LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VII Nr. 2, 1967
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VII № 2, 1967

ОДНА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА С ВЫБОРОМ МОМЕНТА ВРЕМЕНИ

И. П. ЯЧЯУСКАС

Рассматривается антагонистическая игра Г, которая является моделью преследования с выстрелом.

Две точки, преследователь P и преследуемый E, обладая постоянными скоростями v и u $(v>u)$, перемещаются на плоскости, имея при этом возможность в каждый момент времени менять направление своего движения, т.е. движения точек $P(x, y)$ и $E(\xi, \eta)$ описываются дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v\cos\varphi, \\ \dot{y} &= v\sin\varphi, \\ \dot{\xi} &= u\cos\psi, \\ \dot{\eta} &= u\sin\psi, \end{aligned} \tag{1}$$

где φ и ψ – управляющие параметры (см. [1]).

Игрок P имеет один выстрел и стремится уничтожить игрока E. Вероятность попадания $p(\rho)$ $\left(p(0)=1\right)$ зависит от расстояния ρ между игроками во время выстрела. Если игрок P поражает игрока E в точке $E(\xi, \eta)$, то его выигрыш равен $f(\eta)\geqslant -c$. Если игрок P выстрелил и не попал в цель, то он проигрывает $c\geqslant 0$.

Предполагаем, что функция $p(\rho)$ убывающая, функция $f(\eta)$ строго возрастающая (убывающая) и обе функции непрерывные месте с первыми и вторыми производными.

Пусть во время выстрела игроки находятся в точках $P(x, y)$ и $E(\xi, \eta)$. Тогда ожидаемый выигрыш игрока P равен

$$K(x, y, \xi, \eta)=p(\rho)f(\eta)-[1-p(\rho)]\,c=p(\rho)[f(\eta)+c]-c,$$

где

$$\rho=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}.$$

Очевидно, что игрок P должен стрелять когда функция K принимает максимальное значение. Не уменьшая общности, можем считать, что $c=0$.

Из всей области определения функции K выделим область Q, в которой игрок E имеет возможность не позволять игроку P увеличить K. Область Q состоит из всех точек, для которых $\rho=0$, и точек удовлетворяющих неравенству

$$\min_{\psi}\max_{\varphi}(K_x v\cos\varphi+K_y v\sin\varphi+K_\xi u\cos\psi+K_\eta u\sin\psi)\leqslant 0$$

или

$$v\sqrt{K_x^2+K_y^2}-u\sqrt{K_\xi^2+K_\eta^2}\leqslant 0, \tag{2}$$

где K_x, K_y, K_ξ, K_η – соотвествующие частные производные.

Функция K может принять максимальное значение только на границе S области Q. Граница области Q состоит из точек гиперповерхности

$$v\,|p_\rho f| - u\sqrt{p_\rho^2 f^2 + p^2 f_\eta^2 + 2pp_\rho ff_\eta\,\rho^{-1}(\eta - y)} = 0, \tag{3}$$

при $\rho \neq 0$, и точек многообразия $\rho = 0$.

Так как функции $p(\rho)$ и $f(\eta)$ имеют непрерывные производные второго порядка, то гиперповерхность (3) кусочно-гладкая.

Пусть в начале игры игроки находятся в точках $P_0(x_0, y_0)$ и $E_0(\xi_0, \eta_0)$, т. е. в точке $M_0(x_0, y_0, \xi_0, \eta_0)$ пространства R^4. Если точка M_0 принадлежит области Q, то оптимальная стратегия для игрока P – выстрел в начале игры. В противоположном случае игроку P следует закончить игру (т. е. выстрелить) на границе S области Q. Таким образом мы получаем дифференциальную игру с терминальным выигрышем. Для решения таких игр используются методы разработанные Р. Айзексом в [3].

Будем решать игру, когда $p(\rho) = e^{-k\rho}$, $f(\eta) = e^{l\eta}$ и $k, l > 0$.

Элементарными преобразованиями получаем, что область Q определяется неравенством

$$\eta - y \leqslant m\rho,$$

где

$$m = \frac{k^2 + l^2 - d^2 k^2}{2kl}, \quad d = \frac{v}{u},$$

а граница S определяется уравнением

$$\eta - y = m\rho. \tag{4}$$

Если $m \geqslant 1$, то область Q совпадает с пространством R^4, а при $m \leqslant -1$ область Q совпадает с многообразием $\rho = 0$.

Если точка M_0 не принадлежит области Q и игроки действуют оптимально, то игра заканчивается на гиперповерхности (4). Особые точки гиперповерхности составляют многообразие $\rho = 0$.

Рассмотрим два случая.

1. *Игра заканчивается на обыкновенных точках гиперповерхности* (4).

Этот случай возможен только при $|m| < 1$. Обыкновенные точки гиперповерхности (4) удовлетворяют уравнению

$$\eta - y = \frac{m\sigma}{\sqrt{1 - m^2}}(x - \xi), \tag{5}$$

где

$$\sigma = \operatorname{sgn}(x - \xi) \neq 0.$$

Терминальную поверхность (5) параметризируем следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= s_1, \\ y &= s_3 - \frac{m\sigma}{\sqrt{1 - m^2}}(s_1 - s_2), \\ \xi &= s_2, \\ \eta &= s_3. \end{aligned} \tag{6}$$

Выигрыш на поверхности (6):

$$V = \exp\left[-\frac{k\sigma}{\sqrt{1 - m^2}}(s_1 - s_2) + ls_3\right]. \tag{7}$$

Игру с терминальным выигрышем (7) обозначим Γ_1. Если существует непрерывно дифференцируемое по всем переменным значение игры $V(x, y, \xi, \eta)$, то оно должно быть решением задачи Коши для уравнения

$$\frac{V_x^2+V_y^2}{V_\xi^2+V_\eta^2}=\frac{1}{d^2} \tag{8}$$

при граничных условиях (7) на поверхности (6), и оптимальные стратегии имеют вид:

$$\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{V_x}{\sqrt{V_x^2+V_y^2}}, \quad \cos\psi = -\frac{V_\xi}{\sqrt{V_\xi^2+V_\eta^2}}, \\ \sin\varphi &= \frac{V_y}{\sqrt{V_x^2+V_y^2}}, \quad \sin\psi = -\frac{V_\eta}{\sqrt{V_\xi^2+V_\eta^2}}. \end{aligned} \tag{9}$$

Заменяя t через $-\tau$ и подставляя оптимальные стратегии в (1), получаем регрессивные уравнения (см. [3], стр. 81)

$$\begin{aligned} \mathring{x} &= \frac{-vV_x}{\sqrt{V_x^2+V_y^2}}, \quad \mathring{\xi} = \frac{uV_\xi}{\sqrt{V_\xi^2+V_\eta^2}}, \\ \mathring{y} &= \frac{-vV_y}{\sqrt{V_x^2+V_y^2}}, \quad \mathring{\eta} = \frac{uV_\eta}{\sqrt{V_\xi^2+V_\eta^2}} \end{aligned} \tag{10}$$

и

$$\mathring{V}_x=\mathring{V}_y=\mathring{V}_\xi=\mathring{V}_\eta=0, \tag{11}$$

где $\mathring{g}$ обозначает $\frac{dg}{d\tau}$.

Обозначим

$$\exp\left[-\frac{k\sigma}{\sqrt{1-m^2}}(s_1-s_2)+ls_3\right]=q.$$

Тогда на поверхности (6):

$$V_{s_1}=-\frac{k\sigma}{\sqrt{1-m^2}}\,q,$$

$$V_{s_2}=\frac{k\sigma}{\sqrt{1-m^2}}\,q,$$

$$V_{s_3}=lg$$

и

$$\begin{aligned} V_{s_1} &= V_x-\frac{m\sigma}{\sqrt{1-m^2}}\,V_y, \\ V_{s_2} &= V_\xi+\frac{m\sigma}{\sqrt{1-m^2}}\,V_y, \\ V_{s_3} &= V_\eta+V_y. \end{aligned} \tag{12}$$

Так как значение игры должно удовлетворять системе (12) и уравнению (8), то

$$V_y^2-2q\left[mk-\frac{l(1-m^2)}{d^2-1}\right]V_y+q^2\left[k^2-\frac{l^2(1-m^2)}{d^2-1}\right]=0.$$

Тогда

$$V_y=q\left[mk-\frac{l(1-m^2)}{d^2-1}\pm\frac{l(1-m^2)}{d^2-1}\right].$$

При дальнейших вычислениях берем только наибольшее значение V_y, так как при втором значении получаем, что игрок P должен стрелять при отрицательном времени. Таким образом, на поверхности S и ввиду (11) вдоль оптимальной траектории

$$
\begin{aligned}
V_x &= -\sigma qk\sqrt{1-m^2},\\
V_y &= qmk,\\
V_\xi &= \sigma qk\sqrt{1-m^2},\\
V_\eta &= q(l-mk).
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Подставляя (13) в (10) и интегрируя при начальных условиях (6), получаем, что

$$
\begin{aligned}
x &= \sigma v\sqrt{1-m^2}\,\tau + s_1,\\
y &= -vm\tau + s_3 - \frac{m\sigma}{\sqrt{1-m^2}}(s_1-s_2),\\
\xi &= \frac{\sigma u}{d}\sqrt{1-m^2}\,\tau + s_2,\\
\eta &= \frac{u}{dk}(l-mk)\tau + s_3.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Решая систему (14) относительно τ, s_1, s_2, s_3, находим, что

$$
\begin{aligned}
\tau &= \frac{dk}{ul}(\eta-y) - \frac{\sigma mdk}{ul\sqrt{1-m^2}}(x-\xi),\\
s_1 &= x - \frac{\sigma d^2 k}{l}\sqrt{1-m^2}(\eta-y) + \frac{d^2 km}{l}(x-\xi),\\
s_2 &= \xi - \frac{\sigma k}{l}\sqrt{1-m^2}(\eta-y) + \frac{km}{l}(x-\xi),\\
s_3 &= \eta - \frac{l-mk}{l}(\eta-y) + \frac{\sigma m(l-mk)}{l\sqrt{1-m^2}}(x-\xi).
\end{aligned}
$$

Рассмотренный случай имеет место, когда $\sigma(s_1-s_2)>0$ и начальная точка M_0 не принадлежит области Q, т. е., когда M_0 принадлежит области определяемой неравенствами

$$
\sigma[(d^2-1)km+l](x-\xi) - k(d^2-1)\sqrt{1-m^2}(\eta-y) > 0, \tag{15}
$$

$$
\eta - y > \frac{m\sigma}{\sqrt{1-m^2}}(x-\xi). \tag{16}
$$

Оптимальные траектории игроков P и E в игре Γ_1 описываются уравнениями

$$
\begin{aligned}
x &= -\sigma v\sqrt{1-m^2}\,t + x_0,\\
y &= vmt + y_0,\\
\xi &= -\frac{\sigma u}{d}\sqrt{1-m^2}\,t + \xi_0,\\
\eta &= -\frac{u(l-mk)}{dk}\,t + \eta_0.
\end{aligned}
$$

Значение игры равно:

$$
V = \exp\left[-\sigma k\sqrt{1-m^2}(x_0-\xi_0) - km(\eta_0-y_0) + l\eta_0\right].
$$

Оптимальные траектории в игре Γ совпадают с оптимальными траекториями в игре Γ_1, а оптимальное время выстрела $\bar{t}$ совпадает с окончанием игры Γ_1. Из (16) следует, что $\bar{t}>0$.

2. *Игра заканчивается на многообразии* $\rho=0$.

Этому случаю принадлежат игры, в которых $m \leqslant -1$, и игры, в которых $|m| < 1$ и начальная точка M_0 принадлежит области, определяемой неравенством

$$\sigma[(d^2-1)km+l](x-\xi)-k(d^2-1)\sqrt{1-m^2}(\eta-y) \leqslant 0.$$

Игрок P должен стрелять, когда расстояние между игроками равно 0, т. е. игрок P должен поймать игрока E. Построим окружность Аполлония для точек P_0, E_0 и числа d. Через точку окружности с наименьшей ординатой, т. е. через точку $\bar{x}$, $\bar{y}$, где

$$\bar{x} = \frac{d^2 \xi_0 - x_0}{d^2 - 1},$$

$$\bar{y} = \frac{d^2 \eta_0 - y_0 - d\rho_0}{d^2 - 1},$$

проведем касательную.

Рассмотрим игру преследования на полуплоскости $y \geqslant \bar{y}$. Легко проверить, что точка P_0 принадлежит выигрывающему множеству (см, [2]). Поэтому игрок P, независимо от действий игрока E, может поймать игрока E в точке с ординатой $y \geqslant \bar{y}$. Игрок E стремится минимизировать ординату точки поимки и, при этом, независимо от действий игрока P, может достичь любую точку круга Аполлония. Таким образом в оптимальных стратегиях для обоих игроков векторы скорости направлены в точку $(\bar{x}, \bar{y})$. Значение игры равно

$$V = \exp\left[\frac{l(d^2\eta_0 - y_0 - d\rho_0}{d^2 - 1}\right].$$

Замечание. В случае 2 игру можно решать и обычными методами. Для этого следует взять трехмерную окрестность многообразия $\rho = 0$, например $\rho = \varepsilon$, решить игру и перейти к пределу когда $\varepsilon \to 0$.

На терминальной поверхности для игры Γ_1 частные производные значения игры Γ терпят разрыв, поэтому терминальная поверхность является сингулярной поверхностью типа $(+, 0)$ в игре Γ. Если $|m| < 1$, то имеется и другая сингулярная поверхность

$$\sigma[(d^2-1)km+l](x-\xi)-k(d^2-1)\sqrt{1-m^2}(\eta-y) = 0$$

типа (p, u, p) (см. [3] стр. 133).

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
6.XII.1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. С. Понтрягин, К теории дифференциальных игр, УМН 21, 4 (1966).
2. И. П. Ячяускас, Одна игра преследования на полуплоскость, Лит. мат. сб., VII, 1 (1967).
3. R. Isaacs, Differential games, Wiley, New York, 1965.

VIENAS DIFERENCIALINIS LOŠIMAS SU LAIKO MOMENTO PARINKIMU

I. JAČIAUSKAS

(Reziumė)

Nagrinėjamas persekiojimo lošimas plokštumoje, kai persekiotojas P turi vieną šovinį. Šis lošimas yra suvedamas į diferencialinį lošimą su baigmės išlošimu. Lošimas pilnai išspręstas, kai lošėjo P taiklumo funkcija yra $e^{-k\rho}$, lošėjas P išlošia $e^{l\eta}$ sunaikindamas lošėją E taške $E(\xi, \eta)$, ir išlošia 0, jei jis nesunaikina lošėjo E.

A DIFFERENTIAL GAME WITH TIMING

I. JAČIAUSKAS

(Summary)

A game of persuit and evasion in the plane, when the pursuer has one bullet, monotone accuracy and the payoff depends on the evader's position is considered. This game is reduced to the game with terminal payoff. The solutions are obtained for one class of these games.