LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VII Nr. 2, 1967
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VII № 2, 1967

СВЯЗЬ СЛОЖНЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ЗАДАЧАМИ КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Р. Ю. ЯСИЛИОНИС

Покажем связь некоторых классов сложных задач математического программирования (определение таких задач дано в статье [2]) с задачами квадратичного программирования. Изложение исследований подразделено на две части. В первой показано как свести один класс сложных задач математического программирования к квадратичному программированию. Во второй части дается алгоритм для нахождения равновесного решения некоторого класса сложных задач математического программирования.

1. Рассмотрим класс сложных задач математического программирования следующего вида:

$$\min\left[(c^i)'\,x^i+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(x^j)'\,A^i_j\,x^i\right]$$

при условиях

$$C^i x^i \leqq a^i+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} B^i_j x^j, \tag{1}$$

$$x^i \geqq 0,$$

$$i=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

где A^i_j и B^i_j — $(k_j\times k_i)$ — и $(m_i\times k_j)$ — матрицы, соответственно, c^i и x^i — k_i — — векторы — столбцы, a^i-m_i — вектор — столбец, $C^i-(m_i\times k_i)$ — матрица $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$ и $j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

Сложная задача (1) состоит из n параметрически связанных между собой задач линейного программирования. Для каждой такой частичной задачи напишем двойственную задачу

$$\max\left[-(v^i)'\left(a^i+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} B^i_j x^j\right)\right]$$

при условиях

$$-(C^i)'\,v^i \leqq c^i+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(A^i_j)'\,x^j, \tag{2}$$

$$v^i \geqq 0,$$

$$i=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

где v^i — m_i векторы — столбцы.

Введем обозначения, которые нам понадобятся для доказательства основной теоремы

$$v=\begin{Vmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^i \\ \vdots \\ v^n \end{Vmatrix}, \quad c=\begin{Vmatrix} c^1 \\ \vdots \\ c^i \\ \vdots \\ c^n \end{Vmatrix}, \quad a=\begin{Vmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^i \\ \vdots \\ a^n \end{Vmatrix},$$

$$x=\begin{Vmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^i \\ \vdots \\ x^n \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad x(i)=\begin{Vmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^{i-1} \\ x^{i+1} \\ \vdots \\ x^n \end{Vmatrix},$$

$$C_B=\begin{Vmatrix} C^1 \cdots -B_i^1 \cdots -B_n^1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -B_1^i \cdots \quad C^i \cdots -B_n^i \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -B_1^n \cdots -B_i^n \cdots \quad C^n \end{Vmatrix}, \quad C=\begin{Vmatrix} -C^1 \cdots & 0 \cdots & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 \cdots & -C^i \cdots & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 \cdots & 0 \cdots & -C^n \end{Vmatrix},$$

$$A=\begin{Vmatrix} 0 & A_2^1 \cdots A_i^1 \cdots A_n^1 \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_1^i & A_2^i \cdots 0 \cdots A_n^i \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_1^n & A_2^n \cdots A_i^n \cdots 0 \end{Vmatrix}, \tag{3}$$

$$P=\{x \mid C_B x \leqq a\},$$

$$P[x(i)]=\left\{\tilde{x}^i \mid C^i \tilde{x}^i \leqq a^i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} B_j^i x^j, \quad \tilde{x}^i \geqq 0\right\},$$

$$Q=\{(v', x') \mid C'v - A'x \leqq c, \quad v \geqq 0, \quad x \geqq 0\},$$

$$Q[x(i)]=\left\{v^i \mid (C^i)' v^i \leqq c^i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (A_j^i)' x^j, \quad v^i \geqq 0\right\}.$$

Используя обозначения (3), перепишем определение равновесного решения, данное в статье [2], для нашей связанной задачи (1).

Определение. *Равновесным решением* связанных задач (1) называется вектор $\bar{x}$, удовлетворяющий условиям

$$(c^i)' \bar{x}^i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (\bar{x}^j)' A_j^i \bar{x}^i = \min_{x^i \in P[\bar{x}(i)]} \left[(c^i)' x^i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (\bar{x}^j)' A_j^i x^i\right] \tag{4}$$

$$i=1, 2, \ldots, n.$$

Возьмем задачу квадратичного программирования

$$\min(c'x+a'v-v'C_Bx-v'Cx+x'Ax) \tag{5}$$

при условиях

$$C_Bx\leqq a,$$
$$C'v-A'x\leqq c,$$
$$v\geqq 0,\quad x\geqq 0.$$

Заметим, что если $(v',\ x')$ удовлетворяют условию

$$x\in P \quad \text{и} \quad (v',\ x')\in Q, \tag{6}$$

то x^i и v^i являются планами i-той частичной задачи при параметре $x(i)$. Из этого следует, что

$$c'x+a'v-v'C_Bx-v'Cx+x'Ax\geqslant 0 \tag{7}$$

для всех $(v',\ x')$, удовлетворяющих (6), т. е. целевая функция задачи (5) в области ограничений принимает неотрицательные значения.

Теорема 1. *Если связанные задачи математического программирования* (1) *имеют равновесное решение, то оно является и решением задачи квадратичного программирования и, наоборот, каждое решение квадратичного программирования является решением сложной задачи* (1).

Доказательство. Пусть имеем решение связанных задач (1), т. е.

$$(c^i)'\bar{x}^i+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(\bar{x}^j)'A_j^i\bar{x}^i=\min_{x^i\in P[\bar{x}(i)]}\left[(c^i)'x^i+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(\bar{x}^j)'A_j^ix^i\right], \tag{8}$$
$$i=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

При этом решениями двойственных задач (2) являются векторы $\bar{v}^i$ ($i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$), т. е.

$$-(\bar{v}^i)'\left(a^i+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}B_j^i\bar{x}^j\right)=\max_{v^i\in Q[\bar{x}(i)]}\left[-(v^i)'\left(a^i+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}B_j^i\bar{x}^j\right)\right]. \tag{9}$$

Имея в виду обозначения (3), из (8) и (9) и свойства оптимальных планов прямой и двойственной задач (см. [1], стр. 44) имеем:

$$C_B\bar{x}\leqq a,$$
$$C'\bar{v}-A'\bar{x}\leqq c,$$
$$\bar{v}'C_B\bar{x}=\bar{v}a,$$
$$\bar{v}'C\bar{x}-\bar{x}'A\bar{x}=c'\bar{x},$$
$$\bar{v}\geqq 0,\quad \bar{x}\geqq 0.$$

Отсюда следует, что

$$c'\bar{x}+a'\bar{v}-\bar{v}'C_B\bar{x}-\bar{v}'C\bar{x}+\bar{x}'A\bar{x}=0 \tag{10}$$

и

$$\bar{x}\in P \quad \text{и} \quad (\bar{v}',\ \bar{x}')\in Q.$$

Из (7) и (10) следует, что $(\bar{x}',\ \bar{v}')$ является решением квадратичной задачи (5).

Заметим, что если сложная задача (1) имеет равновесное решение, то из (7) и (10) следует, что решение квадратичной задачи обращает значение целевой функции в нуль. Теперь покажем, что каждое решение задачи квадратичного программирования (5) является равновесным решением связанных задач (1).

Пусть $(\bar{\bar{v}}', \bar{\bar{x}}')$ – решение задачи (5), т. е.

$$c'\bar{\bar{x}}+a'\bar{\bar{v}}-\bar{\bar{v}}'C_B\bar{\bar{x}}-\bar{\bar{v}}'C\bar{\bar{x}}+\bar{\bar{x}}'A\bar{\bar{x}}=0$$

и

$$\begin{gathered} C_B\bar{\bar{x}}\leqq a, \\ C'\bar{\bar{v}}-A'\bar{\bar{x}}\leqq c, \\ \bar{\bar{v}}\geqq 0, \quad \bar{\bar{x}}\geqq 0. \end{gathered} \tag{11}$$

Тогда

$$\bar{\bar{v}}C_B\bar{\bar{x}}=a'\bar{\bar{v}}, \quad \bar{\bar{v}}'C\bar{\bar{x}}-\bar{\bar{x}}'A\bar{\bar{x}}=c'\bar{\bar{x}}$$

и

$$c'\bar{\bar{x}}+\bar{\bar{x}}'A\bar{\bar{x}}=-a'\bar{\bar{v}}+\bar{\bar{v}}'C_B\bar{\bar{x}}+\bar{\bar{v}}'C\bar{\bar{x}}. \tag{12}$$

Из (11), (12) и обозначений (3) для каждого имеем

$$\begin{gathered} C^i\bar{\bar{x}}^i\leqq a^i+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} B^i_j x^j, \\ -(C^i)'\bar{\bar{v}}^i\leqq c^i+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} (A^i_j)'\bar{\bar{x}}^j, \\ \bar{\bar{x}}^i\geqq 0, \quad \bar{\bar{v}}^i\geqq 0 \end{gathered} \tag{13}$$

и

$$(c^i)'\bar{\bar{x}}^i+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(\bar{\bar{x}}^j)'A^i_j x^i=-(a^i)'\bar{\bar{v}}^i-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(\bar{\bar{v}}^i)'B^i_j\bar{\bar{x}}^j.$$

Неравенства (13) показывают, что пара векторов $\bar{\bar{x}}^i$ и $\bar{\bar{v}}^i$ при значении параметра $\bar{\bar{x}}(i)$ является оптимальными решениями прямой и двойственной i-той частичной задачи, т. е.

$$(c^i)'\bar{\bar{x}}^i+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(\bar{\bar{x}}^j)'A^i_j\bar{\bar{x}}^i=\min_{x^i\in P[\bar{\bar{x}}(i)]}\Big[(c^i)'x^i+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(\bar{\bar{x}}^j)'A^i_j x^i\Big] \tag{14}$$

и

$$-(\bar{\bar{v}}^i)'\Big(a^i+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}B^i_j\bar{\bar{x}}^j\Big)=\max_{v^i\in Q[\bar{\bar{x}}(i)]}\Big[-(v^i)'\Big(a^i+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}B^i_j\bar{\bar{x}}^j\Big)\Big],$$

$$i=1,2,\ \dots\ n.$$

Соотношение (14) есть определение равновесного решения $\bar{\bar{x}}$ сложной задачи (1). Теорема доказана.

Легко видеть, что доказанную теорему можно использовать, как теорему существования равновесного решения сложной задачи (1).

Теорема 1'. *Для того, чтобы сложная задача* (1) *имела равновесное решение, необходимо и достаточно, чтобы решение задачи квадратичного программирования* (5) *давало значение целевой функции, равное нулю.*

Доказательство ничем существенным не отличается от данного выше, кроме, может быть, перефразировки некоторых частей текста.

2. Покажем один способ, использующий симплекс алгоритм, нахождения равновесного решения одного класса сложных задач. Этот метод назовем итеративным методом.

Рассмотрим связанные задачи

$$\min\left[(x_{i-1})' C_{i-1} x_i + (x_i)' C_i x_{i+1} + p_i' x_i\right] \tag{15}$$

при условиях

$$A_i x_i \leqq a_i,$$
$$x_i \geqq 0,$$
$$i = 1, 2, \ldots, n,$$

где x_i и p_i, $a_i - k_i$, m_i – векторы-столбцы соответственно, C_i и $A_i - (k_i \times \times k_{i+1})$ – и $(m_i \times k_i)$ – матрицы. Кроме того, будем считать, что $C_0 = C_n$ и $x_{n+1} = x_1$, $x_0 = x_n$.

Для краткости изложения введем обозначение

$$P_i = \{x_i \mid A_i x_i \leqq a_i,\ x_i \geqq 0\}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{16}$$

Ниже определим итеративный алгоритм для сложных задач математического программирования.

Определение. *Итеративный алгоритм* означает следующую процедуру:

1) произвольно задаются начальные векторы

$$x_1^0, \ldots, x_i^0, \ldots, x_n^0, \quad \text{где} \quad x_i^0 \in P_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

2) пусть осуществлена k итерация, т. е. имеем

$$x_1^k, \ldots, x_i^k, \ldots, x_n^k, \quad \text{где} \quad x_i^k \in P_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Тогда значения векторов в $(k+1)$ итерации последовательно для $i = 1, 2, \ldots, n$ определяются соотношениями

$$(x_{i-1}^{k+1})' C_{i-1} x_i^{k+1} + (x_i^{k+1})' C_i x_{i+1}^k + p_i' x_i^{k+1} = \\ = \min_{x_i \in P_i} \left[(x_{i-1}^{k+1})' C_{i-1} x_i + x_i' C_i x_{i+1}^k + p_i' x_i\right]. \tag{17}$$

Каждая итерация состоит из n шагов, причем в первом шаге вместо x_0^{k+1} берется x_n^k, а в последнем вместо x_{n+1}^k берется x_1^{k+1}.

Мы полагаем, что x_i^k, $k = 1, 2, \ldots$ является крайней точкой множества P_i, что всегда будет выполняться, если каждая частичная задача решается симплекс-методом.

Если $\bar{x}$ равновесное решение, то оно должно удовлетворять условию (см. [2])

$$\bar{x}_{i-1}' C_{i-1} \bar{x}_i + \bar{x}_i' C_i \bar{x}_{i+1} + p_i' \bar{x}_i = \min_{x_i \in P_i} (\bar{x}_{i-1}' C_{i-1} x_i + x_i' C_i \bar{x}_{i+1} + p_i' x_i) \tag{18}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

Определим обобщенную функцию так:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i' C_i x_{i+1} + p_i' x_i). \tag{19}$$

Покажем, что $F(x)$ на каждом шаге каждой итерации не возрастает. Пусть осуществлено l шагов k итерации, т. е. имеем совокупность векторов

$$x_1^k, \ldots, x_l^k, x_{l+1}^{k-1}, \ldots, x_n^{k-1}. \tag{20}$$

Значение обобщенной целевой функции $F(x)=F(k,\ l)$ будет

$$F(k,\ l)=\sum_{i-1}^{l-1}\left[(x_i^k)'\,C_i\,x_{i+1}^k+p_i'\,x_i^k\right]+(x_l^k)'\,C_l\,x_{l+1}^{k-1}+$$

$$+p_l'\,x_l^k+\sum_{i=l+1}^{n-1}\left[(x_i^{k-1})'\,C_i\,x_{i+1}^{k-1}+p_i'\,x_i^{k-1}\right]+(x_n^{k-1})'\,C_n\,x_1^k+p_n\,x_n^{k-1}$$

и по определению $F(k,\ n+1)=F(k+1,\ 1)$.

Разность

$$F(k,\ l)-F(k,\ l+1)=(x_l^k)'\,C_l\,x_{l+1}^{k-1}+(x_{l+1}^{k-1})'\,C_{l+1}\,x_{l+2}^{k-1}+$$

$$+p_{l+1}'\,x^{k-1}-(x_l^k)'\,C_l\,x_{l+1}^k-(x_{l+1}^k)'\,C_{l+1}\,x_{l+2}^{k-1}-p_{l+1}'\,x_{l+1}^k. \tag{21}$$

Из (17) следует, что правая часть (21) неотрицательна, поэтому

$$F(k,\ l)\geqslant F(k,\ l+1),\qquad l=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Для того, чтобы алгоритм был конечным надо соблюдать следующее условие L: если в l-м шаге $(l=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ $(k+1)$-й итерации решениями задачи (17) являются несколько крайних точек множества P_l и среди них находится x_l^k (т. е. вектор получен в k-й итерации), то за новый вектор берем x_l^k, $x_l^{k+1}=x_l^k$.

Так как множества P_i, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$ имеют конечное число крайних точек, то, используя итеративный метод с соблюдением сформулированного условия, за конечное чнсло итераций k_0 придем к исходу, когда функция $F(x)$ больше не уменьшается, т. е.

$$F(x^{k_0})=F(x^{k_0+j}),\qquad j=1,\ 2,\ \ldots \tag{22}$$

Покажем, что тогда должно быть $x^{k_0}=x^{k_0+1}$. Пусть это не так. Пусть i_0 первых векторов двух последних итераций соблюдают

$$x_i^{k_0}=x_i^{k_0+1},\qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ i_0,$$

а i_0+1 уже нет

$$x_{i_0+1}^{k_0}\neq x_{i_0+1}^{k_0+1}. \tag{23}$$

Но из (23) и (17) следует

$$(x_{i_0}^{k_0})'\,C_{i_0}x_{i_0+1}^{k_0+1}+(x_{i_0+1}^{k_0+1})'\,C_{i_0+1}x_{i_0+2}^{k_0}+p_{i_0+1}'x_{i_0+1}^{k_0+1}<$$

$$<(x_{i_0}^{k_0})'\,C_{i_0}\,x_{i_0+1}^{k_0}+(x_{i_0+1}^{k_0})'\,C_{i_0+1}\,x_{i_0+2}^{k_0}+p_{i_0+1}'x_{i_0+1}^{k_0}.$$

Отсюда

$$F(x^{k_0})>F(x^{k_0+1}),$$

что противоречит (22). Значит должны иметь

$$x^{k_0}=x^{k_0+1}$$

или

$$(x_{i-1}^{k_0})'\,C_{i-1}\,x_i^{k_0}+(x_i^{k_0})'\,C_i\,x_i^{k_0+1}+p_i'\,x_i^{k_0}=\min_{x_i\in P_i}\left[(x_{i-1}^{k_0})'\,C_{i-1}\,x_i+x_i'\,C_i\,x_{i+1}^{k_0}+p_i'\,x_i\right],$$

$$i=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Это означает, что x^{k_0} — равновесное решение.

Таким образом доказана следующая

Теорема 2. *Если все P_i ограниченные множества, то итеративный метод для сложных задач* (15) *при соблюдении условия L всегда конечен и приводит к крайнему равновесному решению.*

Замечание. Класс сложных задач (15), для нахождения равновесных решений которого можно применить итеративный алгоритм, можно расширить.

Пусть имеем сложную задачу математического программирования

$$\min_{x^i \in P_i} [f_i(x^i) + \psi(x^1, \ldots, x^i, \ldots, x^n) + \varphi_i(x^1, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots, x^n)],$$

$$i = 1,2 \ldots, n.$$

Если f_i и ψ таковы, что решение i-й частичной задачи при любых возможных параметрах других частичных задач найдется среди конечного числа векторов из P_i, то и для этой более общей задачи верна теорема 2. Это обстоятельство имеет место, например, в случае, когда f_i и ψ вогнуты или линейны по x^i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ при фиксированных других переменных.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
10.XI.1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Гейл, Теория линейных экономических моделей, ИЛ, М., 1963.
2. Р. Ю. Ясилионис, О существовании решений сложных задач математического программирования, Лит. мат. сб., VII, 2 (1967).

SUDĖTINGŲ MATEMATINIO PROGRAMAVIMO UŽDAVINIŲ RYŠYS SU KVADRATINIO PROGRAMAVIMO UŽDAVINIAIS

R. JASILIONIS

(Reziumė)

Parodoma, jei sudėtingas matematinio programavimo uždavinys (1) turi pusiausvyros sprendinį, tai jis yra ekvivalentus kvadratinio programavimo uždaviniui (5). Be to, surištam uždaviniui (15) duodamas algoritmas, paremtas tiesinio programavimo simplex metodu, kraštinio pusiausvyros sprendinio suradimui.

CONNECTION OF THE COMPLEX MATHEMATICAL PROGRAMMING PROBLEM TO QUADRATIC PROGRAMMING PROBLEM

R. JASILIONIS

(Summary)

The complex mathematical programming problem (1) is pointed out equivalent the quadratic programming problem (5). Also, the simplex iterative prosedure are given to complex mathematical programming problem (15).