LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VII Nr. 3, 1968
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VII № 3, 1968

ВОГНУТОСТЬ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЙ, СВЯЗАННЫХ С ДВУМЕРНЫМ НОРМАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

Н. А. БОДИН, В. А. ЗАЛГАЛЛЕР

Пусть $A(x, y)$ – неположительная квадратичная форма

$$A(x, y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2, \tag{1}$$

$$a_{11}\leqslant 0, \quad a_{22}\leqslant 0, \quad a_{11}a_{22}-a_{12}^2\geqslant 0; \tag{2}$$

D – параллелограмм на плоскости x, y; $D(M)$ – тот же параллелограмм, параллельно перенесенный так, что его центр лежит в точке M;

$$p(M)=\int\limits_{D(M)} e^{A(x,y)}\,dx\,dy. \tag{3}$$

Цель настоящей заметки доказать следующее утверждение.

Теорема. *Функция* $\ln p(M)$ *есть вогнутая функция от* M, *т. е. при любых* M_1, M_2, $0\leqslant\lambda\leqslant 1$,

$$\ln p(\lambda M_1+(1-\lambda)M_2)\geqslant\lambda\ln p(M_1)+(1-\lambda)\ln p(M_2). \tag{4}$$

1. Теорему достаточно доказывать для прямоугольников D с осями, параллельными осям координат. Остальные случаи сводятся к этому однородной линейной заменой переменных.

2. Одномерный аналог теоремы, утверждающий вогнутость функции $\ln p(\mu)$, где

$$p(\mu)=\int\limits_{s_1+\mu}^{s_2+\mu} e^{ax^2}\,dx, \tag{5}$$

при любых $a\leqslant 0$, $s_1<s_2$, хорошо известен, см. [1], стр. 134. Мы докажем это утверждение, дополнив его оценкой снизу для $\frac{d^2}{d\mu^2}\ln p(\mu)$,

$$2a\leqslant\frac{d^2}{d\mu^2}\ln\int\limits_{s_1+\mu}^{s_2+\mu} e^{ax^2}\,dx\leqslant 0. \tag{6}$$

Ввиду произвольности $s_1<s_2$, достаточно проверять (6) в точке $\mu=0$.

3. Начнем с правого неравенства (6). Требуется показать, что

$$p''-\frac{p'}{p}\,p'\leqslant 0.$$

В нашем случае

$$p'=e^{as_2^2}-e^{as_1^2}; \quad p''=2as_2e^{as_2^2}-2as_1e^{as_1^2},$$

и надо проверить, что

$$2as_2e^{as_2^2}-2as_1e^{as_1^2}-\frac{p'}{p}\left(e^{as_2^2}-e^{as_1^2}\right)\leqslant 0. \tag{7}$$

Применяя к $\frac{p'}{p}$ теорему о среднем, получаем

$$\frac{p'}{p}=\frac{e^{as_2^2}-e^{as_1^2}}{\int\limits_{s_1}^{s_2} e^{ax^2}\,dx}=\frac{2ase^{as^2}}{e^{as^2}}=2as,$$

где $s_1 \leqslant s \leqslant s_2$. Подставляя в левую часть (7) $\frac{p'}{p} = 2as$, убеждаемся в справедливости неравенства (7).

4. Чтобы доказать левое неравенство (6) надо проверить, что $\frac{p''}{p} - \left(\frac{p'}{p}\right)^2 \geqslant 2a$. В нашем случае можно записать

$$p' = 2a \int_{s_1}^{s_2} xe^{ax^2}\,dx; \quad p'' = 2a \int_{s_1}^{s_2} (1+2ax^2)\,e^{ax^2}\,dx.$$

Поэтому имеем

$$\frac{p''}{p} - \left(\frac{p'}{p}\right)^2 = 2a + \frac{4a^2}{p^2}\left[\int_{s_1}^{s_2} x^2 e^{ax^2}\,dx \int_{s_1}^{s_2} e^{ax^2}\,dx - \left(\int_{s_1}^{s_2} xe^{ax^2}\,dx\right)^2\right] \geqslant 2a,$$

так как выражение, стоящее в квадратных скобках, положительно по неравенству Шварца.

5. Для доказательства теоремы в двумерном случае достаточно убедиться, что при $s_1 < s_2$, $t_1 < t_2$ функция

$$u(\mu, \nu) = \ln p(\mu, \nu) = \ln \int_{s_1+\mu}^{s_2+\mu} \int_{t_1+\nu}^{t_2+\nu} e^{A(x,\, y)}\,dx\,dy \tag{8}$$

имеет неположительный второй дифференциал. Ввиду произвольности $s_1 < s_2$, $t_1 < t_2$ достаточно проверять это в точке $\mu = 0$, $\nu = 0$.

6. Введем в рассмотрение величины

$$\alpha_{11} = p\,\frac{\partial^2 u}{\partial \mu^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial \mu^2} - \frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial \mu}\right)^2,$$

$$\alpha_{12} = p\,\frac{\partial^2 u}{\partial \mu\,\partial \nu} = \frac{\partial^2 p}{\partial \mu\,\partial \nu} - \frac{1}{p}\,\frac{\partial p}{\partial \mu}\,\frac{\partial p}{\partial \nu},$$

$$\alpha_{22} = p\,\frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial \nu^2} - \frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial \nu^2}\right)^2,$$

где все производные взяты в точке $\mu = \nu = 0$. Нам надо показать, что

$$\alpha_{11} \leqslant 0, \quad \alpha_{22} \leqslant 0, \quad \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2 \geqslant 0. \tag{9}$$

В нашем случае

$$\alpha_{11} = \int_{t_1}^{t_2} e^{A(s,\, y)} A'_x(s,\, y)\Big|_{s_1}^{s_2} dy - \frac{1}{p}\left(\int_{t_1}^{t_2} e^{A(s,\, y)}\Big|_{s_1}^{s^2} dy\right)^2, \tag{10}$$

$$\alpha_{12} = e^{A(s_2,\, t_2)} - e^{A(s_1,\, t_2)} - e^{A(s_2,\, t_1)} + e^{A(s_1,\, t_1)} - \\ - \frac{1}{p}\left(\int_{s_1}^{s_2} e^{A(x,\, t)}\Big|_{t_1}^{t_2} dx\right)\left(\int_{t_1}^{t_2} e^{A(s,\, y)}\Big|_{s_1}^{s_2} dy\right), \tag{11}$$

$$\alpha_{22} = \int_{s_1}^{s_2} e^{A(x,\, t)} A'_y(x,\, t)\Big|_{t_1}^{t_2} dx - \frac{1}{p}\left(\int_{s_1}^{s_2} e^{A(x,\, t)}\Big|_{t_1}^{t_2} dx\right)^2. \tag{12}$$

7. Если $a_{11} = 0$ (или $a_{22} = 0$), то $A(x, y)$ есть форма от одной переменной. Если $a_{12} = 0$, то $A(x, y)$ — сумма двух форм, каждая от одной переменной. В этих случаях теорема сразу следует из одномерного случая (п. 2). Поэтому считаем далее все $a_{ik} \neq 0$.

За счет подстановки $x = \frac{x'}{\sqrt{-a_{11}}}$, $y = \frac{y'}{\sqrt{-a_{22}}}\,\mathrm{sign}\,a_{12}$ считаем далее, не теряя общности, форму $A(x, y)$ приведенной к виду

$$A(x,\, y) = -(x^2 - 2\rho xy + y^2), \tag{13}$$

где $0<\rho\leqslant 1$. Мы покажем, что в этих условиях

$$\alpha_{11}\leqslant 0,\quad \alpha_{22}\leqslant 0,\quad \alpha_{12}\geqslant 0,\quad -\alpha_{11}\geqslant \alpha_{12},\quad -\alpha_{22}\geqslant \alpha_{12}. \tag{14}$$

Отсюда, очевидно, следуют неравенства (9).

8. Начнем с доказательства неравенства $\alpha_{22}\leqslant 0$. Имеем $\alpha_{22}=T_2-T_1$, где

$$T_i=\int_{s_1}^{s_2} e^{A(x,\,t_i)}A'_y(x,\,t_i)\,dx-\frac{p'}{p}\int_{s_1}^{s_2} e^{A(x,\,t_i)}\,dx. \tag{15}$$

Мы докажем, что $T_2\leqslant 0$, $T_1\geqslant 0$. Для этого надо проверить неравенства

$$\frac{\int_{s_1}^{s_2} e^{A(x,\,t_2)}A'_y(x,\,t_2)\,dx}{\int_{s_1}^{s_2} e^{A(x,\,t_2)}\,dx}\leqslant\frac{p'_v}{p}\leqslant\frac{\int_{s_1}^{s_2} e^{A(x,\,t_1)}A'_y(x,\,t_1)\,dx}{\int_{s_1}^{s_2} e^{A(x,\,t_1)}\,dx}. \tag{16}$$

Преобразуем $\frac{p'_v}{p}$ по теореме о среднем

$$\frac{p'_v}{p}=\frac{\int_{s_1}^{s_2}\int_{t_1}^{t_2} e^{A(x,\,y)}A'_y(x,\,y)\,dx\,dy}{\int_{s_1}^{s_2}\int_{t_1}^{t_2} e^{A(x,\,y)}\,dx\,dy}=\frac{\int_{s_1}^{s_2} e^{A(x,\,t)}A'_y(x,\,t)\,dx}{\int_{s_1}^{s_2} e^{A(x,\,t)}\,dx}=\gamma(t),$$

где $t_1\leqslant t\leqslant t_2$. Для доказательства (16) достаточно показать, что $\gamma(t)$ есть невозрастающая функция.

Имеем

$$\gamma(t)=\frac{\int_{s_1}^{s_2} e^{-(x^2-2\rho xt+t^2)}(2\rho x-2t)\,dx}{\int_{s_1}^{s_2} e^{-(x^2-2\rho xt+t^2)}\,dx}=\frac{\int_{s_1}^{s_2} e^{-(x-\rho t)^2}[-2t(1-\rho^2)+2\rho(x-\rho t)\,dx}{\int_{s_1}^{s_2} e^{-(x-\rho t)^2}\,dx}=$$

$$=2\frac{1-\rho^2}{\rho}\,\mu-2\rho\,\frac{d}{d\mu}\ln\int_{s_1+\mu}^{s_2+\mu} e^{-x^2}\,dx, \tag{17}$$

где $\mu=-\rho t$. Теперь

$$\frac{d\gamma}{dt}=-\rho\,\frac{d\gamma}{d\mu}=-2(1-\rho^2)+2\rho^2\,\frac{d^2}{d\mu^2}\ln\int_{s_1+\mu}^{s_2+\mu} e^{-x^2}\,dx,$$

и, ввиду правого неравенства (6), $\frac{d\gamma}{dt}\leqslant 0$.

Это доказывает, что $\alpha_{22}\leqslant 0$. Вполне аналогично доказывается $\alpha_{11}\leqslant 0$.

9. Перейдем к доказательству неравенства $\alpha_{12}\geqslant 0$. Из (13) следует

$$A(s,\,y)+A(x,\,t)-A(x,\,y)=A(s,\,t)-2\rho(s-x)(t-y). \tag{18}$$

Теперь легко проверяется неравенство

$$e^{A(s_2,\,t_2)}\geqslant\frac{\int_{s_1}^{s_2}\int_{t_1}^{t_2} e^{A(s_2,\,y)}e^{A(x,\,t_2)}\,dx\,dy}{\int_{s_1}^{s_2}\int_{t_1}^{t_2} e^{A(x,\,y)}\,dx\,dv}, \tag{19}$$

достаточно применить к правой части (19) теорему о среднем и воспользоваться тождеством (18).

Аналогично (19) проверяются три других сходных неравенства, сложение которых, согласно (11), дает $\alpha_{12} \geqslant 0$.

10. Докажем, что $-\alpha_{22} \geqslant \alpha_{12}$. Из (11) и (12) находим, что $\alpha_{12}+\alpha_{22}= = R_2 - R_1$, где

$$R_i = \int_{s_1}^{s_2} e^{A(x,\, t_i)} [A'_x(x,\, t_i) + A'_y(x,\, t_i)]\, dx - \frac{r}{p} \int_{s_1}^{s_2} e^{A(x,\, t_i)}\, dx, \qquad (i=1,\ 2), \quad (20)$$

где

$$r = \int_{s_1}^{s_2} \int_{t_1}^{t_2} e^{A(x,\, y)} [A'_x(x,\, y) + A'_y(x,\, y)]\, dx\, dy.$$

Мы покажем, что $R_2 \leqslant 0$, $R_1 \geqslant 0$. Для этого надо проверить неравенства

$$\frac{\int_{s_1}^{s_2} e^{A(x,\, t_2)} [A'_x(x,\, t_2) + A'_y(x,\, t_2)]\, dx}{\int_{s_1}^{s_2} e^{A(x,\, t_2)}\, dx} \leqslant \frac{r}{p} \leqslant \frac{\int_{s_1}^{s_2} e^{A(x,\, t_1)} [A'_x(x,\, t_1) + A'_y(x,\, t_1)]\, dx}{\int_{s_1}^{s_2} e^{A(x,\, t_1)}\, dx}. \quad (21)$$

Преобразуя $\frac{r}{p}$ по теореме о среднем, получаем

$$\frac{r}{p} = \frac{\int_{s_1}^{s_2} e^{A(x,\, t)} [A'_x(x,\, t) + A'_y(x,\, t)]\, dx}{\int_{s_1}^{s_2} e^{A(x,\, t)}\, dx} = \psi(t),$$

где $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$. Для доказательства (21) достаточно показать, что $\psi(t)$ — невозрастающая функция.

Имеем

$$\psi(t) = \frac{\int_{s_1}^{s_2} e^{-(x^2-2\rho xt+t^2)}\, 2(\rho-1)(x+t)\, dx}{\int_{s_1}^{s_2} e^{-(x^2-2\rho xt+t^2)}\, dx} = \frac{\int_{s_1}^{s_2} e^{-(x-\rho t)^2} [-2t(1-\rho^2) + 2(\rho-1)(x-\rho t)]\, dx}{\int_{s_1}^{s_2} e^{-(x-\rho t)^2}\, dx} =$$

$$= 2\, \frac{1-\rho^2}{\rho}\, \mu + 2(1-\rho) \frac{d}{d\mu} \ln \int_{s_1+\mu}^{s_2+\mu} e^{-x^2}\, dx.$$

На этот раз

$$\frac{d\psi}{dt} = -\rho \frac{d\psi}{d\mu} = -2(1-\rho^2) - 2(1-\rho)\rho \frac{d}{d\mu^2} \ln \int_{s_1+\mu}^{s_2+\mu} e^{-x^2}\, dx,$$

и, ввиду левого неравенства (6),

$$\frac{d\psi}{dt} \leqslant -2(1-\rho^2) + 4\rho(1-\rho) = -2(1-\rho^2) \leqslant 0.$$

Таким образом, $-\alpha_{22} \geqslant \alpha_{12}$. Аналогично доказывается неравенство

$$-\alpha_{11} \geqslant \alpha_{12}.$$

Теорема доказана.

Замечания. 1. При сдвигах параллелограмма $D(M)$ в направлении вектора (b_1, b_2) отрицательность второй производной $\ln p$ можно дополнить оценкой этой производной снизу:

$$2(a_{11} b_1^2 + 2a_{12} b_1 b_2 + b_2^2 a_{22}) \leqslant \frac{d^2}{d\mu^2} \ln \int\limits_{s_1+b_1\mu}^{s_2+b_1\mu} \int\limits_{t_1+b_2\mu}^{t_2+b_2\mu} e^{A(x,y)}\, dx\, dy \leqslant 0.$$

Проверяется это аналогично п. 4.

2. Теорема остается справедливой, если в формуле (3) заменить $D(M)$ — произвольным, параллельно переносимым отрезком, а интегрирование в (3) вести по длине этого отрезка.

3. Неравенство (4) эквивалентно некоторому неравенству вида

$$\left(\iint\limits_D e^{\frac{1}{2} A(x+\mu_1,\, y+\nu_1)} e^{\frac{1}{2} A(x+\mu_2,\, y+\nu_2)} dx\, dy\right)^2 \geqslant$$

$$\geqslant k \iint\limits_D e^{A(x+\mu_1,\, y+\nu_1)} dx\, dy \iint\limits_D e^{A(x+\mu_2,\, y+\nu_2)} dx\, dy,$$

где k — постоянная, зависящая от коэффициентов формы $A(x, y)$ и вектора $(\mu_2-\mu_1, \nu_2-\nu_1)$ и независящая от вида параллелограмма D. Таким образом в теореме доказано некоторое неравенство, типа „обратных“ неравенств Шварца, см. [2], гл. 1, §§ 40—44.

4. Авторы надеются исследовать многомерный случай и его бесконечномерный аналог.

Ленинград

Поступило в редакцию
30.XII.1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Куллдорф, Введение в теорию оценивания по группированным и частично группированным выборкам, «Наука», М., 1966.
2. Э. Беккенбах, Р. Беллман, Неравенства, «Мир», М., 1965.

KAI KURIŲ FUNKCIJŲ, SUSIJUSIŲ SU DVIMAČIU NORMALINIU PASISKIRSTYMU, ĮGAUBTUMAS

N. BODIN, V. ZALGALLER

(Reziumė)

Sakysime, plokštumoje yra definuotas dvimatis normalinis pasiskirstymas ir $p(M)$ — tikimybė patekti į lygiagrečiai pernešamą fiksuoto dydžio su centru M stačiakampį.

Darbe įrodoma, kad $\ln p(M)$ yra įgaubta (iškilumas nukreiptas į viršų) funkcija.

ON THE CONCAVITY OF SOME FUNCTIONS CONNECTED WITH THE TWO-DIMENSIONAL NORMAL DISTRIBUTION

N. BODIN, V. ZALGALLER

(Summary)

Let we have a two-dimensional normal distribution and let $p(M)$ denote the probability of falling within the parallel translated parallelogram with a centre M and of fixed size.

In this paper the function $\ln p(M)$, is proved to be a concave (convex to the top) function.