LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VII Nr. 3, 1968
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VII № 3, 1968

О СХОДИМОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ РЯДОВ

Н. С. НАСЕКОВСКАЯ

§ 1. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z), \tag{1}$$

где

$$P_0(z)=1, \qquad P_n(z)=\prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{z}{\lambda_\nu}\right),$$

и последовательность $\{\lambda_\nu\}$ такова, что $|\lambda_\nu|\uparrow\infty$. Обозначим

$$S_n=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{|\lambda_\nu|}, \qquad S_n^{\vartheta_1,\vartheta_2}=\sum\frac{1}{|\lambda_\nu|},$$

где сумма распространена на те индексы $\nu\leqslant n$, для которых $\vartheta_1\leqslant\arg\lambda_\nu<\vartheta_2$.

Пусть существует относительная угловая плотность последовательности $\{\lambda_\nu\}$, то есть для всех ϑ_1, ϑ_2, не принадлежащих некоторому счетному множеству, существует

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n^{\vartheta_1,\vartheta_2}}{S_n}=F(\vartheta_2)-F(\vartheta_1),$$

где $F(\vartheta)$ – некоторая монотонная функция. (Заметим, что, если, в частности, последовательность $\{S_n\}$ ограничена, то относительная угловая плотность последовательности $\{\lambda_\nu\}$ всегда существует.)

Теорема 1. *Если последовательность $\{\lambda_\nu\}$ имеет относительную угловую плотность, хотя бы одно из чисел A и B, где*

$$A=\int_0^{2\pi}\cos\psi\,dF(\psi), \qquad B=\int_0^{2\pi}\sin\psi\,dF(\psi),$$

отлично от нуля, и если ряд (1) *сходится в точке*

$$z_0=x_0+iy_0\neq\lambda_\nu\,(\nu=1,\ 2,\ \ldots),$$

то ряд (1) *сходится в любой точке*

$$z=x+iy,$$

для которой

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)>0.$$

Для доказательства рассмотрим сумму

$$\sum_{n=p}^{q} a_n P_n(z)=\sum_{n=p}^{q} a_n P_n(z_0)\cdot\frac{P_n(z)}{P_n(z_0)}.$$

Обозначив $a_n P_n(z_0) = A_n$ и $\frac{P_n(z)}{P_n(z_0)} = B_n$, при помощи преобразования Абеля получим, что

$$\sum_{n=p}^{q} a_n P_n(z) = \sum_{n=p}^{q-1} \left[(B_n - B_{n+1}) \sum_{k=p}^{n} A_k \right] + B_q \sum_{k=p}^{q} A_k.$$

Так как, по условию, ряд (1) сходится в точке

$$z_0 = x_0 + iy_0 \neq \lambda_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots),$$

то для любого $\eta > 0$ найдется такое p_0, что при $q \geqslant p \geqslant p_0$

$$\left| \sum_{k=p}^{q} A_k \right| < \eta.$$

Но, каковы бы ни были $\varepsilon > 0$ и z, при достаточно большом n [4] имеем

$$|B_n| = \frac{|P_n(z)|}{|P_n(z_0)|} < \frac{\tilde{M}_1 \cdot \exp\{-(Ax + By - \varepsilon) S_n\}}{\tilde{M}_2 \cdot \exp\{-(Ax_0 + By_0 + \varepsilon) S_n\}} =$$
$$= N \cdot \exp\{-[A(x - x_0) + B(y - y_0) - 2\varepsilon] S_n\},$$

где $N > 0$ зависит от ε, но не зависит от n.

Поэтому при достаточно большом n

$$|B_n - B_{n+1}| = |B_n| \cdot \left| 1 - \frac{\lambda_{n+1} - z}{\lambda_{n+1} - z_0} \right| = |B_n| \cdot \left| \frac{z - z_0}{\lambda_{n+1} - z_0} \right| <$$
$$< C \cdot \frac{\exp\{-[A(x - x_0) + B(y - y_0) - 2\varepsilon] S_n\}}{|\lambda_n|},$$

где C — постоянная (z — фиксировано, $n = 1, 2, \ldots$).

Таким образом,

$$\left| \sum_{n=p}^{q} a_n P_n(z) \right| < \eta \cdot \left\{ C \sum_{n=p}^{q-1} \frac{\exp\{-[A(x - x_0) + B(y - y_0) - 2\varepsilon] S_n\}}{|\lambda_n|} + \right.$$
$$\left. + N \cdot \exp\{-[A(x - x_0) + B(y - y_0) - 2\varepsilon] S_q\} \right\}.$$

Пусть точка $z = x + iy$ такова, что

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) > 0.$$

Взяв такое $\varepsilon > 0$, что $A(x - x_0) + B(y - y_0) > 3\varepsilon$, получим

$$\left| \sum_{n=p}^{q} a_n P_n(z) \right| < \eta \cdot \left\{ C \sum_{n=p}^{q-1} \frac{e^{-\varepsilon S_n}}{|\lambda_n|} + N e^{-\varepsilon S_q} \right\}. \tag{2}$$

Оценим сумму

$$\sum_{n=p}^{q-1} \frac{e^{-\varepsilon S_n}}{|\lambda_n|}.$$

Пусть

$$S_n = f(n), \quad S_n - S_{n-1} = f(n) - f(n-1) = \frac{1}{|\lambda_n|},$$

тогда

$$\sum_{n=p}^{q-1} \frac{e^{-\varepsilon S_n}}{|\lambda_n|} = \sum_{n=p}^{q-1} e^{-\varepsilon f(n)} \cdot [f(n) - f(n-1)],$$

и пусть функция $f(x)$ такова, что $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$ $\big(f'(x)$ — убывающая функция$\big)$. По теореме Лагранжа $(n - 1 < x < n)$,

$$f(n) - f(n-1) = f'(x) < f'(n-1).$$

Поэтому

$$\sum_{n=p}^{q-1} \frac{e^{-\varepsilon S_n}}{|\lambda_n|} < \sum_{n=p}^{q-1} e^{-\varepsilon f(n)} \cdot f'(n-1) < \sum_{n=p}^{q-1} e^{-\varepsilon f(n-1)} \cdot f'(n-1) <$$

$$< \int_{p-2}^{q-2} e^{-\varepsilon f(x)} f'(x)\,dx = \frac{1}{\varepsilon}\left(e^{-\varepsilon S_{p-2}} - e^{-\varepsilon S_{q-2}}\right). \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует

$$\left| \sum_{n=p}^{q} a_n P_n(z) \right| < \eta \left\{ \frac{C}{\varepsilon} \left[e^{-\varepsilon S_{p-2}} - e^{-\varepsilon S_{q-2}}\right] + N e^{-\varepsilon S_q} \right\}.$$

Так как число $\eta > 0$ — произвольно, то теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty,$$

$$S = \alpha = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln \left| \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \right|}{S_n},$$

если ряд $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ *расходится,* $(\alpha \geqslant 0)$, *и*

$$S = \beta = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \right|}{S_n},$$

если ряд $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ сходится, $(-\infty \leqslant \beta \leqslant 0)$. *Тогда ряд* (1) *сходится во всех точках* z, *принадлежащих полуплоскости*

$$Ax + By - S > 0, \tag{4}$$

и расходится в точках $z \neq \lambda_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, для которых

$$Ax + By - S < 0.$$

Доказательство. 1. Предположим, что ряд $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ расходится и $\alpha < \infty$. При помощи преобразования Абеля получим, что

$$\sum_{k=n}^{m} a_k P_k(z) = \sum_{k=n}^{m-1} \left[(P_k - P_{k+1}) \sum_{\nu=0}^{k} a_\nu \right] - P_n \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu + P_m \sum_{\nu=0}^{m} a_\nu. \tag{5}$$

Имеем

$$\tilde{M}_2 \cdot \exp\{-(Ax + By + \varepsilon) S_n\} < |P_n(z)| < \tilde{M}_1 \cdot \exp\{-(Ax + By - \varepsilon) S_n\},$$

где $\tilde{M}_1$ и $\tilde{M}_2 > 0$ — константы независящие от n, и

$$|P_k - P_{k+1}| = |P_k(z)| \cdot \frac{|z|}{|\lambda_{k+1}|}.$$

Пусть $|z| \leqslant R$, тогда при достаточно большом k будем иметь, что

$$|P_k(z) - P_{k+1}(z)| \leqslant C_1 \cdot \frac{\exp\{-(Ax + By - \varepsilon) S_k\}}{|\lambda_k|},$$

где C_1 — константа, независящая от k.

Из определения числа α следует, что

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu\right| < C_2 \cdot e^{(\alpha+\varepsilon)\, S_n},$$

где C_2 – константа, независящая от n.

Из равенства (5) получим, что

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k P_k(z)\right| < C_1 \cdot C_2 \sum_{k=n}^{m-1} \frac{\exp\{-(Ax+By-\alpha-2\varepsilon)\, S_k\}}{|\lambda_k|} +$$

$$+ C_2 \cdot \tilde{M}_1 [\exp\{-(Ax+By-\alpha-2\varepsilon)\, S_n\} + \exp\{-(Ax+By-\alpha-2\varepsilon)\, S_m\}].$$

Возьмем точку $z = x+iy \neq \lambda_\nu$ $(\nu = 1,\ 2,\ \ldots)$ такую, чтобы $Ax+By-\alpha = 3\varepsilon$.

Имеем

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k P_k(z)\right| < D_1 \sum_{k=n}^{m-1} \frac{e^{-\varepsilon S_k}}{|\lambda_k|} + D_2 (e^{-\varepsilon S_n} + e^{-\varepsilon S_m}). \tag{6}$$

Таким образом, неравенства (3) и (6) показывают, что ряд (1) сходится в точке z, для которой $Ax+By-\alpha = 3\varepsilon$, и так как $\varepsilon > 0$ – произвольно, то в силу теоремы 1 ряд (1) сходится в полуплоскости

$$Ax+By-\alpha > 0.$$

Пусть теперь, ряд $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ сходится.

Имеем

$$\sum_{k=n}^{m} a_k P_k(z) = \sum_{k=n+1}^{m} \left[(P_k - P_{k-1}) \sum_{\nu=k}^{\infty} a_\nu\right] + P_n \sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu - P_m \sum_{\nu=m+1}^{\infty} a_\nu. \tag{7}$$

Рассуждениями, аналогичными приведенным, с использованием неравенства

$$\left|\sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu\right| < C_3 \cdot e^{(\beta+\varepsilon)\, S_n},$$

где C_3 – константа, независящая от n,

получим, что ряд (1) сходится в точке $z = x+iy$, для которой $Ax+By-\beta > 0$.

2. Предположим, что ряд (1) сходится в точке

$$z = x+iy \neq \lambda_\nu \qquad (\nu = 1,\ 2,\ \ldots),$$

причем $Ax+By \geqslant 0$.

Пусть $a_\nu P_\nu(z) = b_\nu(z)$. Применим преобразование Абеля:

$$\sum_{\nu=n}^{m} a_\nu = \sum_{\nu=n}^{m} \frac{b_\nu}{P_\nu} =$$

$$= \frac{1}{P_n} \cdot \sum_{\nu=n}^{\infty} b_\nu + \sum_{k=n}^{m-1} \left[\left(\frac{1}{P_{k+1}} - \frac{1}{P_k}\right) \sum_{\nu=k+1}^{\infty} b_\nu\right] - \frac{1}{P_m} \sum_{\nu=m+1}^{\infty} b_\nu. \tag{8}$$

При некотором фиксированном z имеем

$$\left|\frac{1}{P_k(z)}\right| < M \cdot \exp\{(Ax+By+\varepsilon)\, S_k\},$$

где M – константа, независящая от k, и $\varepsilon > 0$ – любое.

Найдется $\nu = n_0$ такое, что при любых $\eta > 0$ $\varepsilon_1 > 0$ и $m \geqslant n \geqslant n_0$ будут иметь место неравенства

$$\left| \sum_{\nu=n}^{m} b_\nu \right| < \eta \quad \text{и} \quad \frac{Ax+By+\varepsilon}{|\lambda_n|} \leqslant \varepsilon_1.$$

Тогда из (8) с учетом равенства

$$\frac{1}{P_{k+1}} - \frac{1}{P_k} = \frac{1}{P_k} \cdot \frac{z}{\lambda_{k+1} - z}$$

получим

$$\left| \sum_{\nu=n}^{m} a_\nu \right| < \eta \cdot \Big[M \cdot \exp\{(Ax+By+\varepsilon) S_n\} + M_1 \sum_{k=n}^{m-1} \frac{\exp\{(Ax+By+\varepsilon) S_k\}}{|\lambda_k|} +$$

$$+ M \cdot \exp\{(Ax+By+\varepsilon) S_m\} \Big], \tag{9}$$

где M и M_1 — постоянные.

Положим $n = n_0$, тогда первое слагаемое в скобках постоянно, а второе будет оцениваться [1] величиной

$$\frac{e^{\varepsilon_1}}{Ax+By+\varepsilon} \cdot \exp\{(Ax+By+\varepsilon) S_m\}.$$

Таким образом, имеем

$$\left| \sum_{\nu=n_0}^{m} a_\nu \right| < \eta \cdot M_2 \cdot \exp\{(Ax+By+\varepsilon) S_m\}.$$

Отсюда следует, что

$$Ax+By \geqslant \varlimsup_{m\to\infty} \frac{\ln \left| \sum\limits_{\nu=0}^{m} a_\nu \right|}{S_m}, \tag{10}$$

то есть $Ax + By \geqslant S$, и, следовательно, точка $z = x + iy$ находится внутри или на границе полуплоскости (4).

Пусть теперь ряд (1) сходится в точке

$$z = x + iy \neq \lambda_\nu \qquad (\nu = 1,\ 2,\ \ldots),$$

для которой $Ax + By < -\varepsilon < 0$. В этом случае (в соответствии с теоремой 1) ряд $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ сходится.

Из неравенства (9) при $m \to \infty$ получим

$$\left| \sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu \right| < \eta \cdot \Big[M \cdot \exp\{(Ax+By+\varepsilon) S_n\} - \frac{M_1}{Ax+By+\varepsilon} \cdot \exp\{(Ax+By+\varepsilon) S_{n-2}\} \Big],$$

откуда

$$\left| \sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu \right| < \eta \cdot M_3 \cdot \exp\{(Ax+By+\varepsilon) S_n\},$$

и $Ax + By \geqslant \beta = S$.

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь случай, когда $A = B = 0$. Имеем

$$\tilde{M}_2 \cdot e^{-\varepsilon S_n} < |P_n(z)| < \tilde{M}_1 \cdot e^{\varepsilon S_n},$$

где $\varepsilon > 0$ — любое.

Пусть сначала ряд $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ сходится, и $\beta<0$. Из определения числа β имеем

$$\left|\sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu\right| < e^{(\beta+\varepsilon)\,S_n}.$$

Так как

$$|P_k-P_{k-1}|=|P_k|\cdot\left|\frac{z}{\lambda_k-z}\right|<M\cdot|z|\cdot\frac{e^{\varepsilon S_k}}{|\lambda_k|},$$

где M — постоянная, то при $|z|\leqslant R$ из (7) получим

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k P_k(z)\right| \leqslant M\cdot R\sum_{k=n+1}^{m}\frac{\exp\{(\beta+2\varepsilon)\,S_k\}}{|\lambda_k|}+$$

$$+\tilde{M}_1\exp\{(\beta+2\varepsilon)\,S_n\}+\tilde{M}_1\exp\{(\beta+2\varepsilon)\,S_m\}.$$

Взяв $\varepsilon>0$ такое, чтобы $\beta+2\varepsilon<0$, и воспользовавшись неравенством (3) для суммы $\sum\limits_{k=n+1}^{m}\frac{\exp\{(\beta+2\varepsilon)\,S_k\}}{|\lambda_k|}$ получим, что

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=n}^{m} a_k P_k(z)\right|=0.$$

Таким образом, ряд (1) будет сходиться при любом z.

Пусть теперь ряд $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ расходится и $\alpha>0$. Тогда, предположив, что ряд (1) сходится в какой-нибудь точке

$$z=x+iy\neq\lambda_\nu \qquad (\nu=1,\ 2,\ \ldots),$$

мы из неравенства (10) получим, что $\alpha\leqslant 0$. Следовательно, в этом случае ряд (1) расходится во всякой точке $z\neq\lambda_\nu$ $(\nu=1,\ 2,\ \ldots)$.

Заметим, что случай, когда ряд $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{|\lambda_\nu|}$ сходится, был рассмотрен ранее [3].

§ 2. Пусть теперь относительная угловая плотность последовательности $\{\lambda_\nu\}$ не существует.

Обозначим

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{S_n^{(k)}}{S_n}=\beta(\sigma_k),$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{S_n^{(k)}}{S_n}=\alpha(\sigma_k),$$

где

$$\sigma_k=[\psi_k,\ \psi_{k+1}),$$

а

$$S_n^{(k)}=S_n^{\psi_k,\ \psi_{k+1}}.$$

Имеются оценки [4]

$$\tilde{M}_2 \cdot \exp\left\{-\left[\sum_{k=1}^{q}(x\cos\varphi_2^{(k)}+y\sin\varphi_2^{(k)})\frac{S_n^{(k)}}{S_n}+\varepsilon\right]S_n\right\} \leqslant |P_n(z)| \leqslant$$

$$\leqslant \tilde{M}_1 \exp\left\{-\left[\sum_{k=1}^{q}(x\cos\varphi_1^{(k)}+y\sin\varphi_1^{(k)})\frac{S_n^{(k)}}{S_n}-\varepsilon\right]S_n\right\}, \qquad (11)$$

где $\tilde{M}_1$ и $\tilde{M}_2>0$ — константы, $\varepsilon>0$ — любое, $\varphi_1^{(k)}\in\bar{\sigma}_k$ — такое, что $x\cos\Theta+$ $+y\sin\Theta$ принимает наименьшее значение в этом интервале; а $\varphi_2^{(k)}\in\bar{\sigma}_k$ — такое, что $x\cos\Theta+y\sin\Theta$ принимает наибольшее для этого интервала значение; неравенства справедливы при любом разбиении плоскости на углы лучами $\psi_1, \ldots, \psi_q$, (q — любое).

Возьмем какой-нибудь луч $\arg z=\gamma$ $(0\leqslant\gamma<2\pi)$ и рассмотрим на этом луче точки $z=x+iy\neq\lambda_\nu$ $(\nu=1, 2, \ldots)$. Так как неравенства (11) справедливы при любом разбиении плоскости, то можно считать, что лучи $\gamma+$ $+\frac{\pi}{2}$ и $\gamma-\frac{\pi}{2}$ являются лучами разбиения.

Рассмотрим

$$\sum_{k=1}^{q}(x\cos\varphi_1^{(k)}+y\sin\varphi_1^{(k)})\frac{S_n^{(k)}}{S_n}=$$

$$=\sqrt{x^2+y^2}\cdot\left[\sum_{k=1}^{q}(\cos\gamma\cos\varphi_1^{(k)}+\sin\gamma\cdot\sin\varphi_1^{(k)})\frac{S_n^{(k)}}{S_n}\right]=$$

$$=\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sum_{k=1}^{q}\cos(\varphi_1^{(k)}-\gamma)\frac{S_n^{(k)}}{S_n}.$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{q}(x\cos\varphi_1^{(k)}+y\sin\varphi_1^{(k)})\frac{S_n^{(k)}}{S_n}\geqslant$$

$$\geqslant\sqrt{x^2+y^2}\cdot\{\Sigma_1'\cos(\varphi_1^{(k)}-\gamma)\,\alpha(\sigma_k)+\Sigma_1''(\cos\varphi_1^{(k)}-\gamma)\,\beta(\sigma_k)\},$$

где сумма Σ_1' распространена на те индексы, для которых $\cos(\varphi_1^{(k)}-\gamma)\geqslant 0$, а сумма Σ_1'' — на те индексы, для которых $\cos(\varphi_1^{(k)}-\gamma)<0$.

Положим

$$A_1(\gamma)=\int_{l_1}^{+}\cos(\psi-\gamma)\,\alpha(d\psi)=\sup\Sigma_1'\cos(\varphi_1^{(k)}-\gamma)\,\alpha(\sigma_k),\quad (A_1(\gamma)\geqslant 0),$$

$$B_1(\gamma)=\int_{l_1}^{+}\cos(\psi-\gamma)\,\beta(d\psi)=\sup\Sigma_1''\cos(\varphi_1^{(k)}-\gamma)\,\beta(\sigma_k),\quad (B_1(\gamma)\leqslant 0),$$

где верхняя грань берется по всевозможным разбиениям соответствующих полуплоскостей.

Аналогично

$$\sum_{k=1}^{q}(x\cos\varphi_2^{(k)}+y\sin\varphi_2^{(k)})\frac{S_n^{(k)}}{S_n}=\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sum_{k=1}^{q}\cos(\varphi_2^{(k)}-\gamma)\frac{S_n^{(k)}}{S_n}\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{x^2+y^2}\cdot\{\Sigma_2'\cos(\varphi_2^{(k)}-\gamma)\,\beta(\sigma_k)+\Sigma_2''\cos(\varphi_2^{(k)}-\gamma)\,\alpha(\sigma_k)\},$$

где сумма Σ_2' относится к тем k, для которых $\cos(\varphi_2^{(k)}-\gamma)\geqslant 0$, а сумма Σ_2'' — к тем k, для которых $\cos(\varphi_2^{(k)}-\gamma)<0$.

Положим

$$A_2(\gamma)=\overline{\int_{l_2}}\cos(\psi-\gamma)\,\beta(d\psi)=\inf\Sigma_2'\cos(\varphi_2^{(k)}-\gamma)\,\beta(\sigma_k),$$

$$B_2(\gamma)=\overline{\int_{l_2}}\cos(\psi-\gamma)\,\alpha(d\psi)=\inf\Sigma_2''\cos(\varphi_2^{(k)}-\gamma)\,\alpha(\sigma_k).$$

Итак, получаем следующие оценки:

$$\tilde{M}_2\cdot\exp\{-[\sqrt{x^2+y^2}\cdot C_2(\gamma)+\varepsilon_1]\,S_n\}\leqslant|P_n(z)|\leqslant$$
$$\leqslant\tilde{M}_1\cdot\exp\{-[\sqrt{x^2+y^2}\cdot C_1(\gamma)-\varepsilon_1]\,S_n\},\tag{12}$$

где

$$C_1(\gamma)=A_1(\gamma)+B_1(\gamma),\quad C_2(\gamma)=A_2(\gamma)+B_2(\gamma)\quad\left(C_2(\gamma)\geqslant C_1(\gamma)\right).$$

Рассмотрим ряды Дирихле

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\,e^{-\sqrt{x^2+y^2}\,C_1(\gamma)\,S_n},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\,e^{-\sqrt{x^2+y^2}\,C_2(\gamma)\,S_n}.$$

Из (12) и известных формул для абсциссы сходимости рядов Дирихле следует

Теорема 3. *Пусть*

$$h=\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{\ln\sum_{k=0}^{n}|a_k|}{S_n},\quad \text{если}\ \sum_{k=0}^{\infty}|a_k|=\infty,$$

и

$$h=\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{\ln\sum_{k=n}^{\infty}|a_k|}{S_n},\quad \text{если}\ \sum_{k=0}^{\infty}|a_k|<\infty.$$

Ряд (1) *сходится абсолютно в точках* $z=x+iy$ *луча* $\arg z=\gamma$, *определенных неравенствами*

$$\sqrt{x^2+y^2}>\frac{h}{C_1(\gamma)},\quad \text{если}\ C_1(\gamma)>0$$

и

$$\sqrt{x^2+y^2}<\frac{h}{C_1(\gamma)},\quad \text{если}\ C_1(\gamma)<0.$$

Ряд (1) *не сходится абсолютно в точках* $z=x+iy\neq\lambda_\nu$ $(\nu=1,\,2,\,\ldots)$ *луча* $\arg z=\gamma$, *для которых*

$$\sqrt{x^2+y^2}<\frac{h}{C_2(\gamma)},\quad \text{если}\ C_2(\gamma)>0,$$

и

$$\sqrt{x^2+y^2}>\frac{h}{C_2(\gamma)},\quad \text{если}\ C_2(\gamma)<0.$$

Заметим, что если $C_1(\gamma)=0$, $C_2(\gamma)>0$ и $h<0$, то ряд (1) сходится абсолютно во всех точках луча $\arg z=\gamma$.

В самом деле, в этом случае

$$|P_n(z)| < e^{\varepsilon_1 S_n} \qquad (\varepsilon_1 > 0 \text{ — любое}).$$

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| e^{-xS_n}$ сходится при всех $x > h$, а, значит, и при $x = \delta$, где $h < \delta < -\varepsilon_1$. Но

$$|a_n| e^{\varepsilon_1 S_n} < |a_n| e^{-\delta S_n}.$$

Тем самым утверждение доказано.

Аналогичными рассуждениями доказывается, что, если $C_2(\gamma) = 0$, $C_1(\gamma) < 0$ и $h > 0$, то ряд не будет сходиться абсолютно ни в одной точке $z = x + iy \neq \lambda_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ луча $\arg z = \gamma$.

З а м е ч а н и е о б о т н о с и т е л ь н о й у г л о в о й п л о т н о с т и. Если последовательность $\{\lambda_\nu\}$ имеет угловую плотность, не равную тождественно нулю, то существует и относительная угловая плотность этой последовательности.

В самом деле, пусть

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{\nu}{|\lambda_\nu|} = D. \tag{13}$$

Рассмотрим подпоследовательность $\{\lambda_{\nu_k}\}$ последовательности $\{\lambda_\nu\}$ такую, чтобы

$$\vartheta_1 \leqslant \arg \lambda_{\nu_k} < \vartheta_2,$$

где ϑ_1 и ϑ_2 не принадлежат некоторому исключительному счетному множеству.

Из существования угловой плотности для последовательности $\{\lambda_{\nu_k}\}$ следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k}{|\lambda_{\nu_k}|} = D_1. \tag{14}$$

Будем сначала считать, что $D_1 > 0$.

Из равенств (13) и (14) имеем, что для всех $\nu \geqslant \nu_0(\varepsilon)$ и $k \geqslant k_0(\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0$ — любое)

$$(D-\varepsilon)\frac{1}{\nu} \leqslant \frac{1}{|\lambda_\nu|} \leqslant (D+\varepsilon)\frac{1}{\nu}, \tag{15}$$

$$(D_1-\varepsilon)\frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{|\lambda_{\nu_k}|} \leqslant (D_1+\varepsilon)\frac{1}{k}. \tag{16}$$

Просуммировав неравенства (15) и (16) соответственно по $\nu\,(\nu_0 \leqslant \nu \leqslant p)$ и $k\,(k_0 \leqslant k \leqslant t)$, где p — число точек λ_ν, а t — число точек λ_{ν_k} в круге $|z| \leqslant R$,

$$\lim_{R\to\infty} \frac{t}{p} = \frac{D_1}{D} = L, \tag{17}$$

и пользуясь известными оценками частных сумм гармонического ряда, получим

$$M_2 + (D-\varepsilon)\ln p \leqslant \sum_{\nu=1}^{p} \frac{1}{|\lambda_\nu|} \leqslant (D+\varepsilon)\ln p + M_1,$$

$$N_2 + (D_1-\varepsilon)\ln t \leqslant \sum_{k=1}^{t} \frac{1}{|\lambda_{\nu_k}|} \leqslant (D_1+\varepsilon)\ln t + N_1,$$

где M_1, M_2, N_1, N_2 — постоянные.

Обозначив

$$S(R)=\sum_{\nu=1}^{p}\frac{1}{|\lambda_\nu|} \quad \text{и} \quad S(R)^{\vartheta_1,\,\vartheta_2}=\sum_{k=1}^{t}\frac{1}{|\lambda_{\nu_k}|},$$

имеем

$$\frac{(D_1-\varepsilon)\ln t+N_2}{(D+\varepsilon)\ln p+M_1}\leqslant\frac{S(R)^{\vartheta_1,\,\vartheta_2}}{S(R)}\leqslant\frac{(D_1+\varepsilon)\ln t+N_1}{(D-\varepsilon)\ln p+M_2}.$$

Из соотношения (17) следует, что

$$\lim_{R\to\infty}\frac{\ln t}{\ln p}=1,$$

и поэтому существует относительная угловая плотность последовательности $\{\lambda_\nu\}$, равная

$$\lim_{R\to\infty}\frac{S(R)^{\vartheta_1,\,\vartheta_2}}{S(R)}=\frac{D_1}{D}.$$

Если же $D_1=0$, то нетрудно видеть, что

$$S(R)^{\vartheta_1,\,\vartheta_2}<\varepsilon\ln p+N_3,$$
$$S(R)>(D-\varepsilon_1)\ln p+M_3,$$

где $\varepsilon>0$, $\varepsilon_1>0$ — произвольные, а N_3, M_3 — некоторые константы.

Следовательно,

$$\lim_{R\to\infty}\frac{S(R)^{\vartheta_1,\,\vartheta_2}}{S(R)}=0.$$

Пусть теперь последовательность $\{\lambda_\nu\}$ такова, что $D=0$ (следовательно, также и $D_1=0$), а

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{|\lambda_\nu|}=\infty.$$

Построим пример, показывающий, что в этом случае относительная угловая плотность последовательности $\{\lambda_\nu\}$ может и не существовать.

Пусть числа последовательности $\{\lambda_\nu\}$ будут расположены на двух лучах $\arg z=0$ и $\arg z=\vartheta\neq 0$ указанным ниже способом, а $|\lambda_\nu|=(\nu+1)\ln(\nu+1)$.

Очевидно, что

$$D=\lim_{\nu\to\infty}\frac{\nu}{(\nu+1)\ln(\nu+1)}=0, \quad \text{и} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{|\lambda_\nu|}=\infty.$$

Пусть на луче $\arg z=0$ будут расположены те λ_ν, для которых $p_{2k}+1\leqslant\nu\leqslant p_{2k+1}$, а на луче $\arg z=\vartheta$ те λ_ν, для которых $p_{2k+1}+1\leqslant\nu\leqslant p_{2k+2}$, $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$, причем $p_0=0$, а остальные $p_m\,(m=1,\ 2,\ \ldots)$ определяются неравенствами

$$\sum_{\nu=p_m+1}^{p_{m+1}-1}\frac{1}{|\lambda_\nu|}<2^{m+1}, \quad \text{но} \quad \sum_{\nu=p_m+1}^{p_{m+1}}\frac{1}{|\lambda_\nu|}>2^{m+1}.$$

Если обозначить $S_n^{(0)}=\sum\limits_{\nu\leqslant n}\frac{1}{|\lambda_\nu|}$, где суммирование распространено на те λ_ν, для которых $\arg\lambda_\nu=0$, то, очевидно, что отношение $\frac{S_n^{(0)}}{S_n}$ сколь угодно близко к $\frac{2}{3}$, если $n=p_{2k+1}$, и к $\frac{1}{3}$, если $n=p_{2k}$, а k — достаточно велико.

Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n^{\vartheta_1, \vartheta_2}}{S_n}$ не существует при любых ϑ_1, ϑ_2, для которых $\vartheta_1 \leqslant 0 < \vartheta_2$ и ϑ не принадлежит интервалу $(\vartheta_1, \vartheta_2)$.

Следует заметить, что относительная угловая плотность может существовать и тогда, когда последовательность $\{\lambda_\nu\}$ не имеет угловой плотности.

В частности, если вся последовательность $\{\lambda_\nu\}$ расположена на одном луче, то относительная угловая плотность всегда существует.

Московский институт
химического машиностроения

Поступило в редакцию
27.XII.1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Y. Martin, Sur les séries d'interpolation (Thèse), Ann. Ec. Norm. Sup, t 66, 1949.
2. V. Bernstein, Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet, On démontre quelques théorèmes sur la distribution des points singuliers de le Paris, 1933.
3. А. О. Гельфонд, Исчисление конечных разностей, Москва, 1959.
4. Н. С. Насековская, Абсолютная сходимость интерполяционного ряда, Лит. мат. сб., VII, №, 2, 297—304 (1967).

INTERPOLIACINIŲ EILUČIŲ KONVERGENCIJA

N. NASEKOVSKAJA

(Reziumė)

Darbe nagrinėjama eilutė

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n(z),$$

kur

$$P_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right)$$

ir $\{\lambda_n\}(|\lambda_n| \uparrow \infty)$ yra kompleksinių skaičių seka. Atveju, kai seka $\{\lambda_n\}$ turi sąlyginį kampinį tankumą, nustatoma minėtos eilutės konvergencijos pusplokštumė. Bendru atveju įvedamos viršutinio ir apatinio kampinio tankumo sąvokos ir nustatomos dvi sritys: vienoje jų eilutė konverguoja absoliučiai, kitoje eilutė absoliučiai ne konverguoja.

SUR LA CONVERGENCE DES SÉRIES D'INTERPOLATION

N. NASEKOVSKAJA

(Resume)

On considère la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n(z),$$

où

$$P_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right).$$

Dans le cas où la suite des nombres complexes $\{\lambda_n\}$ $(|\lambda_n| \uparrow \infty)$ possède une densité angulaire relative, on trouve le demi-plan de la convergence simple de cette série. Dans le cas général on introduit des notions de densité angulaire relative supérieure et de densite angulaire relative inférieure. A l'aide de ces notions on trouve un domaine, où la serie converge absolument et une autre domaine, où la convergence absolue n'a pas lieu.