LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VII Nr. 2, 1967
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VII № 2, 1967

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ СЛОЖНЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Р. Ю. ЯСИЛИОНИС

Связанными задачами математического программирования назовем задачи вида

$$\min F_s(x^1, \ldots, x^s, \ldots, x^n), \tag{1}$$
$$x^s \in D_s(x^1, \ldots, x^{s-1}, x^{s+1}, \ldots, x^n)$$
$$s=1, 2, \ldots, n,$$

где $x^1, \ldots, x^s, \ldots, x^n$ — векторы евклидовых пространств $E^{p_1}, \ldots, E^{p_s}, \ldots, E^{p_n}$, соответственно; D_s, $s=1, \ldots, n$ — область определения x^s, зависящая от параметров $x^1, \ldots, x^{s-1}, x^{s+1}, \ldots, x^n$; $F_s(x^1, \ldots, x^n)$ — некоторые функции аргументов $x^1, \ldots, x^n$. Далее мы будем предполагать, что области D_s заданы системами неравенств.

Совокупность связанных задач будем называть сложной задачей математического программирования.

Определение. *Равновесным решением* задачи (1) назовем совокупность векторов $\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^s, \ldots, \bar{x}^n$, удовлетворяющих условиям

$$F_s(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^s, \ldots, \bar{x}^n)=$$
$$= \min_{x^s \in D_s(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^{s-1}, \bar{x}^{s+1}, \ldots, \bar{x}^n)} F_s(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^{s-1}, \bar{x}^s, \bar{x}^{s+1}, \ldots, \bar{x}^n), \tag{2}$$
$$s=1, 2, \ldots, n.$$

В настоящей статье даются условия, которым должны удовлетворять минимизируемые функции и области определения их аргументов, чтобы существовало решение. Доказательство существования решения сводится к проверке условий теоремы Какутани о неподвижной точке, точнее — к конструированию полунепрерывного сверху отображения и установления свойств области определения этого отображения.

Перепишем задачу (1) в развернутом виде: минимизировать

$$F_s(x^1, \ldots, x^s, \ldots, x^n)$$

при условиях

$$\left.\begin{array}{r} f_1^s(x^1, \ldots, x^s, \ldots, x^n) \leqslant 0, \\ \text{— — — — — — — — — — — —} \\ f_i^s(x^1, \ldots, x^s, \ldots, x^n) \leqslant 0, \\ \text{— — — — — — — — — — — —} \\ f_{m_s}^s(x^1, \ldots, x^s, \ldots, x^n) \leqslant 0, \\ x^s \geqq 0, \end{array}\right. \tag{3}$$

$s=1, 2, \ldots, n.$

Подобная задача (когда $f_i^*=f_i$, $i=1, \ldots, n$, а все F_s выпуклы по x) сформулирована С. Карлином (см. [1], стр. 253) и решением называется эффективная точка. Задача решена в духе условий Куна – Таккера. Равновесное решение, вообще, не является эффективной точкой и наоборот.

Для доказательства теоремы существования решения нам понадобится несколько предварительных результатов и определений.

Лемма. *Пусть имеем задачу математического программирования, зависящую от параметра y,*

$$\min_{x \in D(y)} \Gamma(x, y), \tag{4}$$

где

$$D(y)=\{x \mid \varphi_1(x, y)\leqslant 0, \ldots, \varphi_m(x, y)\leqslant 0, x\geqq 0\}, \; y\in Q$$

и $Q\in E^s$ – ограниченное замкнутое множество.

Пусть далее выполняются следующие условия:

1) $\Gamma(x, y)$, $\varphi_i(x, y) (i=1, \ldots, m)$ – *непрерывные выпуклые функции от $x\geqq 0$ равномерно непрерывные по $y\in Q$;*

2) *существует такое замкнутое выпуклое множество X, что $D(y)\subset X$ для всех $y\in Q$;*

3) *существует такое $\alpha_0>0$ и для каждого $y^1\in Q$ такие $x^1\in D(y^1)$, что*

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m} \varphi_i(x^1, y^1)\leqslant \alpha_0. \tag{5}$$

Тогда для любых двух сходящихся последовательностей

$$y^1, \ldots, y^n, \ldots \to y^0, \; y^k\in Q, \; k=1, \ldots, n, \ldots \tag{6}$$

и

$$\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n, \ldots \to \bar{x}^0,$$

где

$$\Gamma(\bar{x}^k, y^k)=\min_{x\in D(y^k)} \Gamma(x, y^k),$$

выполняется равенство

$$\Gamma(\bar{x}^0, y^0)=\min_{x\in D(y^0)} \Gamma(x, y^0). \tag{7}$$

Доказательство разделим на две части:

1) доказательство того, что $\bar{x}^0\in D(y^0)$,

2) доказательство соотношения (7), т. е.

$$\Gamma(\bar{x}^0, y^0)=\min_{x\in D(y^0)} \Gamma(x, y^0).$$

1) Пусть $\bar{x}^0\notin D(y^0)$. Тогда существует такое i_0, что

$$\varphi_{i_0}(\bar{x}^0, y^0)>0. \tag{8}$$

Обозначим

$$\varepsilon_0=\varphi_{i_0}(\bar{x}^0, y^0)>0.$$

Для каждого k имеем

$$\varphi_{i_0}(\bar{x}^k, y^k)\leqslant 0. \tag{9}$$

Из (8) отнимем (9)

$$\varepsilon_0\leqslant \varphi_{i_0}(\bar{x}^0, y^0)-\varphi_{i_0}(\bar{x}^k, y^k)=|\varphi_{i_0}(\bar{x}^0, y^0)-\varphi_{i_0}'(\bar{x}^k, y^k)| \qquad (10$$

$k=1, 2, \ldots, n, \ldots$

Далее

$$|\varphi_{i_0}(\bar{x}^0,\ y^0)-\varphi_{i_0}(\bar{x}^k,\ y^k)|\leqslant|\varphi_{i_0}(\bar{x}^0,\ y^0)-\varphi_{i_0}(\bar{x}^0,\ y^k)|+|\varphi_{i_0}(\bar{x}^k,\ y^k)-\varphi_{i_0}(\bar{x}^0,\ y^k)|.$$

В силу непрерывности φ_{i_0} по x и по y оба последних члена сколь угодно маленькие при достаточно большом k. Следовательно,

$$\varepsilon_0\leqslant 0.$$

Полученное противоречие указывает на неверность допущения. Значит,

$$\bar{x}^0\in D(y^0).$$

Первая часть доказана.

2) Для каждого $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ \ldots$ составим обобщенную функцию Лагранжа

$$\Phi(x,\ u;\ y^k)=\Gamma(x,\ y^k)+\sum_{i=1}^{m}u_i\varphi_i(x,\ y^k). \tag{11}$$

Условия 1) и 3) леммы позволяют применить к функции Φ одну теорему Карлина (аналог теоремы Куна – Таккера) (см. [1], стр. 236) и на ее основании утверждать, что для каждого $\bar{x}^k$ существуют такие $\bar{u}^k$, что

$$\Phi(\bar{x}^k,\ u;\ y^k)\leqslant\Phi(\bar{x}^k,\ \bar{u}^k;\ y^k)\leqslant\Phi(x,\ \bar{u}^k;\ y^k), \tag{12}$$

$k=1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ \ldots$
для всех $x\in X,\ u\geqq 0$.

Итак, имеем последовательность $\bar{u}^k$:

$$\bar{u}^1,\ \ldots,\ \bar{u}^n,\ \ldots \tag{13}$$

Из условия 3) леммы следует, что векторы $\bar{u}^k$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ \ldots$ ограничены, т. е.

$$|\bar{u}^k|\leqslant k=\text{const} \tag{14}$$

(см. [2], стр. 97).

Из последовательности (13) при выполнени (14) можно извлечь сходящуюся подпоследовательность

$$\bar{u}^{k_1},\ \ldots,\ \bar{u}^{k_n},\ \ldots\to\bar{u}^{k_0}, \tag{15}$$

Теперь покажем, что $(\bar{x}^0,\ \bar{u}^{k_0})$ – следовала точка функции (11), когда $\bar{y}^k$ заменена на y^0, т. е.

$$\Phi(\bar{x}^0,\ u;\ y^0)\leqslant\Phi(\bar{x}^0,\ \bar{u}^{k_0};\ y^0)\leqslant\Phi(x,\ \bar{u}^{k_0};\ y^0),\ x\in\bar{x}\ \text{и}\ u\geqq 0. \tag{16}$$

Пусть (16) неверно, т. е. существуют x^1 и y^1 такие, что либо

$$\Gamma(\bar{x}^0,\ y^0)+\sum_{i=1}^{m}\bar{u}_i^{k_0}\varphi_i(\bar{x}^0,\ y^0)>\Gamma(x^1,\ y^0)+$$
$$+\sum_{i=1}^{m}\bar{u}_i^{k_0}\varphi_i(x^i,\ y^0), \tag{17}$$

либо

$$\Gamma(\bar{x}^0,\ y^0)+\sum_{i=1}^{m}u_i^1\varphi_i(\bar{x}^0,\ y^0)>\Gamma(\bar{x}^0,\ y^0)+$$
$$+\sum_{i=1}^{m}\bar{u}_i^{k_0}\varphi_i(\bar{x}^0,\ y^0). \tag{18}$$

Покажем, что это ведет к противоречию.

Для каждого k^1 из последовательности $k_1, \ldots, k_n, \ldots$ и $x^1 \in \bar{x}$ имеем

$$\Gamma(\bar{x}^{k^1}, y^{k^1}) + \sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i^{k^1} \varphi_i(\bar{x}^{k^1}, y^{k^1}) \leqslant \Gamma(x^1\ y^{k^1}) + \sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i^{k^1} \varphi_i(x', y^{k^1}).$$

Далее,

$$\begin{aligned} 0 < \varepsilon_0 = \Gamma(\bar{x}^0, y^0) + \sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i^{k_0} \varphi_i(\bar{x}^0, y^0) - \Gamma(x^1, y^0) - \sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i^{k_0} \varphi_i(x^1, y^0) \leqslant \\ \leqslant \Gamma(\bar{x}^0, y^0) + \sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i^{k_0} \varphi_i(\bar{x}^0, y^0) - \Gamma(x^1, y^0) - \sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i^{k_0} \varphi_i(x^1, y^0) + \\ + \Gamma(x', y^{k^1}) + \sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i^{k^1} \varphi_i(x', y^{k^1}) - \Gamma(\bar{x}^{k^1}, y^{k^1}) - \sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i^{k^1} \varphi_i(\bar{x}^{k^1}, y^{k^1}) \leqslant \\ \leqslant |\Gamma(\bar{x}^0, y^0) - \Gamma(\bar{x}^{k^1}, y^{k^1})| + |\Gamma(x^1, y^{k^1}) - \Gamma(x^1, y^0)| + \\ + \left| \sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i^{k_0} \varphi_i(\bar{x}^0, y^0) - \sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i^{k^1} \varphi_i(\bar{x}^{k^1}, y^{k^1}) \right| + \left| \sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i^{k^1} \varphi_i(x^1, y^{k^1}) - \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i^{k_0} \varphi_i(x^1, y^0) \right|. \end{aligned} \quad (19)$$

Два последних члена можно оценить так:

$$\left| \sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i^{k_0} \varphi_i(\bar{x}^0, y^0) - \sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i^{k^1} \varphi_i(\bar{x}^{k^1}, y^{k^1}) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{m} [\,|\bar{u}_i^{k_0}| \cdot |\varphi_i(\bar{x}^0, y^0) - \varphi_i(\bar{x}^{k^1}, y^{k^1})| + |\bar{u}_i^{k_0} - \bar{u}_i^{k^1}| \cdot |\varphi_i(\bar{x}^{k^1}, y^{k^1})|, \quad (20)$$

$$\left| \sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i^{k^1} \varphi_i(x^1, y^{k^1}) - \sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i^{k_0} \varphi_i(x^1, y^0) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{m} [\,|\bar{u}_i^{k_0}| \cdot |\varphi_i(x^1, y^{k^1}) - \varphi_i(x^1, y^0)| + |\bar{u}_i^{k^1} - \bar{u}_i^{k_0}| \cdot |\varphi_i(x^1, y^{k^1})|\,]. \quad (21)$$

Из непрерывности функций $\Gamma(x, y)$ и $\varphi_i(x, y)$ $(i=1, \ldots, m)$ по $x \in X$ и равномерной непрерывности по $y \in Q$ и из (6) и (15) следует, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что

$$|\Gamma(\bar{x}^0, y^0) - \Gamma(\bar{x}^{k^1}, y^{k^1})| < \varepsilon$$
$$|\Gamma(x^1, y^{k^1}) - \Gamma(x^1, y^0)| < \varepsilon$$
$$|\varphi_i(\bar{x}^0, y^0) - \varphi_i(\bar{x}^{k^1}, y^{k^1})| < \varepsilon$$
$$|\varphi_i(x^1, y^{k^1}) - \varphi_i(x^1, y^0)| < \varepsilon$$
$$|\bar{u}_i^{k_0} - \bar{u}_i^{k^1}| < \varepsilon,$$

где

$$i = 1, 2, \ldots, m \text{ и } k^1 > N.$$

Кроме того, существуют такие константы K и D, что

$$|\bar{u}_i^{k_0}|<K, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m;$$
$$|\varphi_i(x,\ y)|<D, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m \tag{23}$$

и

$$x\in X, \qquad y\in Q.$$

Теперь, имея в виду (20), (21), (22) и (23), неравенство (19) можно переписать в виде

$$\varepsilon_0\leqslant\varepsilon(2+mK+mD). \tag{24}$$

Так как ε можно выбрать сколь угодно малым, то из (24) следует $0<\varepsilon_0\leqslant 0$. Противоречие.

Осталось доказать несправедливость (18). Сперва покажем, что

$$\sum_{i=1}^{m}\bar{u}_i^{k_0}\varphi_i(\bar{x}^0,\ y^0)=0. \tag{25}$$

Пусть (25) неверно. Тогда из первой части леммы и того, что $\bar{u}_i^{k_0}\geqslant 0$ следует

$$0>\varepsilon_0=\sum_{i=1}^{m}\bar{u}_i^{k_0}\varphi_i(\bar{x}^0,\ y^0). \tag{26}$$

Для каждого k^1 имеем

$$\sum_{i=1}^{m}\bar{u}_i^{k^1}\varphi_i(\bar{x}^{k^1},\ y^{k^1})=0. \tag{27}$$

Из (27) отнимем (26)

$$0<-\varepsilon_0=\sum_{i=1}^{m}\bar{u}_i^{k^1}\varphi_i(\bar{x}^{k^1},\ y^{k^1})-\sum_{i=1}^{m}\bar{u}_i^{k0}\varphi_i(\bar{x}^0,\ y^0)=$$
$$=\Big|\sum_{i=1}^{m}\bar{u}_i^{k^1}\varphi_i(\bar{x}^{k^1},\ y^{k^1})-\sum_{i=1}^{m}\bar{u}_i^{k_0}\varphi_i(\bar{x}^0,\ y^0)\Big|\leqslant \tag{28}$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^{m}\left[|\bar{u}_i^{k^1}|\cdot|\varphi_i(\bar{x}^{k^1},\ y^{k^1})-\varphi_i(\bar{x}^0,\ y^0)+|\bar{u}_i^{k^1},\ -\bar{u}_i^{k_0}|\cdot|\varphi_i(\bar{x}^0,\ y^0)|\right].$$

Так как (28) совпадает с (20), то для каждого $\varepsilon>0$ существует такое N, что когда $k^1>N$

$$-\varepsilon_0\leqslant m\varepsilon(K+D). \tag{29}$$

Из (28) и (29) следует $0<-\varepsilon_0\leqslant 0$. Противоречие. Значит верно равенство (25).

Предположение (18) ввиду (25) перепишется в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^{m}u_i^1\varphi_i(\bar{x}^0,\ y^0)>0, \qquad u^1\geqq 0. \tag{30}$$

Из того, что

$$\bar{x}^0 \in D(y^0)$$

и

$$u^1 \geqq 0$$

следует, что

$$\sum_{i=1}^{m} u_i^1 \varphi_i(x^0, y^0) \leqslant 0. \tag{31}$$

Предположение (18) неверно. Вторая часть леммы доказана.

Теперь введем несколько обозначений и определений $x^s = (x_1^s, \ldots, x_{p_s}^s)$ – вектор евклидова пространства E^{p_s}, $s = 1, 2, \ldots, n$;

$x = (x^1; \ldots; x^s; \ldots; x^n)$ – вектор пространства

$$E^{p_1} \times \ldots \times E^{p_s} \times \ldots \times E^{p_n}; \tag{32}$$

$x(s) = (x^1, \ldots, x^{s-1}, x^{s+1}, \ldots, x^n)$ – вектор пространства

$$E^{p_1} \times \ldots \times E^{p_{s-1}} \times E^{p_{s+1}} \times \ldots \times E^{p_n},\ s = 1, 2, \ldots, n;$$

P_s, $s = 1, 2, \ldots, n$ – ограниченное выпуклое замкнутое множество в пространстве E^{p_s};

$R = P_1 \times \ldots \times P_s \times \ldots \times P_n$;

$R_s = P_1 \times \ldots \times P_{s-1} \times P_{s+1} \times \ldots \times P_n$.

При фиксированном $x(s)$,

$$D[x(s)] = \{\tilde{x}^s \mid f_i^s(x^1, \ldots, \tilde{x}^s, \ldots, x^n) \leqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, m_s,\ \tilde{x}^s \geqq 0\},$$

$s = 1, 2, \ldots, n$.

Определение. Множество $D[x(s)]$ назовем *корректно определенным* на R, если выполняются следующие условия:

1) для каждого $x(s) \in R_s$ множество $D[x(s)]$ не пусто,

2) $D[x(s)] \subset P_s$ для всех $x(s) \in R_s$.

Теперь, используя введенные обозначения и определения, сформулируем основной результат – достаточные условия существования решения.

Теорема. (*существование равновесного решения*). *Пусть имеем сложную задачу математического программирования*

$$\min F_s(x^1, \ldots, x^s, \ldots, x^n),$$
$$x^s \in D_s(x^1, \ldots, x^{s-1}, x^{s+1}, \ldots, x^n) \tag{33}$$

$s = 1, 2, \ldots, n$.

Если существует такое ограниченное выпуклое замкнутое множество R, что выполняются условия:

1) $F_s(x^1, \ldots, x^s, \ldots, x^n)$, $f_i(x^1, \ldots, x^s, \ldots, x^n)$ $(i = 1, 2, \ldots, m_s)$ – *непрерывные функции по x^s в P_s для всех элементов R_s и равномерно непрерывные по $x(s) \in R_s$ для всех $x^s \in P_s$, $s = 1, 2, \ldots, n$;*

2) $D[x(s)]$ *корректно определена на R;*

3) *существует такое $\alpha_0 > 0$, что для всех $x(s) \in R_s$ найдется такое $\tilde{x}^s \in D[x(s)]$, что*

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant m_s} f_1^s(x^1, \ldots, \tilde{x}^s, \ldots, x^n) \leqslant \alpha_0,$$

$s = 1, 2, \ldots, n$,

тогда сложная задача математическсго программирования имеет равновесное решение, т. е. существует такое $\bar{x}$, что

$$F_s(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^s, \ldots, \bar{x}^n) = \min_{x^s \in D[\bar{x}(s)]} F_s(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^{s-1}, x^s, \bar{x}^{s+1}, \ldots, \bar{x}^n), \quad (34)$$

$s = 1, 2, \ldots, n$.

Доказательство. Для доказательства теоремы используем теорему Какутани о неподвижной точке, которая гласит (см. [3]):

Пусть X – замкнутое выпуклое ограниченное множество и φ – полунепрерывное сверху отображение, которое переводит каждую точку множества X в замкнутое выпуклое подмножество X, тогда существует такая точка $x^0 \in X$, что $x^0 \in \varphi(x^0)$.

В качестве X мы возьмем R, на котором конструируем отображение

$$\Psi[x] = \left\{ \tilde{x} \left| \begin{array}{l} F_1(\tilde{x}^1, x^2, \ldots, x^s, \ldots, x^n) = \min\limits_{x^1 \in D[x(1)]} F_s(x^1, x^2, \ldots, x^s, \ldots, x^n) \\ \hline F_s(x^1, \ldots, \tilde{x}^s, \ldots, x^n) = \min\limits_{x^s \in D[x(s)]} F_s(x^1, \ldots, x^s, \ldots, x^n) \\ \hline F_n(x^1, \ldots, x^s, \ldots, \tilde{x}^n) = \min\limits_{x^n \in D[x(n)]} F_n(x^1, \ldots, x^s, \ldots, x^n) \end{array} \right\| \right\} \quad (35)$$

Надо показать, что отображение $\Psi[x]$:

1) полунепрерывное сверху,

2) $\Psi(x)$ – выпуклое множество, принадлежащее R.

1. Для доказательства полунепрерывности сверху надо показать, что из

$$x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}, \ldots \to x^{(0)}$$

и

$$\tilde{x}^{(1)}, \ldots, \tilde{x}^{(n)}, \ldots \to \tilde{x}^{(0)}, \quad (36)$$

где

$$\tilde{x}^k \in \Psi(x^{(k)}), \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \ldots,$$

следует

$$\tilde{x}^{(0)} \in \Psi(x^{(0)}). \quad (37)$$

Положим

$$\Psi_s[x(s)] = \{\tilde{x}^s \mid F_s(x^1, \ldots, \tilde{x}^s, \ldots, x^n) = \min_{x^s \in D[x(s)]} F_s(x^1, \ldots, x^s, \ldots, x^n)\}, \quad (38)$$

т. е.

$$\Psi_s[x(s)] \subset D[x(s)], \qquad s = 1, 2, \ldots, n.$$

Тогда ясно, что

$$\Psi[x] = \Psi_1[x(1)] \times \ldots \times \Psi_s[x(s)] \times \ldots \times \Psi_n[x(n)]. \quad (39)$$

Соотношение (35), в частности, означает, что

$$x^{(1)}(s), \ldots, x^{(n)}(s), \ldots \to x^{(0)}(s)$$

и

$$\tilde{x}^{s(1)}, \ldots, \tilde{x}^{s(n)}, \ldots \to \tilde{x}^{s(0)}, \qquad s = 1, 2, \ldots, n. \quad (40)$$

Из (38) и (40) и того, что $F_s(x)$ и $f_i^s(x)(i=1, \ldots, m_s)$ удовлетворяют условиям леммы, следует, что

$$\bar{x}^{s(0)} \in \Psi_s[x^{(0)}(s)], \quad s=1, 2, \ldots, n, \tag{41}$$

а также

$$\Psi_s[x^{s(0)}] \subset D[x^0(s)]. \tag{42}$$

Из (39) и (41) следует, что отображение $\Psi[x]$ полунепрерывное сверху.

2) Из выпуклости $F_s(x)$ и $f_i(x)(i=1, \ldots, m_s)$ по $x^s \in P_s$ для всех $x(s) \in R_s$ следует выпуклость множеств

$$\Psi_s[x^0(s)], \quad s=1, 2, \ldots, n.$$

Итак,

$$\Psi[x^{(0)}] = \Psi_1[x^{(0)}(1)] \times \ldots \times \Psi_s[x^{(0)}(s)] \times \ldots \times \Psi_n[x^{(0)}(n)]$$

— выпуклое множество.

Из 2) условия теоремы следует $D[x(s)] \subset P_s$, а из (42)

$$\bar{x}^{(0)} \in \Psi[x^{(0)}] \subset R.$$

Следовательно, отображение $\Psi[x]$, $x \in R$ полунепрерывное сверху, переводящее каждую точку множества R в замкнутое выпуклое подмножество R, т. е. все условия теоремы Какутани выполнены. По теореме Какутани существует такое $\bar{x} \in R$, что

$$\bar{x} \in \Psi[\bar{x}],$$

т. е.

$$F_s(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^s, \ldots, \bar{x}^n) = \min_{x^s \in D[\bar{x}(s)]} F_s(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^{s-1}, x^s, \bar{x}^{s+1}, \ldots, \bar{x}^n),$$

$s=1, 2, \ldots, n$,

или $\bar{x}$ — равновесное решение сложной задачи математического программирования (33).

Теорема доказана.

Замечание. Если области определения s-ых частичных задач сложной задачи математического программирования, $s=1, 2, \ldots, n$, не зависит от параметров $x^1, \ldots, x^{s-1}, x^{s+1}, \ldots, x^n$, т. е. $D_s[x(s)] = D_s$, $s=1, 2, \ldots, n$, то за множество $R = P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_s \times \ldots \times P_n$ можно брать любые замкнутые ограниченные и выпуклые множества, которые удовлетворяют условиям

$$D_s \subset P_s, \quad s=1, 2, \ldots, n.$$

В противном случае определение R является довольно сложной задачей.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
25.X.1966

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Карлин, Математические методы в теории игр, программировании и экономике, Мир, 1964.
2. Г. П. Кюнци, В. Крелле, Нелинейное программирование, Советское радио, 1965.
3. S. Kakutani, A generalization of Brouwers fixed point theorem, Duke Math. J., vol. 8, 3, September, 1941.

SUDĖTINGŲ MATEMATINIO PROGRAMAVIMO UŽDAVINIŲ SPRENDINIŲ EGZISTENCIJA

R. JASILIONIS

(Reziumė)

Sudėtingu matematinio programavimo uždaviniu vadinamas (1) uždavinys. Pateikiamos jo sprendinio egzistavimo pakankamos sąlygos.

THE EXISTENCE OF THE SOLUTIONS OF THE COMPLEX MATHEMATICAL PROGRAMMING PROBLEM

R. JASILIONIS

(Summary)

The sufficient conditions for existence of the solutions are pointed out to (1) class of the mathematical programming problem.