голоморфна в угле

$$|\arg(s - s_0)| < \frac{\pi}{2} - \alpha,$$

на участках сторон этого угла, примыкающих к его вершине длиной l каждый, и в области Ω, ограниченной указанными отрезками и прямыми, проходящими через концы этих отрезков и наклоненными к действительной оси под углами, равными $\frac{\pi}{2} - \beta$ и $\beta - \frac{\pi}{2}$, $\alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$.

Положим для $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ —

$$s_0 = H_1 + p - (H_1 + p + \pi\underline{D} - k\pi\bar{D}) \cdot \operatorname{tg}\alpha, \quad l = \frac{H_1 + p + \pi \cdot \underline{D} - k \cdot \pi\bar{D}}{\cos\alpha},$$

$$k < \frac{H_1 + p + \pi \cdot \underline{D}}{\pi\bar{D}},$$

а для $\frac{\pi}{4} \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$ — $s_0 = -\pi \cdot (\underline{D} - k \cdot \bar{D}) \cdot \operatorname{tg}\alpha$, $l = \frac{\pi \cdot (\underline{D} - k \cdot \bar{D})}{\cos\alpha}$ и $k < \frac{\underline{D}}{\bar{D}}$.

Повторив рассуждения, аналогичные примененным нами ранее (см. [6], доказательство теоремы 2), приходим к следующей **Теореме 2.** *При высказанных выше предположениях относительно функции $f(s)$ существует функция $\varphi(z)$ экспоненциального типа в угле $|\arg z| < \beta$, удовлетворяющая условиям $\varphi(\lambda_n) = a_n \cdot L'(\lambda_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, и индикатриса которой в углах*

$$\alpha < |\psi| < \beta, \quad \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$$

не превышает функции

$h(\psi) = k \cdot \pi\bar{D} \cdot |\sin\psi| + P$, *если* $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$, *и функции*

$$h(\psi) = \left(k + 1 - \frac{\underline{D}}{\bar{D}}\right) \cdot \pi \cdot \bar{D} \cdot |\sin\psi|,$$

если $\frac{\pi}{4} \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Под P понимаем наибольший из максимумов следующих функций:

$$R_1(\psi) = (H_1 + H_2 + p) \cdot \cos\psi + (\pi\bar{D} - \pi\underline{D} - H_1 - H_2 - p) \cdot |\sin\psi|,$$

$$R_2(\psi) = (H_1 + p) \cdot \cos\psi + (\pi \cdot \bar{D} - \pi\underline{D} - H_1 - p) \cdot |\sin\psi|$$

при $0 \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Заметим, что для любого фиксированного α из интервала $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ P „мало“ вместе с разностью $\bar{D} - \underline{D}$, так как при этом „малы“ H_1, H_2 и p.

§ 3. *Углом голоморфности заданного раствора $\pi - 2\alpha$ ряда (2.1) назовем любой угол A_α этого раствора с биссектрисой, имеющей направление действительной положительной полуоси, внутри которого функция $f(s)$ голоморфна, при условии, что $f(s)$ не голоморфна внутри всякого угла того же раствора, содержащего строго внутри себя вершину угла A_α.*

Пусть s^* – вершина угла голоморфности A_α функции $f(s)$, и пусть функция $f(s)$ голоморфна на прилегающих к вершине отрезках сторон этого угла длины l каждый и во внутренности четырехугольника Ω, ограниченного указанными отрезками и прямыми, проходящими через концы этих отрезков и наклоненными к действительной оси под углами, равными

$$\frac{\pi}{2}-\beta \quad \text{и} \quad \beta-\frac{\pi}{2} \left(\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}\right).$$

Пусть сначала $\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$ и тогда

$$l=\frac{\pi\cdot(D-k_1\cdot\bar{D})}{\cos\alpha}, \tag{3.1}$$

где

$$k_1<-1+\frac{\underline{D}}{\bar{D}}. \tag{3.2}$$

Сделав замену переменной

$$\zeta=s-s^*-\pi\cdot(\underline{D}-k_1\cdot\bar{D})\cdot\operatorname{tg}\alpha, \tag{3.3}$$

получим

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot\exp\{-\lambda_n\cdot[\zeta+s^*+\pi\cdot(\underline{D}-k_1\cdot\bar{D})\cdot\operatorname{tg}\alpha]\}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} A_n\cdot e^{-\lambda_n\cdot\zeta}=F(\zeta).$$

Очевидно, что всякий угол

$$|\arg(\zeta-\zeta^*)|<\frac{\pi}{2}-\alpha,$$

где

$$\zeta^*=-\pi\cdot(\underline{D}-k_1\cdot\bar{D})\cdot\operatorname{tg}\alpha,$$

является углом голоморфности раствора $\pi-2\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$ функции $F(\zeta)$, и функция $F(\zeta)$ голоморфна на прилегающих к вершине отрезках сторон этого угла длины l каждый, а также в области Ω', полученной с помощью соответствующего сдвига области Ω.

На основании теоремы 2 можно утверждать, что существует функция $\varphi(\zeta)$ экспоненциального типа в угле $|\arg\zeta|<\beta$, удовлетворяющая условию $\varphi(\lambda_n)=A_n\cdot L'(\lambda_n)$, индикатриса которой в углах $\alpha<|\psi|<\beta$ не превышает функции

$$h(\psi)=\left(k_1+1-\frac{\underline{D}}{\bar{D}}\right)\cdot\pi\cdot\bar{D}\cdot|\sin\psi|=k\cdot\pi\cdot\bar{D}\cdot|\sin\psi|,$$

где

$$k=k_1+1-\frac{\underline{D}}{\bar{D}}<0. \tag{3.4}$$

Применяя теорему 1, приходим к утверждению, что функция $F(\zeta)$ голоморфна внутри угла

$$|\arg(\zeta-\zeta_0)|<\frac{\pi}{2}-\alpha$$

с вершиной в точке

$$\zeta_0=-\pi\underline{D}\cdot\operatorname{tg}\alpha+k\cdot\pi\bar{D}\cdot\operatorname{tg}\beta.$$

Точка ζ^*, очевидно, является внутренней для этого угла, если выполнено условие

$$\operatorname{tg}\beta>\frac{k_1}{k}\cdot\operatorname{tg}\alpha. \tag{3.5}$$

Пользуясь (3.4), получим

$$\operatorname{tg}\beta > \left(1 + \frac{\bar{D} - \underline{D}}{|k| \cdot \bar{D}}\right) \cdot \operatorname{tg}\alpha \tag{3.5'}$$

и

$$l = \frac{(1 + |k|) \cdot \pi \bar{D}}{\cos\alpha}.$$

Следовательно, если выполнены условия (3.2) и (3.5′), то точка ζ^* лежит внутри некоторого угла раствора $\pi - 2\alpha$, в котором голоморфна функция $F(\zeta)$.

В случае, когда $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$, аналогичные рассуждения при замене соотношений (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) соответственно соотношениями

$$l = \frac{H_1 + p + \pi \underline{D} - k_1 \cdot \pi \cdot \bar{D}}{\cos\alpha},$$

$$k_1 < -\frac{p}{\pi \cdot \bar{D} \cdot \sin\alpha}, \tag{3.6}$$

$$\zeta = s - s^* + H_1 + p - (H_1 + p + \pi \cdot \underline{D} - k_1 \cdot \pi \bar{D}) \cdot \operatorname{tg}\alpha$$

и

$$k = k_1 + \frac{p}{\pi \cdot \bar{D} \cdot \sin\alpha}$$

приводят к такому же выводу, причем условие (3.2) заменяется условием (3.6), а условие (3.5′) – условием

$$\operatorname{tg}\beta > \left(1 + \frac{p}{|k| \cdot \pi \bar{D} \cdot \sin\alpha}\right) \cdot \operatorname{tg}\alpha.$$

Итак, мы доказали **теорему 3.**

Функция $f(s)$ имеет по крайней мере одну особую точку в замкнутом четырехугольнике $\bar{\Omega}_{|k|}$, ограниченном прилегающими к вершине угла голоморфности раствора $\pi - 2\alpha$ отрезками его сторон длины l каждый и проведенными через концы этих отрезков прямыми, наклоненными к действительной оси под углами, равными

$$\frac{\pi}{2} - \beta \quad \text{и} \quad \beta - \frac{\pi}{2} \ \left(\alpha < \beta < \frac{\pi}{2}\right).$$

При этом, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$, то

$$l = \frac{H_1 + p + \pi \underline{D} + \dfrac{p}{\sin\alpha} + |k| \cdot \pi \cdot \bar{D}}{\cos\alpha},$$

а β и $|k|$ связаны условием

$$\operatorname{tg}\beta = \left(1 + \frac{p}{|k| \cdot \pi \cdot \bar{D} \cdot \sin\alpha}\right) \cdot \operatorname{tg}\alpha; \tag{3.7}$$

если же $\frac{\pi}{4} \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$, то

$$l = \frac{(1 + |k|) \cdot \pi \bar{D}}{\cos\alpha},$$

а β и $|k|$ связаны условием

$$\operatorname{tg}\beta = \left(1 + \frac{\bar{D} - \underline{D}}{|k| \cdot \bar{D}}\right) \cdot \operatorname{tg}\alpha. \tag{3.5''}$$

Замечания.

1) Легко видеть, что при любом фиксированном α увеличение длин отрезков l влечет за собой увеличение $|k|$, а, следовательно, уменьшение

угла β. При этом расстояние d от вершины угла голоморфности раствора $\pi-2\alpha$ до противолежащей вершины четырехугольника $\bar{\Omega}_{|k|}$ уменьшается и стремится к величине d_0, причем, если $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$, то

$$d=\left[1+\frac{1}{|k|\cdot\pi\bar{D}}\cdot\left(H_1+p+\pi\underline{D}+\frac{P}{\sin\alpha}\right)\right]\cdot\frac{P}{\cos\alpha}$$

и

$$d_0=\frac{P}{\cos\alpha},$$

если же $\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$, то

$$d=\pi\cdot(\bar{D}-\underline{D})\cdot\left[1+\frac{1}{|k|}\right]\cdot\operatorname{tg}\alpha$$

и

$$d_0=\pi\cdot(\bar{D}-\underline{D})\cdot\operatorname{tg}\alpha.$$

2) Если $\underline{D}=\bar{D}=D$, то, так как при фиксированном α имеем $H_1=0$, $p=0$ и $P=0$, можно взять $\alpha=0$ и $k<0$ как угодно близким к нулю, что приводит к известной теореме Полиа [5].

3) При некоторых дополнительных условиях [6] функция $\underline{h}(\varphi)$ из оценок (1) ограничена для любых φ, но теорема, аналогичная приведенной выше, остается справедливой, если равенства, определяющие длины отрезков l и угол β, заменить при $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$ соответствующими; при $\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$ указанные равенства не изменяются, так как в углах $\frac{\pi}{4}\leqslant|\varphi|\leqslant\frac{3}{4}\pi$ оценки (1) полностью совпадают и в том, и в другом случаях.

Предположим теперь, что на оси голоморфности ряда (2.1) найдется некоторый отрезок $\bar{c}$ длины $2l$ большей, чем $2\pi\cdot\bar{D}$, каждая внутренняя точка которого является правильной для функции $f(s)$, в то время как хотя бы одна из его граничных точек – особая для этой функции. Поместим в точку (x_0, y_0), являющуюся серединой отрезка $\bar{c}$ вершину угла раствора $\frac{\pi}{2}$ с биссектрисой, имеющей направление действительной положительной полуоси, и будем перемещать его влево параллельно самому себе, пока он не станет углом голоморфности ряда (2.1).

При этом возможны два случая:

1) угол станет углом голоморфности раньше, чем каждая из его сторон пройдет через концы отрезка $\bar{c}$. Это означает, что на границе угла имеется по крайней мере одна особая точка ряда (2.1), то есть по крайней мере одна особая точка этого ряда содержится во внутренности равнобедренного прямоугольного треугольника Δ_0, основанием которого является отрезок $\bar{c}$;

2) угол станет углом голоморфности только тогда, когда стороны его пройдут через концы отрезка $\bar{c}$. В этом случае, основываясь на теореме 3, мы можем утверждать, что для любого $|k|>0$ найдется соответствующий замкнутый четырехугольник $\bar{\Omega}_{|k|}$, который содержит по крайней мере одну особую точку ряда (2.1), причем величины l и β, определяющие $\bar{\Omega}_{|k|}$, находятся из равенств

$$l=(1+|k|)\cdot\pi\bar{D}\cdot\sqrt{2}$$

и

$$\operatorname{tg}\beta=1+\frac{\bar{D}-\underline{D}}{|k|\cdot\bar{D}}.$$

Так как по условию $2l > 2\pi \cdot \bar{D}$, то для любого $|k|$, удовлетворяющего неравенству $0 < |k| < \frac{\bar{l}}{\pi \bar{D}} - 1$, справедливо неравенство $l < l \cdot \sqrt{2}$, и, следовательно, область $\bar{\Omega}_{|k|}$ не содержит ни одного из концов отрезка $\bar{c}$.

Итак, доказана ·

Теорема 4. *Если на оси голоморфности ряда (2.1) найдется отрезок длины большей, чем $2\pi \cdot \bar{D}$, каждая внутренняя точка которого правильная, а хотя бы одна из граничных его точек – особая для этого ряда, то в каждой области $S_{|k|} = \Delta_0 \cup \bar{\Omega}_{|k|}$ содержится по крайней мере одна особая точка функции $f(s)$.*

Сопоставим полученный результат с теоремой 3 из [6], утверждающей, что функция $f(s)$ имеет по крайней мере одну особую точку в замкнутом равнобедренном треугольнике Δ с основанием на оси голоморфности длиной $l = 2 \cdot [H_1 + \pi \underline{D} + P + |k| \cdot \pi \bar{D}]$ и боковыми сторонами, наклоненными под углами $\frac{\pi}{2} - \beta$ и $\beta - \frac{\pi}{2}$ к действительной оси, где β и $|k|$ связаны условием

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{P}{|k| \cdot \pi \cdot \bar{D}}.$$

Через P обозначен наибольший из максимумов функций

$$R_1(\psi) = (H_1 + H_2) \cdot \cos \psi + (\pi \bar{D} - \pi \underline{D} - H_1 - H_2) \cdot |\sin \psi|$$

и

$$R_2(\psi) = H_1 \cdot \cos \psi + (\pi \bar{D} - \pi \underline{D} - H_1) \cdot |\sin \psi|$$

для $0 \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Нетрудно видеть, что $P + H_1 + \pi \underline{D} > \pi \bar{D}$. Если при этом длина $2l$ отрезка $\bar{c}$, о котором шла речь в условии теоремы 4, удовлетворяет условию $\pi \bar{D} < l < P + H_1 + \pi \underline{D}$, то теорема 3 из [6] не дает никакой дополнительной информации об особенностях ряда (2.1), в то время как теорема 4 указывает область $S_{|k|}$, содержащую по крайней мере одну особую точку этого ряда, отличную от известной.

Область E_α – объединение всех углов голоморфности раствора $\pi - 2\alpha$ ряда (2.1) назовем звездой голоморфности этого ряда.

Очевидно, что каждому значению α соответствует своя звезда голоморфности. Очевидно также, что любая прямая, наклоненная под углом Θ к действительной оси, где $|\Theta| < \frac{\pi}{2} - \alpha$, встречается с границей звезды E_α только в одной точке. Функция $x(y)$, являющаяся правой частью уравнения $x = x(y)$ границы звезды E_α, непрерывна на интервале $(-\infty, \infty)$ [4].

Теорема 5. 1) *все точки границы звезды голоморфности E_α ряда (2.1), не являющиеся внутренними на наклоненных под углами $\pm\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ к действительной оси прямолинейных отрезках, входящих в границу, особые для $f(s)$;*

2) *точка s_0 на границе звезды голоморфности, являющаяся вершиной входящей в эту границу ломаной, состоящей из отрезков лучей*

$$\arg(s - s_0) = \pm\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right),$$

особая для $f(s)$;

3) если точка s принадлежит прямолинейному отрезку, входящему в границу E_α и наклоненному под углом $\pm\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ к действительной оси, то всякая соответствующая этой точке область $\bar{\Omega}_{|k|}(s)$ содержит по крайней мере одну особую точку функции $f(s)$;

4) пусть c_1 — либо состоящая из двух звеньев, расположенных на лучах $\arg(s-s_1)=\pm\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, ломаная, входящая в границу E_α, концы которой не являются внутренними точками прямолинейных участков границы E_α, либо отрезок, лежащий на этой границе и наклоненный к действительной оси под углом $\pm\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, причем его правый конец не лежит внутри прямолинейного участка границы.

Если длина c_1 больше, чем $\frac{1}{\cos\alpha}\cdot 2\pi\bar{D}$, то или внутри c_1 или в некоторой области $S'_{|k|}$, определенной ниже, содержится по крайней мере одна особая точка ряда (2.1).

Утверждения 1), 2) и 3) доказываются рассуждениями, которые были приведены ранее Г. Л. Лунцем [4] для доказательства аналогичных фактов. Поясним только, что под областью $\bar{\Omega}_{|k|}(s)$ понимается область, о которой шла речь в теореме 3, где s — любая точка отрезка, упомянутого в пункте 3) теоремы 5.

Докажем утверждение 4). Рассмотрим сначала звезду голоморфности E_α для случая, когда $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$. Пусть $s=s^*$ — та граничная точка c_1, которая расположена правее. Проведем через s^* прямую, параллельную мнимой оси, и обозначим через c_1' проекцию c_1 на эту прямую. В середину полученной проекции поместим вершину угла раствора $\frac{\pi}{2}$ с биссектрисой, имеющей направление действительной положительной полуоси, и будем перемещать этот угол влево, пока он не станет углом голоморфности ряда (2.1).

При этом возможны следующие случаи:

1) угол станет углом голоморфности функции $f(s)$ тогда, когда его вершина попадет на c_1. Это означает, что вершина угла есть особая точка ряда (2.1), лежащая внутри c_1;

2) угол станет углом голоморфности раньше, чем одна из его сторон пройдет через точку s^*. Это означает, что особая точка ряда (2.1) (по крайней мере одна) попадет либо в вершину угла, либо на одну из его сторон. Очевидно, что по крайней мере одна особая точка ряда содержится либо на пересечении сторон угла и c_1, либо в той части Δ_1 внутренности равнобедренного прямоугольного треугольника, имеющего своим основанием проекцию c_1', которая расположена вне E_α;

3) угол станет углом голоморфности только в том случае, когда одна из его сторон пройдет через s^*. Тогда, применяя теорему 3, мы можем утверждать, что в соответствующей области $\bar{\Omega}_{|k|}$, точнее — в той ее части $\bar{\Omega}'_{|k|}$, которая не принадлежит E_α, содержится по крайней мере одна особая точка ряда (2.1). Если взять теперь $|k|$ таким, чтобы удовлетворялось неравенство

$$0<|k|<\frac{l_1}{\pi\bar{D}\cdot\sqrt{2}}-1$$

(через $2l_1$ обозначена длина c_1), то, очевидно, что область $\bar{\Omega}'_{|k|}$ не содержит ни одной из граничных точек c_1.

Суммируя все сказанное, мы приходим к заключению, что ряд (2.1) имеет по крайней мере одну особую точку либо внутри c_1, либо в области $S'_{|k|}=\Delta_1 \cup \bar{\Omega}'_{|k|}$, причем эта особенность отлична от известных заранее.

В том случае, когда $\frac{\pi}{4} \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$, утверждение 4) теоремы 5 является следствием пункта 3) этой теоремы, если за область $S'_{|k|}$ принять часть области $\bar{\Omega}'_{|k|}$, не принадлежащую E_α, причем s – середина отрезка c_1 или та точка ломаной c_1, которая делит ее на две равные по длине части. Область $S'_{|k|}$ не содержит граничных точек c_1, если

$$0<|k|<\frac{l_1}{\pi \bar{D}} \cdot \cos \alpha - 1.$$

Теорема доказана.

Московский институт
химического машиностроения

Поступило в редакцию
27.XII.1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Л. Лунц, Оценка роста канонического произведения, Международный конгресс математиков, Москва, 1966. Тезисы кратких научных сообщений, секция 4, стр. 64.
2. И. Ф. Красичков, Оценки снизу для целых функций конечного порядка, Сиб. матем, журнал, **6**, № 4, 840—861 (1965).
3. Г. Л. Лунц. О рядах Дирихле с комплексными показателями, Матем. сб., **67** (109), вып. 1, 89—134 (1965).
4. Г. Л. Лунц, Ряды Дирихле с нерегулярным распределением аргументов показателей, Лит. мат. сб., **VI**, № 4, 55—72 (1966).
5. V. Bernstein, Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet, Paris, 1933.
6. Л. А. Осколков. Обобщение теорем Полиа и В. Бернштейна для рядов Дирихле, Лит. мат. сб., **VII**, № 2, (1967).

FUNKCIJŲ, IŠREIŠKIAMŲ DIRICHLE EILUTĖMIS, PAVIENIAI TAŠKAI

L. OSKOLKOVAS

(Reziumė)

Darbe nagrinėjama Dirichle eilutė

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s},$$

kur $\{\lambda_n\}$ yra teigiamų skaičių seka, tenkinanti vienintelę sąlygą $\overline{\lim}(n:\lambda_n)<\infty$. Įrodomos kelios teoremos apie funkcijos $f(s)$ pavienių taškų pasiskirstymą.

SUR LES POINTS SINGULIERS DES FONCTIONS, REPRÉSENTABLES PAR LES SÉRIES DE DIRICHLET

L. OSKOLKOV

(Résumé)

On démontre quelques théorèmes sur la distribution des points singuliers de la fonction

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

où $\{\lambda_n\}$ est une suite des nombres positifs qui satisfait a une seule condition

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{\lambda_n} < \infty.$$