LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VII Nr. 3, 1968
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VII № 3, 1968

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ МИНИМАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

А. В. АГАЛЬЦЕВ, М. П. САПАГОВАС

В последнее время в строительной практике при покрытии больших площадей все чаще сооружаются покрытия в виде поверхностей двоякой кривизны. К этим поверхностям принадлежат и занимают среди них особое место так называемые минимальные поверхности. Однако, несмотря на целый ряд ценных свойств, минимальные поверхности не нашли, насколько нам известно, применения в практике сооружения покрытий вантового типа, где они сделали бы эту конструкцию еще более экономичной [1]. Одной из основных причин этого является трудность их графического изображения, а вместе с этим и их расчета.

Трудность графического изображения таких поверхностей с заранее известным контуром (чего требует практика строительного производства) связана с тем, что минимальная поверхность математически описывается уравнением

$$z_{xx}(1+z_y^2)-2z_{xy}z_xz_y+z_{yy}(1+z_x^2)=0, \qquad (1)$$

где $z=z(x, y)$, для которого до сих пор не существует практически пригодных методов решения.

В настоящей работе рассматривается вопрос о решении уравнения минимальной поверхности одним из наиболее распространенных методов решения дифференциальных уравнений — методом конечных разностей.

1. Будем рассматривать уравнение минимальной поверхности, записанное в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu p)+\frac{\partial}{\partial y}(\mu q)=0, \qquad (2)$$

где

$$\mu=(1+p^2+q^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad p=\frac{\partial z}{\partial x}, \quad q=\frac{\partial z}{\partial y},$$

эквивалентном виду (1). Уравнение (2) принадлежит к классу так называемых квазилинейных эллиптических уравнений с дивергентной главной частью. Для указанного класса уравнений при соответствующих ограничениях в [2], [3] показана возможность применения метода конечных разностей. Однако уравнение минимальной поверхности не удовлетворяет одному из принятых в [2], [3] ограничений — оно не является равномерно эллиптическим уравнением, т. е. оно вырождается при

$$p^2+q^2\to\infty.$$

В данной работе мы обобщим результаты указанных выше работ на случай уравнения минимальной поверхности и рассмотрим некоторые вопросы, связанные с практическим решением этого уравнения методом конечных разностей.

Будем искать приближенное решение уравнения (2), удовлетворяющее краевому условию

$$z|_{\Gamma}=\varphi(x,\ y), \tag{3}$$

где Γ — граница области Ω на плоскости $x0y$, в которой ищется решение. Кривую Γ можно рассматривать как проекцию пространственной кривой, определяемой функцией $\varphi(x,\ y)$, на которую натянута искомая минимальная поверхность.

2. Покроем область Ω квадратной сеткой с шагом h и аппроксимируем каким-либо образом границу Γ области Ω замкнутой ломаной линией, состоящей из сторон квадратов сетки (рис. 1). Совокупность узлов сетки, находящихся внутри области, ограниченной ломаной, обозначим через Ω_h. Узлы сетки, расположенные на ломаной линии, назовем граничными узлами и обозначим через

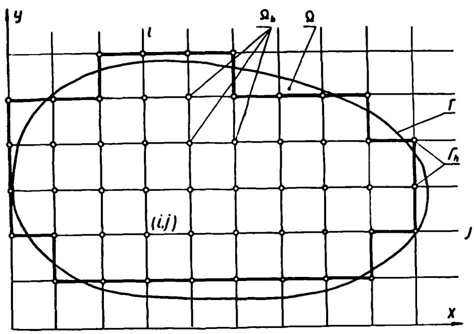

Рис. 1

Γ_h. Занумеруем обычным образом строки и столбцы области $\bar{\Omega}_h=\Omega_h+\Gamma_h$, например, снизу вверх и слева направо. Узлы области $\bar{\Omega}_h$ будем обозначать $(x_i,\ y_j)$ или просто $(i,\ j)$, понимая под этим узел на пересечении i-ого столбца и j-ой строки.

Заменим производные, входящие в уравнение (2), следующими разностями:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu p)\approx h^{-2}\left[\mu_{i+\frac{1}{2},j}z_{i+1,j}-\left(\mu_{i+\frac{1}{2},j}+\mu_{i-\frac{1}{2},j}\right)z_{i,j}+\mu_{i-\frac{1}{2},j}z_{i-1,j}\right],$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu q)\approx h^{-2}\left[\mu_{i,j+\frac{1}{2}}z_{i,j+1}-\left(\mu_{i,j+\frac{1}{2}}+\mu_{i,j-\frac{1}{2}}\right)z_{i,j}+\mu_{i,j-\frac{1}{2}}z_{i,j-1}\right].$$

Подставив эти выражения в уравнение (2), получаем разностное уравнение:

$$\Lambda_h(z_{i,j})\equiv\mu_{i+\frac{1}{2},j}z_{i-1,j}+\mu_{i-\frac{1}{2},j}z_{i-1,j}+\mu_{i,j+\frac{1}{2}}z_{i,j+1}+\mu_{i,j-\frac{1}{2}}z_{i,j-1}-$$

$$-\left(\mu_{i+\frac{1}{2},j}+\mu_{i-\frac{1}{2},j}+\mu_{i,j+\frac{1}{2}}+\mu_{i,j-\frac{1}{2}}\right)z_{i,j}=0,\quad (i,\ j)\in\Omega_h. \tag{4}$$

Вместо краевого условия (3) возьмем следующее аппроксимирующее его выражение:

$$z_{i,j}=\varphi_{i,j}, \quad (i, j)\in\Gamma_h. \tag{5}$$

Значение μ определим одним из двух способов

$$\mu_{i+\frac{1}{2},j}=\mu_{i,j+\frac{1}{2}}=\left[1+\left(\frac{z_{i+1,j}-z_{i,j}}{h}\right)^2+\left(\frac{z_{i,j+1}-z_{i,j}}{h}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}, \tag{6a}$$

либо

$$\left.\begin{aligned}\mu_{i+\frac{1}{2},j}&=\left[1+\left(\frac{z_{i+1,j}-z_{i,j}}{h}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{z_{i+1,j}-z_{i+1,j-1}}{h}+\frac{z_{i,j+1}-z_{i,j}}{h}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}},\\ \mu_{i,j+\frac{1}{2}}&=\left[1+\frac{1}{4}\left(\frac{z_{i+1,j}-z_{i,j}}{h}+\frac{z_{i,j+1}-z_{i-1,j+1}}{h}\right)+\left(\frac{z_{i,j+1}-z_{i,j}}{h}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned}\right\} \tag{6в}$$

Уравнение (4), (5), (6а) или (4), (5), (6в), записанные для каждой точки области $\bar{\Omega}_h$, представляют сабой систему нелинейных алгебраических уравнений, число которых равно числу неизвестных $z_{i,j}$, т. е. числу внутренних точек области Ω_h. Заметим, что в каждое уравнение системы входит не более семи неизвестных (рис. 2). Если часть узлов, соседних для (i, j), лежит на Γ_h, то число неизвестных в уравнении, записанном для точки (i, j) соответственно уменьшится.

Как с теоретической, так и с практической точки зрения при применении метода конечных разностей возникают два основных вопроса:

1) как находить решение полученной системы нелинейных уравнений, если такое решение существует и является единственным (вопрос о разрешимости и методе решения разностной схемы);

2) будет ли решение системы разностных уравнений сходиться к решению дифференциального уравнения при $h\to 0$ (вопрос о сходимости разностной схемы).

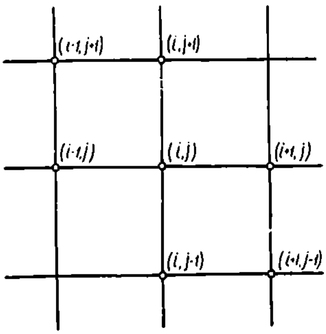

Рис. 2

Практически вместо второго вопроса часто бывает более важно уметь оценить разность между решениями разностной и дифференциальной задачами при конкретном h.

3. Рассмотрим вопрос о решении полученной системы нелинейных разностных уравнений.

В работе [2] показано, что применение метода конечных разностей для более общего уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(a_1(x, y, z, p, q)\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(a_2(x, y, z, p, q)\right)+a_0(x, y, z, p, q)=0$$

можно полностью обосновать, если это уравнение удовлетворяет следующим условиям: для любых вещественных ξ_i и любых z, p_1 и p_2 выполняется неравенство

$$\alpha \sum_{i=0}^{2} \xi_i^2 \leqslant \sum_{i,\, j=0}^{2} \frac{\partial a_i}{\partial p_j} \xi_i \xi_j \leqslant \beta \sum_{i=0}^{2} \xi_i^2, \tag{7}$$

где $p_0 = z$, $\quad p_1 = \dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\quad p_2 = \dfrac{\partial z}{\partial y}$, α и β положительные постоянные, т. е.

$$0 < \alpha \leqslant \beta < \infty.$$

При выполнении условий (7) система разностных уравнений (4), (5), (6а) имеет единственное решение, которое сходится в среднем к решению дифференциального уравнения при $h \to 0$. Это решение можно находить итерационным процессом:

$$\begin{gathered} \Delta_h z_{i,\, j}^{n+1} = \Delta_h z_{i,\, j}^{(n)} - \lambda \Lambda_h (z_{i,\, j}^{(n)}), \quad (i,\ j) \in \Omega_h, \\ z_{i,\, j}^{(n+1)} = \varphi_{i,\, j}, \quad (i,\ j) \in \Gamma_h, \end{gathered} \tag{8}$$

где

$$\Delta_h z_{i,\, j} = z_{i+1,\, j} + z_{i-1,\, j} + z_{i,\, j+1} + z_{i,\, j-1} - 4 z_{i,\, j}$$

является обычным пятиточечным разностным оператором Лапласа. Этот процесс, при выполнении условия

$$0 < \lambda < \frac{2}{\beta\,(1 + a^2)},$$

где a — сторона наибольшего описанного вокруг области Ω квадрата, сходится, начиная с любого начального приближения $z_{i,\, j}^{(0)}$, удовлетворяющего граничному условию (5), со скоростью геометрической прогрессии с некоторым знаменателем $0 < q < 1$, не зависящим от h.

Аналогичное утверждение имеет место и для системы разностных уравнений (4), (5), (6в).

В случае уравнения минимальной поверхности имеем

$$a_1 = p\,(1 + p^2 + q^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad a_2 = q\,(1 + p^2 + q^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad a_0 = 0,$$

и вместо условий (7) получаем

$$(1 + p^2 + q^2)^{-\frac{3}{2}} \sum_{i=1}^{2} \xi_i^2 \leqslant \sum_{i,\, j=1}^{2} \frac{\partial a_i}{\partial p_j} \xi_i \xi_j \leqslant (1 + p^2 + q^2)^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{2} \xi_i^2.$$

Следовательно, $\alpha = \min\limits_{p,q} (1 + p^2 + q^2)^{-\frac{3}{2}} \to 0$ при $p^2 + q^2 \to \infty$. При этом заметим, что если для уравнения (2) имеет место априорная оценка (см., напр., [4]):

$$p^2 + q^2 \leqslant M < \infty, \tag{9}$$

где M — сколь угодно большая положительная постоянная, то

$$\alpha = (1 + M)^{-\frac{3}{2}} > 0.$$

В случае наличия априорной оценки (9) для уравнения минимальной поверхности мы дополнительно предполагаем, что начальное приближение $z_{i,j}^{(0)}$

удовлетворяет условию (9), где в левую часть вместо производных подставлены соответствующие разности:

$$\left(\frac{z^{(0)}_{i+1,j}-z^{(0)}_{i,j}}{h}\right)^2+\left(\frac{z^{(0)}_{i,j+1}-z^{(0)}_{i,j}}{h}\right)\leqslant M. \tag{10}$$

Если теперь предположить, что при осуществлении итерационного процесса (8) все последующие приближения $z^{(n)}_{i,j}$ также удовлетворяют условию (10), то остаются в силе все результаты работ [2], [3]; в частности, итерационный процесс (8) сходится к решению системы нелинейных разностных уравнений, а решение этой системы при $h\to 0$ сходится в среднем к решению дифференциального уравнения.

Следует заметить, что вместо условия (10) достаточно потребовать несколько меньшего: именно, чтобы начальное приближение $z^{(0)}_{i,j}$ и все последующие приближения $z^{(n)}_{i,j}$ удовлетворяли условию

$$\sqrt{\frac{1}{N}\sum\left[\left(\frac{z^{(n)}_{i+1,j}-z^{(n)}_{i,j}}{h}\right)^2+\left(\frac{z^{(n)}_{i,j+1}-z^{(n)}_{i,j-1}}{h}\right)^2\right]}\leqslant M, \tag{10a}$$

где N — число внутренних точек Ω_h, а суммирование проходит по всем узлам области Ω_h, в которых выражение под суммой имеет смысл.

Вопрос выбора $z^{(0)}_{i,j}$, обеспечивающего выполнения условия (10а) для всех последующих $z^{(n)}_{i,j}$ в более общем виде рассмотрен в [5]. Не касаясь подробностей этого вопроса, отметим лишь, что итерационный процесс будет сходиться, если начальное приближение достаточно близко к точному. С другой стороны, условие (10а), в случае выполнения условия (9), не является слишком ограничительным, так что практически можно ожидать сходимости итерационного процесса при почти произвольном выборе $z^{(0)}_{i,j}$.

Таким образом, для нахождения решения системы нелинейных разностных уравнений (4), (5), (6а), или (4), (5), (6в) приходится осуществить итерационный процесс (8), на каждом шаге которого необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений типа

$$\Delta_h z^{(n+1)}_{i,j}=f_{i,j}, \tag{11}$$

где $f_{i,j}$ — известная функция. Эта система есть не что иное, как разностный аналог уравнения Пуассона со специально подобранной правой частью. Решение этой системы может быть получено одним из многих методов, пригодных для этой цели (см., напр., [6]).

4. Остановимся на некоторых вопросах сходимости разностной схемы и оценке погрешности.

Обратим внимание на то, что говоря о сходимости разностной схемы, речь идет о сходимости в среднем. Это означает, что если обозначить $z_{hi,j}$ — решение разностной задачи в точке (i, j), а через $z_{i,j}$ — решение дифференциальной задачи в той же точке, то

$$\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{(i,j)\in\bar{\Omega}_h}(z_{hi,j}-z_{i,j})^2}\to 0 \quad \text{при } h\to 0.$$

Отсюда еще не следует равномерная сходимость, т. е. выполнение условия

$$\max_{(i,j)\in\bar{\Omega}_h}|z_{hi,j}-z_{i,j}|\to 0 \quad \text{при } h\to 0.$$

Для установления последнего факта требуются более глубокие теоретические исследования, хотя практически может оказаться, что равномерная сходимость имеет место в довольно широких пределах, в случае существования достаточно гладкого решения дифференциальной задачи.

Как уже отмечалось, практически большую важность имеет вопрос об оценке погрешности $\varepsilon = z_h - z$. В случае разностной схемы (4), (5), (6а) в работе [2] показано, что

$$\| z_h - z \| \leqslant c_1 h,$$

где C_1 – некоторая постоянная, не зависящая от h, а норма понимается как длина вектора в N-мерном евклидовом пространстве.

В случае разностной схемы (4), (5), (6в) в работе [3] установлено, что

$$\| z_h - z \| \leqslant c_2 h^2$$

при условии, если аппроксимация краевого условия (3) условием (5) не вносит дополнительной погрешности, что может иметь место, например, в случае прямоугольного контура Г.

5. При практической реализации описанного выше метода важен выбор такого параметра λ, который бы обеспечил наибольшую скорость сходимости итерационного процесса (8). Так как теоретически выбор оптимального параметра λ трудно осуществить, представляет определенный интерес вопрос его практического выбора. Ввиду того, что λ не зависит от h, экспериментальным путем можно выбрать оптимальный λ при большом h (при малом числе внутренних точек) путем подбора и использовать его при решении задачи с нужным h. Такое, казалось бы излишнее, решение задачи при большом h полностью оправдывает себя, так как при уменьшении h резко возрастает число арифметических операций, а уменьшение числа итераций при малом h даже на несколько единиц существенно сокращает машинное время.

Практическое решение уравнений минимальных поверхностей на ЭЦВМ для разных в плане контуров по изложенному здесь методу будет опубликовано отдельно.

Киевский инженерно-строительный институт
Институт физики и математики Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию 25.I.1967

ЛИТЕРАТУРА

1. О. Фрей, Висячие покрытия, Госиздат литературы по строительству, архитектуре и строительным материалам. М., 1960.
2. М. П. Сапаговас, Решение квазилинейных эллиптических уравнений методом конечных разностей, Лит. мат. сб., V, № 2, 291—302. (1965).
3. М. П. Сапаговас, К вопросу о решении квазилинейных эллиптических уравнений методом конечных разностей, Лит. мат. сб., V, № 4, 637—643 (1965).
4. И. Я. Бакельман, Геометрические методы решения эллиптических уравнений, М., «Наука», 1965.
5. М. Н. Яковлев, О некоторых методах решения нелинейных уравнений, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. LXXXIV, 8—40 (1965).
6. В. Вазов, Дж. Форсайт, Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных, М., ИЛ, 1963.

MINIMALAUS PAVIRŠIAUS LYGTIES SPRENDIMAS BAIGTINIŲ SKIRTUMŲ METODU

A. AGALCEVAS, M. SAPAGOVAS

(Reziumė)

Straipsnyje nagrinėjamas Dirichle uždavinio minimalaus paviršiaus lygčiai sprendimas. Įrodytas skirtuminės schemos konvergavimas ir nurodytas iteracinis metodas netiesinių skirtuminių lygčių sistemai spręsti.

THE SOLUTION OF THE EQUATION OF MINIMAL SURFACE BY FINITE-DIFFERENCE METHOD

A. AGALCEV, M. SAPAGOVAS

(Summary)

The paper deals with the solution of the Dirichlet's problem for the equation of minimal surface. The convergence of the difference scheme is proved and iterative method for the solution of the system of the nonlinear difference equations is given.

1