LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VII Nr. 3, 1968
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VII № 3, 1968

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ СУММ ДИСКРЕТНЫХ ПРОЦЕССОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

А. АЛЕШКЯВИЧЕНЕ

Пусть имеется последовательность $\xi_1\ \xi_2, \ldots$ независимых неотрицательных одинаково распределенных случайных величин с общей функцией распределения $F(x)$ и принимающих только целочисленные значения k с вероятностями

$$p_k = P\{\xi_l = k\}, \qquad l = 1,\ 2,\ \ldots, \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Чтобы исключить тривиальный случай, будем предполагать, что ξ_l не равны константе с вероятностью единица.

Обозначим

$$S_0 = 0,\ S_m = \sum_{l=1}^{m} \xi_l, \qquad m = 1,\ 2,\ \ldots$$

Случайный процесс $N(t)$, $t = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ называем дискретным процессом восстановления, если $N(t)$ равно максимальному значению m, для которого $S_m \leqslant t-1$. Если величины ξ_l интерпретировать как длительности существования последовательности заменяемых элементов, то $N(t)$ будет числом восстановлений элемента за отрезок времени $(0,\ t-1)$ в предположении, что восстановления производятся в целочисленные моменты времени.

В. Феллером в работе [1], исходя из соотношения

$$P\{S_n < t\} = P\{N(t+1) \geqslant n\},$$

в частности, была доказана следующая теорема об асимптотической нормальности $N(t)$ при больших t. Если $\mu_2 < \infty$, то

$$\lim_{t\to\infty} P\left\{\frac{N(t) - \frac{t}{\mu_1}}{\bar{\sigma}\sqrt{t}} < x\right\} = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du,$$

где

$$\mu_r = \sum_{k=0}^{\infty} k^r p_k, \qquad \bar{\sigma}^2 = \frac{\mu_2 - \mu_1^2}{\mu_1^3}.$$

Мы будем рассматривать последовательность

$$N_1(t),\ N_2(t),\ \ldots,\ N_n(t),\ \ldots$$

независимых одинаково распределенных дискретных процессов восстановления. Сумму $\sum_{l=1}^{n} N_l(t)$ мы можем интерпретировать как число восстановлений за отрезок времени $(0,\ t-1)$ в системе, состоящей из n однородных элементов.

В работе [2] Б. Григелионисом была получена асимптотическая нормальность сумм $\sum_{l=1}^{n} N_l(t)$ при больших значениях n и t для процесса восстановления, распределение времени восстановления (или величины ξ_l) которого имеет абсолютно непрерывную компоненту. В. Лютикас в работе [3] получил тот же результат для дискретного процесса восстановления. Но в обеих работах предполагалось существование четвертого момента времени восстановления, т. е. предполагалось что $\mu_4 < \infty$. В настоящей работе доказывается асимптотическая нормальность сумм $\sum_{l=1}^{n} N_l(t)$ для дискретного процесса восстановления при менее жестких условиях, а именно в предположении, что $\mu_2 < \infty$.

Обозначим

$$\bar{N}_n(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{nt}} \sum_{l=1}^{n} \left(N_l(t) - \Lambda(t)\right),$$

где

$$\Lambda(t) = MN_l(t); \qquad F_{n,t}(x) = P\{\bar{N}_n(t) < x\}.$$

Теорема. *Если* $\mu_2 < \infty$, *то*

$$\lim_{n,t\to\infty} F_{n,t}(x) = \Phi(x)$$

равномерно относительно x.

Доказательство. Пусть

$$\bar{f}_t(z) = Me^{iz\left(N_l(t) - \Lambda(t)\right)}.$$

В силу независимости процессов $N_l(t)$ имеем

$$f_{n,t}(z) = Me^{iz\bar{N}_n(t)} = \left(Me^{iz\frac{1}{\sigma\sqrt{nt}}\left(N_l(t) - \Lambda(t)\right)}\right)^n = \bar{f}_t^n\left(\frac{z}{\sigma\sqrt{nt}}\right) =$$

$$= \left[e^{-\frac{iz}{\sigma\sqrt{nt}}\Lambda(t)} f_t\left(\frac{z}{\sigma\sqrt{nt}}\right)\right]^n, \tag{1}$$

где $f_t(z)$ является характеристической функцией величины $N_l(t)$. Но

$$\bar{f}_t\left(\frac{z}{\sigma\sqrt{nt}}\right) = 1 - \frac{z^2}{2\sigma^2 nt} M\left(N_l(t) - \Lambda(t)\right)^2 + \frac{z^2}{2\sigma^2 nt}\left(\bar{f}_t''\left(\vartheta\frac{z}{\sigma\sqrt{nt}}\right) - \bar{f}_t''(0)\right), \tag{2}$$

$$0 < |\vartheta| < 1.$$

Далее, согласно (1), имеем, что

$$\bar{f}_t''(z) = i^2\left[\Lambda^2(t)e^{-iz\Lambda(t)}f_t(z) - 2\Lambda(t)e^{-iz\Lambda(t)}f_t'(z) + e^{-iz\Lambda(t)}f_t''(z)\right]. \tag{3}$$

Обозначим

$$P(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k \qquad \text{и} \qquad Q(s) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k s^k,$$

где

$$q_k = P\{\xi_l > k\} = \sum_{j=k+1}^{\infty} p_j.$$

Известно, что характеристическая функция $f_t(z)$ является коэффициентом при s^{t-1} в разложении выражения

$$\frac{1-P(s)}{(1-s)(1-e^{iz}P(s))}=\frac{Q(s)}{1-e^{iz}P(s)} \tag{4}$$

по степеням s (см. [1], теорема 8). Отсюда нетрудно видеть, что производные $f'_t(iz)$ и $f''_t(iz)$ являются коэффициентами при s^{t-1} соответственно в разложении выражений

$$\left[\frac{Q(s)}{1-e^{iz}P(s)}\right]'_{iz}=\frac{e^{iz}P(s)\,Q(s)}{[1-e^{iz}P(s)]^2}$$

и (5)

$$\left[\frac{Q(s)}{1-e^{iz}P(s)}\right]''_{iz}=\frac{e^{iz}P(s)\,Q(s)}{[1-e^{iz}P(s)]^2}+2\frac{e^{2iz}P^2(s)\,Q(s)}{[1-e^{iz}P(s)]^3}$$

по степеням s. Но, так как нас будут интересовать только коэффициенты при s^{t-1}, то вместо выражений (4) и (5) мы можем рассмотреть выражения

$$\frac{Q_t(s)}{1-e^{iz}P_t(s)}, \qquad \frac{e^{iz}P_t(s)\,Q_t(s)}{[1-e^{iz}P_t(s)]^2}$$

и (6)

$$\frac{e^{iz}P_t(s)\,Q_t(s)}{[1-e^{iz}P_t(s)]^2}+2\frac{e^{2iz}P_t^2(s)\,Q_t(s)}{[1-e^{iz}P_t(s)]^3},$$

где

$$P_t(s)=\sum_{k=1}^{t}s^kp_k, \qquad Q_t(s)=\sum_{k=1}^{t}s^kq_k.$$

Пусть, далее, $s_t(z)$ является корнем уравнения

$$1-e^{iz}P_t(s)=0, \tag{7}$$

т. е. $1-e^{iz}P_t\Big(s_t(z)\Big)\equiv 0$. Нетрудно видеть, что при $z=0$ уравнение (7) имеет наименьший по модулю положительный корень $s_t(0)$, удовлетворяющий неравенствам

$$1<s_t(0)=1+\delta_t\leqslant\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{t}p_k}=1+o\left(\frac{1}{t^2}\right). \tag{8}$$

Далее, так как $P'_t\Big(s_t(0)\Big)\neq 0$, то $s_t(0)$ является простым корнем. Следовательно, мы можем воспользоваться свойствами неявных функций (см., напр., [6], стр. 95–102), согласно которым существует такое число $\Delta_t>0$, что уравнение (7) определяет в интервале $[-\Delta_t,\ \Delta_t]$ однозначную, непрерывную и дважды дифференцируемую функцию $s=s_t(z)$, обращающую это уравнение в тождество и удовлетворяющую равенство $s_t(0)=1+\delta_t$. Вместо интервала $[-\Delta_t,\ \Delta_t]$ можно взять интервал, в котором

$$[1-e^{iz}P_t(s)]'_s\neq 0.$$

Так как $P'_t(s)\neq 0$ для всех $s\in\left\{s:|s|<1+\frac{\bar\Delta_t^2}{2},\ |\arg s|\leqslant\bar\Delta_t\right\}$, где

$$\bar\Delta_t=\sqrt{\frac{c\ln t}{\sqrt{t}}},\quad c=\min(1,\ \mu_1),$$

то вместо интервала $[-\Delta_t, \Delta_t]$ можно, например, взять интервал $[-\bar{\Delta}_t, \bar{\Delta}_t]$ Тогда при всех $|z| \leqslant \bar{\Delta}_t$ справедливо разложение

$$s_t(z) = 1 + \delta_t + s_t'(0)z + s_t''(0)\frac{z^2}{2} + o(z^2) =$$

$$= 1 + \delta_t - \frac{1}{m_t} iz - \frac{P_t''(1+\delta_t) - m_t^2}{m_t^3} \frac{(iz)^2}{2} + o(z^2) =$$

$$= 1 - \frac{1}{\mu_1} iz - \frac{\sigma^2 - \mu_1}{\mu_1^3} \frac{(iz)^2}{2} + \delta_t + o\left(\frac{|z|}{t} + z^2\right), \tag{9}$$

где

$$m_t = \sum_{k=1}^{t} kp_k = Q_t(1) = \mu_1 + o\left(\frac{1}{t}\right)$$

и

$$\sigma^2 = \mu_2 - \mu_1^2.$$

Имеем, что при $|z| \leqslant \bar{\Delta}_t$ $P_t'\left(s_t(z)\right) \neq 0$ и $Q_t\left(s_t(z)\right) \neq 0$. Следовательно, при тех же z

$$\frac{Q_t(s)}{1 - e^{iz}P_t(s)} = e^{-iz} \frac{Q_t(s)}{P_t\left(s_t(z)\right) - P_t(s)} = e^{-iz} \frac{Q_t\left(s_t(z)\right)}{P_t'\left(s_t(z)\right)} \cdot \frac{1}{s_t(z) - s} \times$$

$$\times \left[1 + \frac{Q_t'\left(s_t(z)\right) P_t'\left(s_t(z)\right) - \frac{1}{2} Q_t\left(s_t(z)\right) P_t''\left(s_t(z)\right)}{Q_t\left(s_t(z)\right) P_t'\left(s_t(z)\right)} \left(s_t(z) - s\right) + o\left(\left|s_t(z) - s\right|\right)\right]. \tag{10}$$

Теперь можем уже найти характеристическую функцию $f_t(z)$ как коэффициент при s^{t-1} правой части выражения (10). Итак, при всех $|z| \leqslant \bar{\Delta}_t$

$$f_t(z) = e^{-iz} \frac{Q_t\left(s_t(z)\right)}{P_t'\left(s_t(z)\right)} s_t^{-t}(z) \left[1 + o\left(\frac{1}{t}\right)\right]. \tag{11}$$

Приступим к отысканию функций $f_t'(iz)$ и $f_t''(iz)$. Имеем, что (см. (6))

$$\frac{e^{iz} P_t(s) Q_t(s)}{[1 - e^{iz}P_t(s)]^2} = \frac{Q_t(s)}{[1 - e^{iz}P_t(s)]^2} - \frac{Q_t(s)}{1 - e^{iz}P_t(s)}$$

и

$$\frac{e^{iz}P_t(s) Q_t(s)}{[1 - e^{iz}P_t(s)]^2} + 2 \frac{e^{2iz}P_t^2(s) Q_t(s)}{[1 - e^{iz}P_t(s)]^3} =$$

$$= 2 \frac{Q_t(s)}{[1 - e^{iz}P_t(s)]^3} - 3 \frac{Q_t(s)}{[1 - e^{iz}P_t(s)]^2} + \frac{Q_t(s)}{1 - e^{iz}P_t(s)}.$$

Но,

$$\frac{Q_t(s)}{[1 - e^{iz}P_t(s)]^2} = e^{-2iz} \frac{Q_t(s)}{\left[P_t\left(s_t(z)\right) - P_t(s)\right]^2} = e^{-2iz} \frac{Q_t\left(s_t(z)\right)}{P_t'^2\left(s_t(z)\right)\left(s_t(z) - s\right)^2} -$$

$$- e^{-2iz} \frac{Q_t'\left(s_t(z)\right) P_t'\left(s_t(z)\right) - Q_t\left(s_t(z)\right) P_t''\left(s_t(z)\right)}{P_t'^3\left(s_t(z)\right)\left(s_t(z) - s\right)} + o\left(\left|\frac{1}{s_t(z) - s}\right|\right)$$

и

$$\frac{Q_t(s)}{[1-e^{iz}P_t(s)]^3}=e^{-3iz}\frac{Q_t\left(s_t(z)\right)}{P_t'^3\left(s_t(z)\right)\left(s_t(z)-s\right)^3}-$$

$$-e^{-3iz}\frac{Q_t'\left(s_t(z)\right)P_t'\left(s_t(z)\right)-\frac{3}{2}Q_t\left(s_t(z)\right)P_t''\left(s_t(z)\right)}{P_t'^4\left(s_t(z)\right)\left(s_t(z)-s\right)^2}+o\left(\frac{1}{\left(s_t(z)-s\right)^2}\right).$$

Следовательно, для всех $|z|\leqslant\bar{\Delta}_t$

$$f_t'(iz)=e^{-2iz}t\frac{Q_t\left(s_t(z)\right)}{P_t'^2\left(s_t(z)\right)}s_t^{-t-1}(z)-e^{-2iz}\times$$

$$\times\frac{Q_t'\left(s_t(z)\right)P_t'\left(s_t(z)\right)-Q_t\left(s_t(z)\right)P_t''\left(s_t(z)\right)}{P_t'^3\left(s_t(z)\right)}s_t^{-t}(z)-$$

$$-e^{-iz}\frac{Q_t\left(s_t(z)\right)}{P_t'\left(s_t(z)\right)}s_t^{-t}(z)+o\left(s_t^{-t}(z)\right) \tag{12}$$

и

$$f_t''(iz)=2e^{-3iz}\frac{Q_t\left(s_t(z)\right)}{P_t'^3\left(s_t(z)\right)}\cdot\frac{t(t+1)}{2}s_t^{-t-2}(z)-$$

$$-2e^{-3iz}\frac{Q_t'\left(s_t(z)\right)P_t'\left(s_t(z)\right)-\frac{3}{2}Q_t\left(s_t(z)\right)P_t''\left(s_t(z)\right)}{P_t'^4\left(s_t(z)\right)}ts_t^{-t-1}(z)-$$

$$-3e^{-2iz}\frac{Q_t\left(s_t(z)\right)}{P_t'^2\left(s_t(z)\right)}ts_t^{-t-1}(z)+o\left(ts_t^{-t}(z)\right). \tag{13}$$

Далее находим, что при $|z|\leqslant\bar{\Delta}_t$

$$P_t'\left(s_t(z)\right)=\mu_1+(\mu_2-\mu_1)iz+o\left(\frac{1}{t}+|z|\right),$$

$$\frac{Q_t\left(s_t(z)\right)}{P_t'^3\left(s_t(z)\right)}=\frac{1}{\mu_1^3}-5\frac{\mu_2-\mu_1}{2\mu_1^4}iz+o\left(\frac{1}{t}+|z|\right),$$

$$\frac{Q_t'\left(s_t(z)\right)P_t'\left(s_t(z)\right)-Q_t\left(s_t(z)\right)P_t''\left(s_t(z)\right)}{Q_t\left(s_t(z)\right)}=-\frac{1}{2}(\mu_2-\mu_1)+o(1) \tag{14}$$

и

$$\frac{Q_t'\left(s_t(z)\right)P_t'\left(s_t(z)\right)-\frac{3}{2}Q_t\left(s_t(z)\right)P_t''\left(s_t(z)\right)}{P_t'\left(s_t(z)\right)Q_t\left(s_t(z)\right)}=-\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_1}+o(1).$$

Согласно (9) существуют такое положительное число c_1 и такие достаточно большие конечные числа t_0 и n_0, что при всех $t\geqslant t_0$ и $n\geqslant n_0$ для всех

$$|z|\leqslant\frac{Z}{\sigma\sqrt{nt}},$$

где Z любое положительное конечное число, будет иметь место неравенство

$$|s_t(z)| > 1 - \frac{1}{\mu_1}\,\frac{Z}{\bar\sigma\sqrt{nt}} - 2\,\frac{|\sigma^2-\mu_1|}{\mu_1^3}\,\frac{Z^2}{\bar\sigma^2 nt} > c_1 > 0.$$

Следовательно, для всех $t \geqslant t_0$, $n \geqslant n_0$ и z, лежащих в интервале

$$|z| \leqslant \frac{Z}{\bar\sigma\sqrt{nt}},$$

$s_t(z)$ отлична от нуля и

$$s_t^{-t}(z) = \exp\left\{-t\ln\left[1 - \frac{1}{\mu_1}iz - \frac{\sigma^2-\mu_1}{\mu_1^3}\,\frac{(iz)^2}{2} + \delta_t + o\left(\frac{|z|}{t} + z^2\right)\right]\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{t}{\mu_1}iz + t\,\frac{\bar\sigma^2}{2}(iz)^2 + o\left(\frac{1}{t} + |z| + tz^2\right)\right\}. \qquad (15)$$

Отметим еще, что при предположениях нашей теоремы

$$\Lambda(t) = \frac{t}{\mu_1} + \frac{1}{2}\,\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_1^2} - 1 + o(1)$$

и

$$\mathrm{M}\big(N_t(t) - \Lambda(t)\big)^2 = t\,\frac{\sigma^2}{\mu_1^3} + o(t) = t\bar\sigma^2 + o(t) \qquad (16)$$

(см. [1], теорема 9).

В силу соотношений (3), (11)—(16) для всех z, заключенных в интервале $|z| \leqslant \dfrac{Z}{\bar\sigma\sqrt{nt}}$, и достаточно больших t и n имеем, что

$$f_t''(iz) = e^{-iz\Lambda(t)}e^{-iz}\frac{Q_t\big(s_t(z)\big)}{P_t'^3\big(s_t(z)\big)}s_t^{-t-2}(z)\Big[\Lambda^2(t)s_t^2(z)P_t'^2\big(s_t(z)\big) -$$

$$- 2\Lambda(t)e^{-iz}tP_t'\big(s_t(z)\big)s_t(z) + 2\Lambda(t)P_t'^2\big(s_t(z)\big)s_t^2(z)\Big) +$$

$$+ 2\Lambda(t)e^{-iz}\frac{Q_t'\big(s_t(z)\big)P_t'\big(s_t(z)\big) - Q_t\big(s_t(z)\big)P_t''\big(s_t(z)\big)}{Q_t\big(s_t(z)\big)}s_t^2(z) + 2e^{-2iz}\frac{t(t+1)}{2} -$$

$$- 2e^{-2iz}t\,\frac{Q_t'\big(s_t(z)\big)P_t'\big(s_t(z)\big) - \frac{3}{2}Q_t\big(s_t(z)\big)P''\big(s_t(z)\big)}{P_t'\big(s_t(z)\big)Q_t\big(s_t(z)\big)}s_t(z) -$$

$$- 3e^{-iz}tP_t'\big(s_t(z)\big)s_t(z) + o(t)\Big] =$$

$$= \left(\frac{1}{\mu_1} + o(1)\right)\exp\left\{-iz\,\frac{\mu_2-3\mu_1}{\mu_1^2} + (t+2)\bar\sigma^2\frac{(iz)^2}{2} + o\left(\frac{1}{t} + |z| + tz^2\right)\right\}\times$$

$$\times\left\{t^2\left[\frac{P_t'\big(s_t(z)\big)}{\mu_1} - 1\right]^2 + 2t\left[\frac{\mu_2-\mu_1}{2\mu_1^2} - 1 + o(1)\right]P_t'\big(s_t(z)\big)\left[\frac{P_t'\big(s_t(z)\big)}{\mu_1} - 1\right] +\right.$$

$$\left. + t\,\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_1} + O(t|z|) + o(t)\right\} = t\bar\sigma^2 + O(t|z|) + o(t).$$

Отсюда и из (16) для всех z, лежащих в произвольном конечном интервале $|z| \leqslant Z$, и всех достаточно больших t и n получаем

$$\bar{f}_t''\left(\vartheta \frac{z}{\sigma\sqrt{nt}}\right) - \bar{f}_t''(0) = O\left(\frac{t|z|}{\sqrt{nt}}\right) + o(t). \tag{17}$$

Далее, из (2), (16) и (17) находим, что для всех $|z| \leqslant Z$ и достаточно больших n и t

$$\bar{f}_t\left(\frac{z}{\sigma\sqrt{nt}}\right) = 1 - \frac{z^2}{2n} - R_{n,t}(z), \tag{18}$$

где

$$R_{n,t}(z) = O\left(\frac{z^3}{n\sqrt{nt}}\right) + o\left(\frac{z^2}{n}\right).$$

Значит, для всех z, заключенных в любом конечном интервале $|z| \leqslant Z$, и достаточно больших t и n $\bar{f}_t\left(\frac{z}{\sigma\sqrt{nt}}\right)$ отлична от нуля, и из соотношений (1) и (18) окончательно получаем

$$\lim_{n,t\to\infty} \ln f_{n,t}(z) = \lim_{n,t\to\infty} n \ln\left[1 - \left(\frac{z^2}{2n} + R_{n,t}(z)\right)\right] = -\frac{z^2}{2}.$$

Теорема доказана.

В заключение автор выражает глубокую благодарность В. А. Статулявичюсу за постановку задачи.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР
Вильнюсский Государственный
педагогический институт

Поступило в редакцию
1.II.1967

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Feller, Fluctuation theory of recurrent events, Trans. Amer. Math. Soc., **67**, 98—119, (1949).
2. Б. Григелионис, О центральной предельной теореме для сумм процессов восстановления, Лит. мат. сб., **IV**, 2, 197—201 (1964).
3. В. Лютикас, О центральной предельной теореме для сумм дискретных процессов восстановления, Лит. мат. сб., **VI**, 3 (1966).
4. А. Алешкявичене, Асимптотическое разложение для распределения числа появлений рекуррентного события, Лит. мат. сб., **VI**, 1, (1966), **VII**, 1 (1967).
5. А. Алешкявичене, Большие уклонения для числа появлений рекуррентного события, Лит. мат. сб., **VII**, 2 (1967).
6. Справочная математическая библиотека, Математический анализ, дифференцирование и интегрирование, Физматгиз, 95—102 (1961).

CENTRINĖ RIBINĖ TEOREMA DISKRETINIŲ ATSTATYMO PROCESŲ SUMOMS

A. ALEŠKEVIČIENĖ

(Reziumė)

Sakysime, turime seką $\{\xi_l\}$ nepriklausomų neneigiamų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių, priimančių tik sveikas reikšmes k su tikimybėmis $p_k = P\{\xi_l = k\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $l = 1, 2, \ldots$,

Žymėsime

$$F(x)=P\{\xi_l<x\}, \qquad \mu_r=\sum_{k=0}^{\infty} k^r p_k,$$

$$S_0=0, \qquad S_m=\sum_{l=1}^{m}\xi_l, \qquad m=1,\ 2,\ \ldots$$

Atsitiktinį procesą $N(t)$, $t=0,\ 1,\ 2,\ldots$, vadiname diskretiniu atstatymo procesu, kai $N(t)=\max\{m: S_m\leqslant t-1\}$.

Darbe nagrinėjama seka $\{N_l(t)\}$ nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių diskretinių atstatymo procesų. Įrodoma: jei $\mu_2<\infty$, tai tolygiai x atžvilgiu

$$\lim_{n,\, t\to\infty} P\left\{\frac{1}{\bar\sigma\sqrt{nt}}\sum_{l=1}^{n}\left(N_l(t)-\Lambda(t)\right)<x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}du.$$

Čia

$$\Lambda(t)=MN_l(t), \qquad \bar\sigma^2=\frac{\mu_2-\mu_1^2}{\mu_1^3}.$$

THE CENTRAL LIMIT THEOREMS FOR SUMS OF THE DISCRETE RENEWAL PROCESSES

A. ALEŠKEVIČIENĖ

(*Summary*)

Let $\{\xi_l\}$ be a sequence of independent nonnegative equally distributed random variables, having only integer values k with probabilities $p_k=P\{\xi_l=k\}$ $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$ $l=1,\ 2,\ldots$

Let

$$F(x)=P\{\xi_l<x\}, \qquad \mu_r=\sum_{k=0}^{\infty} k^r p_k,$$

$$S_0=0, \qquad S_m=\sum_{l=1}^{m}\xi_l, \qquad m=1,\ 2,\ \ldots$$

The stochastic process $N(t)=\max\{m: S_m\leqslant t-1\}$, $t=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$. is called the discrete renewal process.

The sequence $\{N_e(t)\}$ of the independent equally distributed discrete renewal processes is examined in this paper. We prove that if $\mu_2<\infty$ then

$$\lim_{n,\, t\to\infty} P\left\{\frac{1}{\bar\sigma\sqrt{nt}}\sum_{l=1}^{n}\left(N_l(t)-\Lambda(t)\right)<x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}du$$

uniformly with respect to x, where

$$\Lambda(t)=MN_l(t), \qquad \bar\sigma^2=\frac{\mu_2-\mu_1^2}{\mu_1^3}.$$