LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VII Nr. 3, 1968
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VII № 3, 1968

НЕСТАБИЛЬНАЯ ПОЛУГРУППА МИКРОПУЧКОВ

А. И. МАТУЗЯВИЧЮС

Содержание

Введение

Настоящая работа посвящена изучению абелевой полугруппы, элементами которой являются изоморфные классы микропучков, а операция – уитниевская сумма.

Понятие микропучка впервые ввел Милнор на Стокгольмском конгрессе [1] и потом подробно изложил в работе [2].

Результаты § 1 § 2 не претендуют на новизну и лишь в удобной для нас форме излагаются хорошо известные вещи. Некоторые идеи § 3 и § 4 принадлежит Милнору, Вильямсону и др.

В § 1 дается основное для всей работы понятие микропучка и приводятся примеры.

В § 2 вводятся понятия отображения микропучков и индуцированного микропучка. Здесь формулируются некоторые предложения, касающиеся этих понятий.

В § 3 определяются и изучаются операции с микропучками: сумма и тензорное произведение микропучков, имеющих одну и ту же базу; а также определяется композиция микропучков. Определения и результаты этого § используются в дальнейшем.

§ 4 строются отображение ростков и корневые микропучки для доказательства соответственно теоремы гомотопии и теоремы о существовании обратного элемента. Понятия этого § могут быть применены и для других целей.

В § 5, заключительном, содержатся результаты, касающиеся полугруппы микропучков и их классификации.

По вопросу о применении этих результатов автор предполагает написать в ближайшем будущем отдельную статью.

§ 1. Понятие микропучка

1. Определение микропучка. Каждый микропучок представляет собой некоторую четверку (E, B, i, j), где i и j — непрерывные отображения составляют коммутативную диаграмму,

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dr, "j"] & \\ B \arrow[ur, "i"] \arrow[rr, "\text{тожд.}"] & & B \end{tikzcd}$$

то есть, композиция

$$B \xrightarrow{i} E \xrightarrow{j} B$$

удовлетворяет условию $ji(b)=b$ для любой точки $b \in B$; E и B — топологические пространства. Еще требуется, чтобы эта четверка (E, B, i, j) удовлетворяла условию локальной тривиальности; более подробно это означает, что для любых точек $b \in B$, $i(b) \in E$ существуют соответственно окрестности $U \subset B$, $V \subset E$, удовлетворяющие следующим требованиям:

1) $i(U) \subset V$, $j(V) \subset U$,

2) для V существует гомеоморфное отображение h на прямое произведение $U \times R^n$, которое включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dr, "j_{|V}"] \arrow[dd, leftrightarrow, "h"] & \\ U \arrow[ur, "i_{|U}"] \arrow[dr, "q"'] & & U \\ & U \times R^n \arrow[ur, "p"'] & \end{tikzcd}$$

Здесь R^n — n-мерное векторное пространство, а отображения q и p определяются формулами $q(u)=(u, 0)$, $p(u, r)=u$ для любых $u \in U$, $r \in R^n$.

Мы будем обозначать такие четверки латинскими буквами, например, $x=(E, B, i, j)$ и будем называть B — базисным пространством, E — пространством микропучка или тотальным пространством, i — инъекцией, j — проекцией, а число n — размерностью слоя $j^{-1}(b)$; оно так же определяет размерность микропучка и будем иногда обозначаться верхним индексом (например, x^n).

Для микропучка $x=(E,\ B,\ i,\ j)$ определим уменьшенный микропучок $x'=(E',\ B,\ i,\ j_{|E'})$, тотальное пространство E' которого является окрестностью образа $i(B)$ в пространстве E.

2. Примеры микропучков. Стандартным тривиальным микропучком будем называть четверку $(B\times R^n,\ B,\ i,\ j)$, где естественные отображения i и j составляют диаграмму

$$B \xrightarrow{\ i\ } B\times R^n \xrightarrow{\ j\ } B$$

и определяются формулами $i(b)=(b,\ 0)$, $j(b,\ r)=b$ для любых $b\in B$, $r\in R^n$. Его мы будем обозначать e^n.

Пусть $\xi=(E,\ B,\ p)$ — векторный n-пучок [3] $\Big($т. е. косое произведение со слоем R^n, структурной группой которого является общая линейная группа $GL(n,\ R^n)\Big)$. Главным микропучком будем называть четверку $(E,\ B,\ c,\ p)$, где $c: B\to E$ — нулевая секущая поверхность, отображающая каждый $b\in B$ в нулевой вектор векторного пространства $R^n_b=p^{-1}(b)$. Этот микропучок будем обозначать $[\xi]$.

Касательным (тангенциальным) микропучком будем называть четверку $(M\times M,\ M,\ \Delta,\ p)$. Здесь M — топологическое многообразие; $\Delta: M\to M\times M$ — диагональное отображение определим формулой $\Delta(m)=(m,\ m)$, где $m\in M$, и проекцию $p: M\times M\to M$ — формулой $p(m,\ m)=m$. Обозначим этот микропучок t_M.

§ 2. Общее описание микропучков

1. Отображение микропучков. Отображение микропучков $f: x'\to x$, где $x'=(E',\ B',\ i',\ j')$, $x=(E,\ B,\ i,\ j)$ — некоторые микропучки, есть такая пара отображений $(f_{E'},\ f_{B'})$, что

а) диаграмма

$$\begin{tikzcd}
B' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "f_{B'}"'] & E' \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "f_{E'}"'] & B' \arrow[d, "f_{B'}"'] \\
B \arrow[r, "i"] & E \arrow[r, "j"] & B
\end{tikzcd}$$

коммутативная,

б) $f_{E'|j'^{-1}(b')}$ есть линейное невырожденное отображение, для всех $b'\in B'$.

Если базы совпадают $(B=B')$, получаем частный случай.

Ясно, что имеет место

Предложение 2. 1. Композиция двух или несколько отображений микропучков является отображением.

Пусть $x_1=(E_1,\ B,\ i_1,\ j_1)$ и $x_2=(E_2,\ B,\ i_2,\ j_2)$ — два микропучка с одной и той же базой. Тогда два микропучка x_1 и x_2 называются *изоморфными*, если существует микропучок $x_3=(E_3, B, i_3, j_3)$, который с микропучками x_1 и x_2 составляет коммутативную диаграмму,

$$\begin{tikzcd}
& E_1 \arrow[dr, "j_1"] & \\
B \arrow[ur, "i_1"] \arrow[r, "i_3"] \arrow[dr, "i_2"'] & E_3 \arrow[u, leftrightarrow, "h_1"'] \arrow[r, "j_3"] \arrow[d, leftrightarrow, "h_2"] & B \\
& E_2 \arrow[ur, "j_2"'] &
\end{tikzcd}$$

где $h_\alpha(\alpha=1, 2)$ — гомеоморфное отображение E_3 на некоторую окрестность $V_\alpha \subset E_\alpha$ образа $i_\alpha(B)$.

Изоморфизм дает отношение эквивалентности; используя его, введем следующее определение.

Микропучек называется *тривиальным*, если он изоморфный стандартному тривиальному микропучку.

Используя это понятие, введем еще одно определение.

Топологическое многообразие M называется *параллелизуемым*, если его касательный микропучок t_M тривиальный.

2. Индуцированный микропучек. По данному микропучку $x=(E, B, i, j)$ и отображению $f_{B'}: B' \to B$ построим другой микропучек $x'=(E', B', i', j')$ и отображение микропучков $f=(f_{E'}, f_{B'})$. Пусть E' — подмножество прямого произведения $B' \times E$, состоящее из всех таких пар (b', e), $b' \in B$, $e \in E$, что $f_{B'}(b')=j(e)$. Определим инъекцию $B' \xrightarrow{i'} E'$ и проекцию $E' \xrightarrow{j'} B'$, соответственно, соотношениями

$$i'(b')=\left(b', i f_{B'}(b')\right), \quad j'(b', e)=b'.$$

Полученный микропучок x' будем называть *индуцированным микропучком*. Он с микропучком x составляет коммутативную диаграмму,

$$\begin{tikzcd}
B' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "f_{B'}"'] & E' \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "f_{E'}"'] & B' \arrow[d, "f_{B'}"] \\
B \arrow[r, "i"] & E \arrow[r, "j"] & B
\end{tikzcd}$$

где $f_{E'}$ определяется формулой $f_{E'}(b', e)=e$. Таким образом, получаем отображение $f=(f_{E'}, f_{B'})$ микропучков $x' \to x$. Индуцированный микропучок обозначим $f^* x$, т. е. микропучку x над B однозначно соответствует микропучок $f^* x$ над B'.

Имеет место следующее

Предложение 2.2. Микропучок x и отображения $f_{B'}: B' \to B$ и $g_{B''}: B'' \to B'$ индуцируют изоморфные микропучки $g^* f^* x$ и $(fg)^* x$.

Ясно, что это имеет место, так как тотальные пространства индуцированных микропучков состоят из троек $\left(b'', g_{B''}(b''), e\right)$, где $b'' \in B''$, $e \in E$.

Пусть микропучок x над B и подпространство $A \subset B$. Определим *часть микропучка* x над A диаграммой

$$A \xrightarrow{i_{|A}} j^{-1}(A) \xrightarrow{j_{|j^{-1}(A)}} A$$

и обозначим ее $x_{|A}$.

Тогда легко получаем

Предложение 2.3. Если $f: B' \to B$ — отображение вложения, тогда имеет место изоморфизм $x_{|B'} \cong f^* x$.

В самом деле, тотальные пространства $j^{-1}(B')$ и $E' \subset B' \times E$ соответственно микропучков $x_{|B'}$ и $f^* x$ гомеоморфны, так как $j^{-1}(B')$ состоит из таких $e \in E$, для которых $j(e) = b'$, $b' \in B'$; а E' — из таких пар (b', e), которые удовлетворяют то же самое соответствие. Очевидно, что инъекции и проекции этих микропучков согласованны с гомеорфизмом.

3. Цилиндр отображения. В начале дадим определение конуса над пространством A. Конусом назовем множество $A \times \mathrm{I}_{/A \times 0}$ и обозначим CA.

Для любого (непрерывного) отображения $f: A \to B$ построим из топологической суммы пространств $CA \cup B$ с помощью отождествления каждой точки $(a, 1) \in CA$, $a \in A$ с точкой $f(a)$ некоторое пространство C_f, называемое *цилиндром отображения* f (см. рис. 1).

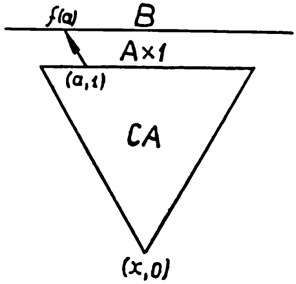


Рис. 1

Естественная проекция $p: (A \times I) \cup B \to C_f$, отображает гомеоморфно пространство B на некоторое замкнутое подпространство $p(B)$ пространства C_f. Поэтому мы можем рассматривать пространство B как замкнутое подпространство пространства C_f. С другой стороны, отображение $g: A \to C_f$, определенное формулой $g(a) = p(a, 0)$, $a \in A$, отображает гомеоморфно пространство A на замкнутое подпространство $p(A \times 0)$ пространства C_f. Таким образом, пространство A также вкладывается в пространство C_f в качестве его замкнутого подпространства. Пространства A и B, рассматриваемые указанным способом как замкнутые (очевидно, непересекающиеся) подпространства пространства C_f мы будем называть соответственно *нижним* и *верхним* основанием цилиндра C_f.

Если предположим, что A и B паракомпактны, то имеет место

Предложение 2.4. Микропучок x над B продолжается до микропучка над C_f тогда и только тогда, когда индуцированный микропучок $f^* x$ тривиален.

Доказательство. Так как композиция $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{p} C_f$ является гомотопным отображением постоянному отображению, то из продолжения микропучка x над C_f следует, что $f^* x$ — тривиальный.

Обратно, ввиду того, что B является ретрактом пространства $B \underset{f}{\cup} (A \times I)$

(где любая пара $(a, 1) \in A \times I$ отождествляется с $f(a) \in B$), то x можно продолжить до некоторого микропучка x_1 над $B \underset{f}{\cup} (A \times I)$. Из того, что и f^*x тривиальный, следует, что и $x_{1/A \times 0}$ тривиален. Отсюда, очевидно, получаем, что и $x_{1/A \times \left[0, \frac{1}{2}\right]}$ тривиален. Тогда некоторое подмножество тотального пространства микропучка $x_{1/A \times \left[0, \frac{1}{2}\right]}$ отображается гомеоморфно на $A \times \left[0, \frac{1}{2}\right] \times R^n$.

Пространство C_f получается из $B \underset{f}{\cup} (A \times I)$ стягиванием $A \times 0$ в точку после чего тотальное пространство микропучка $x_{1/A \times \left[0, \frac{1}{2}\right]}$ перейдет в тотальное пространство искомого микропучка над базой C_f.

§ 3. Операции над микропучками

1. Уитниевская сумма микропучков. Пусть $x_1 = (E_1, B, i_1, j_1)$, и $x_2 = (E_2, B, i_2, j_2)$ — два микропучка с одной и той же базой B. *Уитниевской суммой* этих микропучков называется микропучок (E, B, i, j_1), который обозначим $x_1 + x_2$*). Здесь пространство E представляет собой подмножество произведения $E_1 \times E_2$, состоящее из пар (e_1, e_2) удовлетворяющих условию $j_1(e_1) = j_2(e_2)$, инъекция i и проекция j определяется соответственно формулами $i(b) = \left(i_1(b), i_2(b)\right)$ и $j(e_1, e_2) = j_1(e_1) = j_2(e_2)$. Локальная тривиальность легко проверяется.

Уитниевскую сумму можно определить и иным способом. Пусть $x = (E, B, i, j)$ и $x' = (E', B', i', j')$ — два микропучка с базами B и B'. Тогда определяется прямое произведение этих микропучков

$$x \times x' = (E \times E', B \times B', i \times i', j \times j').$$

Если $B = B'$, то определено диагональное вложение $\Delta : B \to B \times B$, где $\Delta(b) = (b, b)$. Это отображение Δ и прямое произведение $x \times x'$ индуцируют микропучок $\Delta^*(x \times x')$. Легко видеть, что микропучек $\Delta^*(x \times x')$ изоморфный определенной выше уитниевской сумме $x + x'$.

2. Композиция микропучков. Пусть $x = (E, B, i, j)$ и $y = (\tilde{E}, E, \tilde{i}, \tilde{j})$ — два микропучка, причем базой второго микропучка, служит тотальное пространство E первого. Определим композицию этих микропучков

$$y \circ x = (\tilde{E}, B, \tilde{i} \circ i, j \circ \tilde{j}).$$

Ясно, что $y \circ x$ является микропучком. Эти микропучки составляют коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\tilde{i}\circ i"'] & E \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\tilde{i}"] & B \\
& \tilde{E} \arrow[ur, "j\circ\tilde{j}"] \arrow[d, "\tilde{j}"] & \\
& E \arrow[uur, "j"'] &
\end{tikzcd}$$

*) По техническим причинам мы отказываемся от стандартного обозначения

Покажем, что для любых таких микропучков имеет место

Предложение 3.1. Уитниевская сумма x_1+x_2 микропучков $x_1=(E_1,\ B,\ i_1,\ j_1)$ и $x_2=(E_2,\ B,\ i_2,\ j_2)$ является композицией $x'\circ x_1$ микропучков x_1 и $x'=(E',\ E_1,\ i',\ j')$, где x' — микропучок, индуцированный проекцией j_1 и микропучком x_2, то есть имеет место соотношение

$$x'\circ x_1=x_1+x_2.$$

Доказательство. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "i_1"'] \arrow[dr, "i"] & E_2 \arrow[r, "j_2"] \arrow[d, "i''"] & B \arrow[d, "i_1"] \arrow[dl] \\
E_1 \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "j_1"'] & E \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "j''"] \arrow[dl] \arrow[dr, "j"] & E_1 \arrow[d, "j_1"] \\
B \arrow[r, "i_2"'] & E_2 \arrow[r, "j_2"'] & B
\end{tikzcd}$$

Из определения композиции и уитниевской суммы микропучков имеем

$$x'\circ x_1=(E',\ B,\ i'\circ i_1,\ j_1\circ j'),$$

$$x_1+x_1=(E',\ B,\ i,\ j).$$

Инъекции и проекции этих микропучков также совпадают. Действительно,

$$i'\circ i_1(b)=\big(i_1(b),\ i_2 j_1 i_1(b)\big)=\big(i_1(b),\ i_2(b)\big)=i(b),$$

$$j_1\circ j'(e_1,\ e_2)=j_1(e_1)=j(e_1,\ e_2).$$

Предложение 3.2. Имеет место соотношение

$$x'\circ x_1=x''\circ x_2,$$

где x'' — микропучок индуцированный проекцией j_2 и микропучком x_1.

Для доказательства предложения достаточно показать, что инъекции и проекции микропучков $x'\circ x_1$ и

$$x''\circ x_2=(E',\ B,\ i''\circ i_2,\ j_2\circ j'')$$

совпадают.

В самом деле,

$$i'\circ i_1(b)=\big(i_1(b),\ i_2 j_1 i_1(b)\big)=\big(i_2(b),\ i_1 j_2 i_2(b)\big)=$$

$$=i''\circ i_2(b),\ j_2\circ j'(e_1,\ e_2)=j_1(e_1)=j_2(e_2)=j_2\circ j''(e_1,\ e_2).$$

Сравнивая предложения 3.1 и 3.2, получаем

Следствие 3.3. Уитниевская сумма коммутативная, т. е.

$$x_1+x_2=x_2+x_1.$$

Нетрудно видеть, что уитниевская сумма также и ассоциативна.

3. Тензорное произведение микропучков. Пусть как и выше два микропучка x_1 и x_2 с общей базой B. Тогда над $B \times B$ возникает микропучок $\overline{x_1 \times x_2}$, слоем которого является тензорное произведение слоев. Полагаем

$$x_1 \times x_2 = \Delta^* (\overline{x_1 \times x_2})$$

и получаем тензорное произведение микропучков с той же базой B.

Используя канонические изоморфизмы ([5], гл. III) для трех микропучков x_1, x_2 и x_3, над одной базой можно доказать следующие изоморфизмы:

$$(x_1 \times x_2) \times x_3 \cong x_1 \times (x_2 \times x_3),$$

$$x_1 \times x_2 \cong x_2 \times x_1,$$

$$(x_1 + x_2) \times x_3 \cong (x_1 \times x_3) + (x_2 \times x_3).$$

§ 4. Отображение ростков над микропучками

1. Отображение ростков. Пусть имеем две пары топологических пространств (X, A) и (Y, B), где $A \subset X$ и $B \subset Y$. Обозначим U_f такую окрестность подпространства A в X, что отображение f переводит пару (U_f, A) в пару (Y, B). Два такие отображения f и f' назовем *эквивалентными*, если и только если существует достаточно малая окрестность V подпространства A в X, что $f_{|V} = f'_{|V}$.

Для двух пар (X, A) и (Y, B) *отображением ростков* называется эквивалентный класс таких отображений $\{f\} = F$, его в дальнейшем будем обозначать

$$F : (X, A) \Longrightarrow (Y, B).$$

Отображение ростков F называется *гомеоморфизмом ростков*, если существует такое отображение ростков

$$G : (Y, B \Longrightarrow (X, A),$$

что композиция GF

$$(X, A) \overset{F}{\Longrightarrow} \overline{(Y, B)} \overset{G}{\Longrightarrow} (X, A)$$

будет тождественным отображением пары (X, A). Ясно, что F будет гомеоморфизмом ростков тогда и только тогда, когда представитель $f \in F$ отображает гомеоморфно окрестность подпространства A в X на некоторую окрестность подпространства B в Y.

Пусть имеем микропучек $x = (E, B, i, j)$. Проекция $j : E \to B$ микропучка x определяет отображение ростков $(E, iB) \Longrightarrow (B, B)$, которое обозначим J и назовем *проекцией ростков* микропучка x. В дальнейшем для более короткой записи введем следующие сокращения: пару (B, B) обозначим B и B — отождествим с образом iB. Тогда получим $J : (E, B) \Longrightarrow B$.

Пусть x' — второй микропучек над B, проекцию ростков которого обозначим $J' : (E', B) \Longrightarrow B$.

Для двух микропучков x и x' *изоморфизмом ростков* называется гомеоморфизм ростков

$$F : (E, B) \Longrightarrow (E', B),$$

который сохраняет слой, т. е. $J'F = J$.

Нетрудно видеть, что существует изоморфизм ростков двух микропучков x и x' тогда и только тогда, когда эти микропучки изоморфны в ранее определенном смысле.

Теперь отображение ростков обобщим для микропучков x и x' с различными базами соответственно B и B', но, как и раньше, слои имеют одинаковую размерность.

Отображением ростков для x и x' будем называть такое $F:(E,B)\Longrightarrow(E', B')$, для которого существует окрестность V базы B в U_f такая, что отображение $f\in F$ переводит каждый слой $j^{-1}(b)\cap V$ только одним способом в некоторый слой $j'^{-1}(b')$. Это коротко обозначим $F: x\Longrightarrow x'$.

Получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
(E,B) \arrow[r, Rightarrow, "F"] \arrow[d, Rightarrow, "J"'] & (E',B') \arrow[d, Rightarrow, "J'"] \\
B \arrow[r, "F_{/B}"] & B
\end{tikzcd}$$

Таким образом, отображение $F_{/B}$ накрывается отображением ростков $F: x\Longrightarrow x'$.

2. Теорема гомотопии. В начале сформулируем леммы 4.1, 4.5 и 4.6, которые нам будут нужны в дальнейшем. Мы укажем здесь только идеи доказательств, а подробные доказательства содержатся в работе [3].

Лемма 4.1. *Пусть $F: x\Longrightarrow x'$ — отображение ростков для микропучков x и x' с одинаковым базисом накрывает тождественное отображение $B\to B$, тогда F — является изоморфизмом ростков.*

Нетрудно видеть, что можно выбрать достаточно малую окрестность V для $f\in F$, чтобы f сохраняло слои. Тогда для $i(b)$ существует окрестность V'_b в V такая, что f гомеоморфно отображает ее на открытое множество $f(V'_b)\subset E'$. Пусть $V'=\cup V'_b$ — объединение этих окрестностей. Итак, получаем, что f отображает гомеоморфно V' на $f(V')$. Это и доказывает лемму.

Следствие 4.2. Микропучки, индуцированные изоморфными микропучками, изоморфны.

Следствие 4.3. Если отображение $g: B\to B$ накрывается отображением ростков $x\Longrightarrow x'$, то x изоморфный индуцированному микропучку g^*x.

Пусть микропучки $x=(E, B, i, j)$ и $x'=(E', B', i', j')$ связаны отображением $g'=(g_E, g_B)$. Тогда отображение микропучков $g': x\to x'$ определяет отображение ростков $x\Longrightarrow x'$. Таким образом, из следствия 4.3 следует

Следствие 4.4. Микропучек x изоморфный индуцированному микропучку $g_B^* x'$.

Лемма 4.5. *Пусть x микропучек над B и $\{B_\alpha\}$ локально конечная система подмножеств множеств, покрывающих B. Если $F_\alpha: x_{/B_\alpha}\Longrightarrow y$ такое отображение ростков, что $F_{\alpha/B_\alpha\cap B_\beta}=F_{\beta/B_\alpha\cap B_\beta}$ для любых α и β, тогда существует отображение ростков $F: x\Longrightarrow y$, которое является продолжением F_α.*

Предположим, что $f_{\alpha/V_{\alpha\beta}}=f_{\beta/V_{\alpha\beta}}$, где $f_\alpha\in F_\alpha$, $f_\beta\in F_\beta$, а $V_{\alpha\beta}$ — окрестность $B_\alpha\cap B_\beta$ в $V_\alpha\cap V_\beta$. Пусть множество V состоит из таких $e\in E$, что для любых α, β имеем: 1) если $j(e)\in B_\alpha$, тогда $e\in V_\alpha$, 2) если $j(e)\in B_\alpha\cap B_\beta$, тогда $e\in V_{\alpha\beta}$. Ясно, что все такие отображения f_α определяют отображение $f: U\to E'$, которое является представителем отображения ростков $F: x\Longrightarrow y$.

Лемма 4.6. *Пусть x микропучек над $B\times I$, где B паракомпактное пространство, тогда естественное отображение $r: B\times I\to B\times 1$ накрывается отображением ростков $x\Longrightarrow x_{/B\times 1}$.*

Доказательство нетрудно получить, используя лемму 4.5.

Из следствия 4.4 и леммы 4.6 немедленно вытекает

Следствие 4.7. Любой микропучок x над $B\times I$ изоморфный индуцированному микропучку $r^*x_{/B\times 1}$.

Теперь нетрудно получить важную теорему гомотопии.

Теорема 4.8. *Пусть x — микропучок над B, B' — некоторое паракомпактное пространство, а f_0 и f_1 — гомотопные между собой отображения пространства B' в пространство B. Тогда индуцированные микропучки f_0^*x и f_1^*x изоморфны.*

Действительно, непрерывная гомотопия $f_t(0\leqslant t\leqslant 1)$, связывающая отображения f_0 и f_1, определяет отображение $\varphi: B'\times I\to B$ формулой $\varphi(x,\ t)=f_t(x)$. Это отображение индуцирует микропучок φ^*x над $B'\times I$. Согласно лемме 4.6 существует отображение ростков $\varphi^*x\Longrightarrow\varphi^*x_{/B'\times 1}$, которое накрывает естественное отображение $B'\times I\xrightarrow{r}B'\times 1$. Но тогда, с одной стороны, $\varphi^*x_{/B'\times 1}\cong f_1^*x$, а с другой стороны, $\varphi^*x_{/B'\times 0}\cong f_0^*x$. Таким образом, получаем изоморфизм ростков $f_0^*x\Longrightarrow f_1^*x$. Теорема доказана.

Следствие 4.9. Если B — паракомпактное и стягиваемо по себе в точку пространство, то любой микропучок над B тривиален.

Тождественное отображение пространства B на себя индуцирует микропучок изоморфный данному, а постоянное отображение индуцирует тривиальный микропучок. Поэтому утверждение следует из теоремы 4.8.

3. Микроподпучки и фактормикропучки. Пусть $x=(E, B, i, j)$ — микропучек. Возьмем подпространство $\bar{E}\subset E$, для которого x индуцирует структуру микропучка, тогда $(\bar{E},\ B,\ i,\ j_{/\bar{E}})$ назовем микроподпучком и обозначим $x_{/\bar{E}}$.

Для микропучка x и микроподпучка $x_{/\bar{E}}$ соответственно имеем проекции ростков $J:(E,\ B)\Longrightarrow B$ и $J':(\bar{E},\ B)\Longrightarrow B$. Тогда, очевидно, отображение вложения $(\bar{E},\ B)\to(E,\ B)$ определяет отображение ростков $(\bar{E},\ B)\xRightarrow{F}(E,\ B)$, которое накрывает отображение вложения $B\xrightarrow{F/B}B$. Следовательно, согласно следствию 4.3, микропучок $x_{/\bar{E}}$ изоморфный индуцированному микропучку вышеуказанным вложением.

Пусть имеем другой микропучок $x'=(E',\ B,\ i',\ j')$. Отображение микропучков $f: x'\to x$ называется *мономорфизмом* (соответственно *эпиморфизмом*), если отображение ростков $(E',\ B)\xRightarrow{F}(E,\ B)$ взаимно однозначное (соответственно отображает на E, т. е. представитель $f\in F$ отображает U_f окрестность $i'B$ в E' на пространство E).

Лемма 4.10. Если $f\colon x'\to x$ мономорфизм, тогда микропучок $\left(f(E'),\ B,\ i,\ j_{|f(E')}\right)$ изоморфный микропучку x'.

Доказательство. По определению микропучка для окрестностей $U\subset B$ и $V\subset E$ имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & V \arrow[dr, "\dot{j}_{|V}"] \arrow[d, leftrightarrow, "h"] & \\
U \arrow[ur, "\dot{i}_U"] \arrow[dr] & U\times R \arrow[r] & U
\end{tikzcd}$$

Отображение f слой микропучка x' отображает на часть слоя микропучка x. Дополнение к образу для стандартного слоя обозначим R'. Получаем произведение $U\times R'\subset U\times R$, которое гомеоморфное окрестности $V'\subset V$. Такие окрестности составляют коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & V' \arrow[dr, "\dot{j}_{|V'}"] \arrow[d, leftrightarrow, "h"] & \\
U \arrow[ur, "\dot{i}_U"] \arrow[dr] & U\times R' \arrow[r] & U
\end{tikzcd}$$

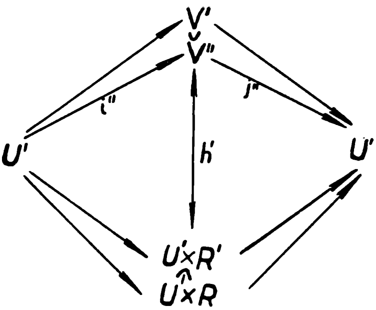
Получаем микропучок $\bar{x}=(\bar{E},\ B,\ i,\ j)$. Теперь возьмем уитниевскую сумму $x'+\bar{x}$. Далее определим отображение микропучков $\varphi\colon x'+\bar{x}\to x$ формулой $\varphi(e',\ \bar{e})=f(e')+g(\bar{e})$, где $g\colon \bar{E}\to E$ вложение. Отображение микропучков φ определяет отображение ростков Φ, которое вместе с проекциями ростков J и J' соответственно для микропучков x и x' составляет коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
(E(x'+\bar{x}),B) \arrow[r, Rightarrow, "\Phi"] \arrow[d, Rightarrow, "J"'] & (E,B) \arrow[d, Rightarrow, "J'"] \\
B \arrow[r, "\Phi_{|B}"] & B
\end{tikzcd}$$

По построению отображение $\Phi_{|B}$ – тождественное, поэтому согласно лемме 4.1 микропучки $x'+\bar{x}$ и x изоморфны. Так как $\varphi_{|E'}=f_{|E'}$, то $f(E')$ является тотальным пространством микроподпучка микропучка $x'+\bar{x}\cong x$. В заключение доказательства отметим, что из мономорфности отображения $f\colon x'\to x$ следует, что оно гомеоморфно отображает E' в тотальное пространство $f(E')$. Это означает, что для него построенное отображение ростков $(E',\ B)\overset{F}{\Longrightarrow}\left(f(E'),\ B\right)$ будет гомеоморфизмом. Таким образом, соответствующие микропучки будут изоморфными.

Лемма 4.11. *Пусть $f: x' \to x$ — отображение микропучков, тогда образ $f(x')$ является микроподпучком микропучка x.*

Доказательство. Возьмем коммутативную диаграмму окрестностей микропучка x'.



Здесь $V'' = V'/_{\mathrm{Ker}\, f \cap V'}$. Очевидно, для таких окрестностей получаем микропучок $x'' = (E'', B, i'', j'')$. Тогда имеем композицию отображений микропучков

$$x'' \xrightarrow{f} f(x'') \xrightarrow{i} x,$$

которую обозначим $\varphi = i \circ f$. Отображение по построению будет мономорфизмом, поэтому согласно лемме 4.10 $\varphi(x'')$ является микроподпучком микропучка x. Но так как размерности слоев локально одинаковы для микропучков $\varphi(x'')$ и $f(x')$, то получаем $\varphi(x'') = f(x')$. Лемма доказана.

Так же нетрудно видеть, что имеет место

Лемма 4.12. *Ядро отображения f является микроподпучком микропучка x'.*

Пусть $x_{/\bar{E}}$ микроподпучок микропучка x, тогда *фактормикропучком* будем называть такой микропучок $x_{/x_{/\bar{E}}}$, который включается в точную диаграмму

$$0 \longrightarrow x_{/\bar{E}} \xrightarrow{f} x \xrightarrow{g} x_{/x_{/\bar{E}}} \longrightarrow 0,$$

т. е. существуют такие отображения f и g, что f является мономорфизмом, а g — эпиморфизмом.

Из определения фактормикропучка вытекает, что коядро отображения f является фактормикропучком

4. **Корневые микропучки.** Пусть B — пространство с отмеченной базисной точкой $b_0 \in B$. *Корневым микропучком* над B называется такой микропучок, для которого существует специальный изоморфизм ростков $\Psi: x_{/b_0} \Longrightarrow e^n_{b_0}$, где n — размерность микропучка x, а $e^n_{b_0}$ — стандартный тривиальный микропучок над b_0. Два корневые микропучка x' и ${}'x$ над B *изоморфны*, если существует изоморфизм ростков $x' \Longrightarrow x$, который является продолжением изоморфизма ростков $\Psi'^{-1}\Psi: x'_{/b_0} \Longrightarrow x_{/b_0}$.

Теперь рассмотрим одинаковой размерности два корневых микропучка x и y с базисными пространствами соответственно A и B. Пусть $A \vee B$ букет пространств A и B, т. е. сумма $A \cup B$ с отождествлением базисных точек $a_0 \in A$ и $b_0 \in B$.

Тогда получаем микропучок $x \vee y$ над $A \vee B$ при помощи изоморфизмов ростков

$$x_{/a_0} \Longrightarrow e^n_{a_0} = e^n_{b_0} \Longleftarrow y_{/b_0}.$$

Далее, пусть $B = SX = (X \times [0,1]) / (X \times (0,1) \cup x_0 \times [0,1]$ и отображение $\Psi: B \to B \vee B$ получается стягиванием $X \times \frac{1}{2} \subset B$ по себе в точку. Тогда два одинаковой размерности корневых микропучка x и y над B можно представить как индуцированные микропучки $\Psi^*(x \vee y)$.

Предложение 4.13. Пусть e^n — тривиальный микропучок над $B = SX$. Тогда $\Psi^*(x \vee e^n) = \Psi^*(e^n \vee x) \cong x$.

Действительно, если первое „слагаемое" $B \vee B$ отождествим с B, а второе — стянем в точку b_0, то получим отображение $c: B \vee B \to B$. Тогда $c^*x \cong x \vee e^n$. Но композиция $c\Psi: B \to B$ гомотопная тождественному. Следовательно,

$$\Psi^*(x \vee e^n) \cong \Psi^* c^* x \cong x.$$

Предложение 4.14. Пусть $r: B \to B$ автоморфизм определяемый при помощи соответствия $(x, t) \to (x, 1-t)$, где $B = SX$. Тогда $\Psi^*(x \vee r^*x)$ — тривиальный.

В самом деле, пусть отображение $f: B \vee B \to B$ совпадает с тождественным для первого „слагаемого" и с r — для второго. Тогда $f\Psi: B \to B$ гомотопен постоянному отображению, поэтому

$$\Psi^*(x \vee r^*x) \cong \Psi^* f^* x \cong e^n_B.$$

Вообще для любой базы неизвестно коммутативная или нет уитниевская сумма корневых микропучков. Но, если база вполне регулярное пространство, то имеет место [2]

Лемма 4.15. *Уитниевская сумма $x + e^n_B$ коммутативная.*

Теперь имеет место важная для нас

Лемма 4.16. *Пусть $B = SX$ — вполне регулярное пространство, а x и y — два корневых микропучка над B одинаковой размерности.* Тогда $\Psi^*(x \vee y) + e^n_B \cong x + y$.

Доказательство. Так как $y + e \cong e + y$, то имеем

$$\Psi^*\Big((x+e) \vee (y+e)\Big) \cong \Psi^*\Big((x+e) \vee (e+y)\Big).$$

Используя имеющий место изоморфизм

$$(x + x') \vee (y + y') \cong (x \vee y) + (x' \vee y')$$

для любых корневых микропучков x, x', y и y', получаем

$$\Psi^*(x \vee y) + (e \vee e) \cong \Psi^*(x \vee y) + e.$$

Так как $\Psi^*\Big((x \vee e) + (e \vee y)\Big) \cong x + y$, то вытекает $\Psi^*(x \vee y) + e^n \cong x + y$.

Следствие 4.17. Пусть B — букет сфер конечного или бесконечного порядка. Если $r: B \to B$ отображает каждую сферу букета на себя со степенью -1, тогда для любого микропучка x над B сумма $x + r^*x$ — тривиальна.

В заключение этого § докажем важную теорему.

Теорема 4.18. *Для любого микропучка x над конечной размерности* *симплициальным комплексом существует обратный микропучок, т. е. такой микропучок x', что уитниевская сумма $x+x'$ является тривиальным микропучком.*

Доказательство проводится по индукции относительно размерностей базиса. Если $n=0$, то x будет сам тривиальный и поэтому теорема верна. Пусть $n=1$, тогда любая компонента базиса B имеет гомотопический тип букета окружностей и поэтому в этом случае теорема следует из следствия 4.17.

Теперь проведем индукцию на n-ом шаге. Пусть $B^{n-1}-(n-1)$ - мерный остов базиса B. Тогда по индукции предполагаем, что существует такой микропучок $x'_{/B^{n-1}}$, чтобы $(x+x')_{/B^{n-1}}$ был тривиален.

Пусть e^n — тривиальный микропучок над B^{n-1}. Мы, прежде всего, рассмотрим такой микропучок $x'+e_{/B^{n-1}}$, который продолжается до некоторого микропучка $y_{/B^n}$. Из предложения 2.4 вытекает, что микропучок, заданный на B^{n-1}, можно продолжить на n-мерный симплекс σ^n, если и только если он на границе $\partial\sigma^n$ будет тривиален. Но, микропучок $x_{/\partial\sigma^n}$-тривиален. Так как оба микропучка $(x'+x)_{/\partial\sigma^n}$ и $(x'+e)_{/\partial\sigma^n}$ будут тривиальны, то они между собой изоморфны. Следовательно, микропучок $x'+e$ можем продолжить над любым симплексом σ^n. Поступая так со всеми симплексами, получаем $(x'+e)_{/B^n}=y_{/B^n}$.

Теперь рассмотрим комплекс $B^n \cup CB^{n-1}$. Так как $(x+y)_{/B^{n-1}}$ тривиальный, то согласно предложению 2.4 получаем, что $x+y$ продолжается до некоторого микропучка y' над $B^n \cup CB^{n-1}$. Но, $B^n \cup CB^{n-1}$ имеет тот же гомотопический тип как и букет n-мерных сфер. Следовательно, из следствия 4.17 получаем, что существует микропучок r^*y' над $B^n \cup CB^{n-1}$ такой, что $y'+r^*y'$ является тривиальным. Таким образом, получаем, что и $x+y+(r^*y'_{/B^n})$ является тривиальным микропучком. Это и заканчивает индукцию.

§ 5. Полугруппа и классификация микропучков

1. Полугруппа микропучков. Обозначим (x) изоморфный класс, представителем которого является микропучок x над B. Множество таких классов обозначим $W(B)$ и, наконец, подмножество, состоящее из изоморфных классов n-мерных микропучков над B обозначим $W_n(B)$.

Множество $W(B)$ является абелевой полугруппой относительно операции $+$, так как ассоциативность и коммутативность вытекают из ассоциативности и коммутативности уитниевской суммы.

Отображение $f: B \to A$ определяет отображение полугрупп $f^*: W(A) \to W(B)$, сопоставляя любому классу (x), класс (f^*x) которого определяет индуцированный микропучок f^*x.

Лемма 5.1. *Если $f: B \to A$ гомотопическая эквивалентность, тогда отображение $f^*: W(A) \to W(B)$ биективно.*

Доказательство. Из определения гомотопической эквивалентности следует существование такого отображения $g: A \to B$, что составные отображения gf и fg являются гомотопными тождественным отображениям в себя соответственно пространств B и A. Эти отображения индуцируют следующие тождественные отображения полугрупп

$$W(A) \xrightarrow{(gf)^*} W(A), \quad W(B) \xrightarrow{(fg)^*} W(B).$$

Но согласно предложению 2.2 имеем $(gf)^* = f^* g^*$ и $(fg)^* = g^* f^*$. Таким образом, $\mathrm{Ker} f^*$ состоит только из класса, определяемого тривиальным микропучком и $\mathrm{Im} f^* = W(B)$. Это и доказывает лемму.

Пусть $x = (E, B, i, j)$ — такой микропучок, что ограничение его над замкнутым подпространством $A \subset B$ является тривиальным микропучком, т. е. $x_{/A} \cong e$, где e — стандартный тривиальный микропучок над A. Теперь рассмотрим диаграмму

$$E_{/A} \xrightarrow{h} A \times R \xrightarrow{p} R,$$

где p — естественное отображение, а h — гомеоморфизм, осуществляющий изоморфизм микропучков $x_{/A} \cong e$, его в дальнейшем будем называть *тривиализацией микропучка* x над A.

Теперь определим в пространстве $E_{/A}$ признак эквивалентности следующим образом: две точки e и e' из $E_{/A}$ будем считать эквивалентными ($e \sim e'$) тогда и только тогда, когда $ph(e) = ph(e')$. Тождественно продолжим эту эквивалентность на пространство $E_{/B/A}$. Обозначим $E_{/h}$ пространство E профакторизованное по вышеуказанному признаку эквивалентности. Тогда имеет место

Лемма 5.2. *$E_{/h}$ является тотальным пространством микропучка*

$$x_{/h} = (E_{/h}, B/A, i', j').$$

В самом деле, согласно лемме 4.5 нетрудно видеть, что ограничение микропучка x над некоторой окрестностью U подпространства A в B остается тривиальным, т. е. существует гомеоморфизм $E/n \xrightarrow{\tilde{h}} U \times R$. Он в свою очередь индуцирует гомеоморфизм $(E_{/U})_{/\tilde{h}} \to U/A \times R$. Таким образом, для точки $A/A \in B/A$ существует окрестность U/A, которая удовлетворяет условию локальной тривиальности. Проекция и инъекция микропучка определяется естественно.

Лемма 5.3. *Пусть h_0 и h_1 гомотопные тривиализации микропучка x над A, тогда микропучки $x_{/h_0}$ и $x_{/h_1}$ изоморфны.*

Доказательство. Рассмотрим микропучок

$$x \times I = (E \times I, B \times I, i_t, j_t),$$

полученный из x с помощью „умножения" на I. Отображения h_0 и h_1 индуцируют тривиализацию $\tilde{h}$ микропучка на $x \times I$ над $A \times I \subset B \times I$. Иными словами, получаем микропучок

$$(x \times I)_{/\tilde{h}} = \left((E \times I)_{/\tilde{h}}, (B \times I)/A \times I, i'_t, j'_t\right).$$

Теперь естественное отображение $f: B/A \times I \to B \times I/A \times I$ и микропучок $(x \times I)_{/\tilde{h}}$ индуцируют микропучок $f^*(x \times I)_{/\tilde{h}}$ над $B/A \times I$. Ограничениями этого микропучка над $B/A \times 0$ и $B/A \times 1$ являются соответственно микропучки $x_{/h_0}$ и $x_{/h_1}$. Далее, согласно теореме 4.8, лемма доказана.

Лемма 5.4. *Пусть $A \subset B$ замкнутое стягиваемое подпространство. Тогда естественное отображение $f: B \to B/A$ индуцирует биекцию*

$$f^*: W(B/A) \to W(B).$$

Доказательство. Если x микропучок над B, тогда согласно следствию 4.9 получаем тривиальный микропучок $x_{/A}$. Таким образом, имеем тривиализацию $h: E_{/A} \to A \times R$. Но две такие тривиализации отличаются только автоморфизмом $A \times R$, т. е. отображением $A \to GL(R)$. Так как $GL(R) = GL(n, C)$ — связанная и A — стягиваемое, то все такие отображения между собой гомотопны. Следовательно, согласно лемме 5.3 они определяют только один изоморфный класс $(x_{/h})$. Сопоставление изоморфного класса микропучков над B $(x) \in W(B)$ с вышеуказанным классом $(x_{/h}) \in W(B/A)$ дает отображение $W(B) \to W(B/A)$, которое, очевидно, является отображением обратным отображению f^*. Лемма доказана.

На протяжении всего параграфа мы будем предполагать, что база микропучка паракомпактное, а слой комплексное векторное пространство. Обозначим $B = B_1 \cup B_2$ и $A = B_1 \cap B_2$.

Лемма 5.5. *Пусть* $x_1 = (E_1, B_1, i_1, j_1)$ и $x_2 = (E_2, B_2, i_2, j_2)$ — *два микропучка и* $f: x_{1/A} \to x_{2/A}$ *изоморфизм микропучков. Тогда имеем микропучок* $x_1 \underset{f}{\cup} x_2 = (E, B, i, j)$.

Доказательство. Тотальное пространство E получим из суммы $E_1 \cup E_2$, стождествляя точки $e_1 \in E_{1/A}$ и $f_{E_{/A}}(e_1) \in E_{2/A}$. Тогда определим инъекцию $i: B \to E$ и проекцию $j: E \to B$ соответственно формулам

$$i(b) = \begin{cases} i_1(b), & b \in B_1 \setminus A \\ i_2(b), & b \in B_2 \setminus A \\ i_1(b) = i_2(b), & b \in A, \end{cases}$$

$$j(b) = \begin{cases} j_1(e), & e \in E_1 \setminus E_{1/A} \\ j_2(e), & e \in E_2 \setminus E_{2/A} \\ j_1(e) = j_2 f_{E_{1/A}}(e), & e \in E_{1/A} = E_{2/A}. \end{cases}$$

Для окрестности $V \subset E_{/B \setminus A}$ условие локальной тривиальности удовлетворяется, так как $E_{1/B \setminus A} = E_{1/B \setminus A} \cup E_{2/B \setminus A}$, а для $E_{1/B \setminus A}$ и $E_{2/B \setminus A}$ оно имеет место.

Теперь пусть окрестность $V_1 \subset E_1$ пересекается с $E_{1/A}$, тогда существует гомеоморфизм $h_1: V_1 \to U_1 \times C$, ограничение которого на $E_{1/A}$ дает гомеоморфизм $h_{1/E_{1/A}}: V_1 \cap j_1^{-1}(A) \to U_1 \cap A \times C$. Так как точки $e_1 \in E_{1/A}$, $f_{E/A}(e_1) \in V_1 \cap \cap j_2^{-1}(A)$ отождествлены, то гомеоморфизм $h_{1/E_{/A}}$ определяет гомеоморфизм $h_{2/E_{2/A}}: V_1 \cap j_2^{-1}(A) \to U_2 \cap A)) \times C$. Согласно лемме 4.5 гомеоморфизм $h_{2/E_{2/A}}$ можно продолжить до гомеоморфизма $h_2: V_2 \to U_2 \times C$, где V_2 окрестность в E_2. Пара гомеоморфизмов h_1 и h_2 индуцирует гомеоморфизм

$$h: V_1 \cup V_2 \to (U_1 \cup U_2) \times C.$$

Это и доказывает лемму.

Укажем некоторые следствия леммы.

Следствие 5.6. Пусть x' микропучок над B и $E_i = E_{/B_i}$ $(i = 1, 2)$, тогда тождественное отображение $1_A: E_{1/A} \to E_{2/A}$ определяет изоморфизм $1_A: x_{1/A} \to x_{2/A}$ и построенный с помощью 1_A микропучок $x_1 \underset{1_A}{\cup} x_2$, изоморфный x'.

Следствие 5.7. Если $\varphi_i: x_i \to x_i'$ изоморфизм микропучков над B_i и $f'\varphi_1 = \varphi_2 f$, тогда $x_1 \cup_f x_2 \cong x_1' \cup_{f'} x_2'$.

Следствие 5.8. Пусть (x_i, f) и (x_i', f') — две пары микропучков над B_i с изоморфизмами над A, тогда

$$(x_1 \cup_f x_2) + (x_1' \cup_{f'} x_2') \cong x_1 + x_1' \underset{f+f'}{\cup} x_2 + x_2',$$

$$(x_1 \underset{f}{\cup} x_2) \times (x_1' \underset{f'}{\cup} x_2') \cong x_1 \times x_1' \underset{f \times f'}{\cup} x_2 \times x_2'.$$

Лемма 5.9. *Изоморфные классы $(x_1 \underset{f}{\cup} x_2)$ зависят только от гомотопических классов изоморфизмов $f: x_{1/A} \to x_{2/A}$.*

Доказательство. Пусть имеем гомотопический класс (f) изоморфизмов $x_{1/A} \to x_{2/A}$. Естественная проекция $p: B_i \times I \to B_i$ индуцирует микропучки $p^* x_{1/A\times I}$ и $p^* x_{2/A\times I}$, а гомотопический класс изоморфизмов (f) определяет изоморфизм

$$F: p^* x_{1/A\times I} \to p^* x_{2/A\times I}.$$

Определим формулой $\varphi_t(b) = b\times t$ гомотопию $\varphi_t: B\to B\times I$, которая с изоморфизмом F индуцирует изоморфизм $f_t: x_{1/A} \to x_{2/A}$. Тогда $x_1 \underset{f_t}{\cup} x_2 \cong \varphi_t^* (p^* x_1 \underset{F}{\cup} p^* x_2)$.

Так как φ_0 и φ_1 между собой гомотопны, то из теоремы 4.8 вытекает, что $x_1 \underset{f_0}{\cup} x_2 \cong x_1 \underset{f_1}{\cup} x_2$. Лемма доказана.

2. **Теорема классификации.** Будем обозначать множество гомотопических классов отображения $B\to A$ через $[B, A]$. Пусть $B = SA = C_1(A) \cup C_2(A)$, где

$$C_1(A) = A\times\left[0, \tfrac{1}{2}\right]/A\times I, \quad C_2(A) = A\times\left[\tfrac{1}{2}, 1\right]/A\times I.$$

Тогда, очевидно, $C_1(A) \cap C_2(A) = A$. Теперь докажем лемму.

Лемма 5.10. *Для любого A имеет место естественный изоморфизм $W_n(SA) \cong [A, GL(n, C)]$.*

Доказательство. Пусть x^n — n-мерный микропучок над SA. Так как $C_1(A)$ и $C_2(A)$ стягиваемые, то микропучки $x^n_{|C_1(A)}$ и $x^n_{|C_2(A)}$ — тривиальны, иначе говоря, существует изоморфизм микропучков

$$\Psi_i: x^n_{|C_i(A)} \to C_i(A)\times C \quad (i=1, 2).$$

Тогда автоморфизм $(\Psi_{1|A} \circ \Psi^{-1}_{2|A}): A\times C \to A\times C$ определяет отображение $A\to GL(n, C)$. Очевидно, изоморфные микропучки определяют гомотопные отображения. Поэтому получаем отображение $\Psi: W_n(SA) \to [A, GL(n, C)]$.

С другой стороны, если имеем гомотопные отображения $A\to GL(n, C)$, то они индуцируют гомотопные тривиализации h_0 и h_1 микропучка x^n над A, а тогда согласно лемме 5.3 микропучки $x^n_{|h_0}$ и $x^n_{|h_1}$ изоморфны. Далее продолжим эти микропучки над SA. Таким образом, получим отображение φ: $[A, GL(n, C)] \to W_n(SA)$, которое, как видно из построения, обратное отображению Ψ. Лемма доказана.

Пусть $G_n(C)$ — многообразие Грассмана, точками которого являются подпространства коразмерности n пространства C, проходящие через начало координат. Хотя $G_n(C)$ не является метрическим пространством, но оно регулярно и является объединением четного числа своих компактных подмножеств $G_0 \subset G_1 \subset \ldots G_n$, поэтому оно паракомпактно.

Далее возьмем стандартный тривиальный микропучок e над $G_n(C)$ с тотальным пространством $G_n(C)\times C$. Определим микроподпучок $x' = e_{|E'}$ микропучка e, тотальное пространство E' которого состоит из таких пар (g, c), что $r\in g$, где $g\in G_n(C)$, $c\in C$. Тогда фактормикропучок e/x' над $G_n(C)$ с тотальным пространством $\left(G_n(C)\times C\right)/E'$ будем называть „универсальным" микропучком над $G_n(C)$.

Если x любой микропучок над B с тотальным пространством E, тогда нетрудно видеть, что существует эпиморфизм $B \times R \to E$, который индуцирует отображение $f: B \to G_n(C)$. Универсальный микропучок и отображение f в свою очередь индуцируют микропучок f^*x над B. Очевидно, имеет место изоморфизм $f^*x \cong x$.

Теперь рассмотрим естественную проекцию $C^m \to C^{m-1}$, которую определим соответствием $(z_1, \ldots, z_m) \to (z_1 \ldots z_{m-1})$. Следовательно, получим непрерывное отображение

$$\Psi : G_n(C^{m-1}) \to G_n(C^m).$$

Таким образом, если $x_{(m)}$ универсальный микропучок над $G_n(C^m)$, тогда $\Psi^* x_{(m)} \cong x_{(m-1)}$.

Теорема 5.11. *Для любого микропучка $x_{(m)}$ над паракомпактной базой B и для отображения $f: B \to G_n(C^m)$ соответствие $f \to f^* x_{(m)}$ индуцирует изоморфизм $[B, G_n(C^m)] \to W_n(B)$.*

Доказательство. Построим обратное отображение. Для микропучка $x_{(m)}$ существует эпиморфизм $\varphi: B \times C^m \to E$, который индуцирует отображение $f: B \to G_n(C^m)$. Нам необходимо показать, что гомотопический класс (f) для достаточно большого m, не зависит от отображения φ.

В самом деле, пусть $\varphi_i: B \times C^{m_i} \to E$ — два эпиморфизма $(i=1, 2)$, которые индуцируют отображения $f_i' : B \to G_n(C^{m_i})$. Определим эпиморфизм $\Psi_t: B \times C^{m_1} \times C^{m_2} \to E$ формулой

$$\Psi_t(b, v_1, v_2) = (1-t)\varphi_1(b, v_1) + t\varphi_2(b, v_2),$$

индуцирующей отображение $f_t: B \to G_n(C^{m_1} + C^{m_2})$. Если отождествим $C^{m_1} + C^{m_2}$ с $C^{m_1+m_2}$ при помощи соответствия $(z_1, \ldots z_{m_1}) + (z_1', \ldots z_{m_2}') \to (z_1, \ldots, z_m, z_1' \ldots z_{m_2}')$, тогда $f_0 = g_0 f_0'$, $f_1 = T g_1 f_1'$, где $g_i: G_n(C^{m_i}) \to G_n(C^{m_1+m_2})$ — естественное вложение, $T: G_n(C^{m_1+m_2}) \to G_n(C^{m_1+m_2})$ — отображение, индуцированное перестановкой координат в пространстве $C^{m_1+m_2}$. Оно гомотопное тождественному отображению. Таким образом, $g_1 f_1'$ гомотопное отображению f_1 и следовательно $g_0 f_0'$. Это и требовалось доказать.

Вильнюсский Государственный университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию 16.II.1967

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Milnor, Topological manifolds and smooth manifolds, Proc. Internat. Congr. Math. Stockolm, 132—138 (1962).
2. J. Milnor, Microbundles, Topology, 3, 1, 53—80 (1964).
3. Дж. Милнор, Лекции о характеристических классах, Математика, 3:4, 3—53 (1959).
4. W. C. Hsiang and T. C. Wall, Orientability of manifolds for generalised homology theories, Trans. Amer. Math. Soc., 118, 174—179 (1965).
5. Н. Бурбаки, Алгебра, Москва, 1962.
6. F. Hirzerbruch, Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie, Berlin-Gottingen-Heidelberg, 1962.
7. С. П. Новиков, Новые идеи в алгебраической топологии (К — теория и ее применения), УМН, т. 20, вып. 3, 41—66 (1965).
8. M. F. Atiyah, Lectures on K-theory, (mimeographed), 1964.

NESTABILUS MIKROISSLUOKSNIAVIMŲ PUSGRUPIS

A. MATUZEVIČIUS

(Reziumė)

Darbe nagrinėjamas Abelio pusgrupis, kurio elementais yra mikroišsluoksniavimų izomorfinės klasės, o operacija — Uitnėjo suma. Pasinaudojus šios pusgrupės savybėmis pateikiama mikroišsluoksniavimų klasifikacija.

NICHT-STABILISCHE HALBGRUPPE VON MIKROBÜNDELN

A. MATUZEVIČIUS

(Zusammenfassung)

In der vorliegenden Arbeit betrachten wir eine abelische Halbgruppe von der Elementen, die isomorphische Klassen von Mikrobündeln, sind. Operation der whitneysche Summe definiert eine algebraische Struktur. Aus grundlegenden Eigenschaften dieser Halbgruppe folgt eine Klassifikation von Mikrobündeln.