LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VII Nr. 2, 1967
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VII № 2, 1967

АНОЛОГ ТЕОРЕМЫ ЭРДЕША – ВИНТНЕРА ДЛЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЗНАЧЕНИЙ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПОЛИНОМА

Р. УЖДАВИНИС

Вещественную или комплексную функцию $f(m)$, определенную на множестве целых положительных чисел, называют аддитивной, если для любой пары взаимно простых m, n

$$f(mn)=f(m)+f(n).$$

Целью настоящей статьи является изучение распределения значений суперпозиции вещественной аддитивной функции и полинома с целыми коэффициентами, т. е. функции распределения

$$\frac{1}{n}\, N\left\{m\leqslant n,\ f\left(R(m)\right)<x\right\}, \tag{1}$$

где символ $N\{\ldots\}$ означает число целых положительных чисел m, удовлетворяющих написанным в скобках условиям, и $R(m)$ – целочисленный полином.

И. Кубилюс в своей недавней статье [1] обратил внимание на то, что предложенный им новый метод доказательства известной теоремы Эрдеша – Винтнера может быть применен к рассмотрению условий сходимости функции распределения (1) при $n\to\infty$ к предельной функции. Как бы потверждением этого высказывания является доказательство нижеследующей теоремы.

В теореме будем ограничиваться лишь теми неприводимыми целочисленными полиномами $R(m)$, которые принимают положительные значения при $m=1,2,\ \ldots$ и обладают следующими двумя свойствами:

а) не только $R(m)$, но и все его приведенные полиномы по простым модулям $p\leqslant v$ (v – степень полинома) являются примитивными;

б) $R(m)\equiv 0 \pmod{p^2}$ неразрешимо при любом простом $p\mid D$ (D – дискриминант полинома).

Теорема. *Пусть $f(m)$ – вещественная аддитивная функция, обладающая следующими свойствами: $|f(p^\alpha)|\leqslant \alpha^s|f(p)|$*), $|f(p)|\leqslant\psi(p)$, где s – произвольная положительная постоянная, не зависящая от p, и $\psi(p)$ – какая-либо медленно убывающая к нулю при $p\to\infty$ монотонная функция. Необходимым и достаточным условием сходимости функции распределения* (1) *при*

*) Здесь и всюду в дальнейшем p^α – знак целой положительной степени простого числа.

$n \to \infty$ к некоторой предельной функции распределения в каждой точке непрерывности последней является сходимость рядов

$$\sum_p \frac{f(p)\,L_R(p)}{p}, \tag{2}$$

$$\sum_p \frac{f^2(p)\,L_R(p)}{p}, \tag{3}$$

где $L_R(p)$ — число классов вычетов, удовлетворяющих сравнению $R(m) \equiv 0 \pmod p$. Характеристическая функция предельной функции распределения в случае ее существования равна

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{p|D} \left(1 - \frac{L_R(p)}{p} + \frac{e^{itf(p)}L_R(p)}{p}\right) \prod_{\substack{p\nmid D \\ p\leqslant n}} \left\{1 - \frac{L_R(p)}{p} + \right.$$

$$\left. + L_R(p)\left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{e^{itf(p^\alpha)}}{p^\alpha}\right\}, \tag{4}$$

причем предел существует для всех t и сходимость к пределу равномерна при $|t| \leqslant T$ для всякого фиксированного T.

Доказательство. В ходе доказательства будем обозначать через c, c_1, c_2, ... абсолютные положительные константы или константы, зависящие от $f(m)$ или полинома $R(m)$; через B — ограничительное число, не всегда одно и то же, и через Θ — ограниченное число по модулю числом 1, также не всегда одно и то же.

1. Пусть предельная функция распределения для (1) существует и равна $F(x)$. В этом случае докажем, что ряд (3) сходится. Допустим, напротив, что этот ряд расходится. Тогда из свойств функции $f(m)$, теорем 1 и 2 в [2] и рассуждений, приводимых в статье [1] (см. стр. 265—266), следует, что

$$F(u) - F(-u) = 0,$$

где $-u$ и u — любые фиксированные точки непрерывности $F(x)$. А это равенство невозможно при достаточно большом u. Поэтому ряд (3) должен сходиться.

2. Докажем теперь, что в случае сходимости ряда (3) необходимым и достаточным условием сходимости функции распределения (1) к предельной функции распределения является сходимость ряда (2) и что характеристическая функция предельной функции распределения в случае ее существования равна (4).

На основании теорем (см. [3], стр. 238), устанавливающих взаимно однозначное и непрерывное соответствие между функциями распределения и их характеристическими функциями, необходимым и достаточным условием сходимости функции распределения (1) к предельной является равномерная сходимость ее характеристической функции

$$\varphi_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\left(\frac{1}{n}\, N\left\{m \leqslant n,\, f\big(R(m)\big) < x\right\}\right) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} e^{itf(R(m))} =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \exp\left\{it\left(\sum_{p|D} f(p^{\delta_p(R(m))}) + \sum_{p\nmid D} f(p^{\alpha_p(R(m))})\right)\right], \tag{5}$$

при $|t|\leqslant T$ для всякого фиксированного T. Здесь

$$\delta_p(m)=\begin{cases}1, & \text{если } p\mid m,\\ 0, & \text{если } p\nmid m\end{cases}$$

и $\alpha_p(m)$ означает такое α, что $p^\alpha\| m$, т.е. $p^\alpha|m$, $p^{\alpha+1}\nmid m$.

Заметим что оценки в дальнейшем будут равномерны относительно $t\in[-T, T]$.

Положим

$$\sum_{p>\exp\sqrt[3]{\ln^2 n}}\frac{f^2(p)L_R(p)}{p}=z^6(n), \tag{6}$$

так что в силу сходимости ряда (3) $z(n)\to 0$ монотонно при $n\to\infty$. Пусть

$$r=r(n)=\exp\sqrt[3]{\ln^2 n}.$$

Очевидно, что $\ln r(n)=o(\ln n)$. Введем еще новые обозначения. Обозначим через γ_p целую часть от $\frac{\ln r}{\ln p}$ и положим $\beta_p(m)=\min\left(\alpha_p(m),\ \gamma_p\right)$.

Теперь в (5) заменим $f\left(R(m)\right)$ функцией

$$f_n\left(R(m)\right)=\sum_{p\mid D}f(p^{\delta_p(R(m))})+\sum_{p\leqslant r,\ p\nmid D}f(p^{\beta_p(R(m))})+\sum_{p>r}f(p^{\alpha_p(R(m))}),$$

где $r(n)>|D|$. Для $m=1,2,\ \ldots,\ n$ функция $f\left(R(m)\right)$ может отличаться от $f_n\left(R(m)\right)$ лишь по тем m, для которых $R(m)$ делятся хотя бы на одно из чисел p^α, $p\leqslant r$, $\alpha>\gamma_p$. Очевидно, что таких чисел не больше чем

$$U(n)=\sum_{\substack{p\leqslant r\\ \gamma_p+1\leqslant\alpha\leqslant\frac{\ln R(n)}{\ln p}}}N\{m\leqslant n,\ R(m)\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,p^\alpha)\}. \tag{7}$$

По лемме 3 (см. [2], стр. 225)

$$N\{m\leqslant n,\ R(m)\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,p^\alpha)\}=\left(\left[\frac{n}{p^\alpha}\right]+\Theta\right)L_R(p^\alpha)\ ^{*)},$$

$$L_R(p^\alpha)\leqslant c. \tag{8}$$

Вернемся к сумме (7). Имеем, что

$$U(n)\leqslant cn\sum_{p\leqslant r,\ \alpha>\gamma_p+1}\frac{1}{p^\alpha}+c\sum_{p\leqslant r,\ \gamma_p+1\leqslant\alpha\leqslant\frac{\ln R(n)}{\ln p}}1=$$

$$=B_n\sum_{p\leqslant r}\frac{1}{p^{\gamma_p+1}}+B\ln n\sum_{p\leqslant r}\frac{1}{\ln p}=\frac{Bn}{r}\sum_{p\leqslant r}1+\frac{Br\ln n}{\ln r}=o(n).$$

Отсюда следует, что ошибка от такой замены будет $o(1)$. Поэтому

$$\varphi_n(t)=\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}e^{itf_n(R(m))}+o(1). \tag{9}$$

---

*) Здесь $[x]$ означает целую часть от x.

Чтобы, далее, заменить в (9) $f_n\left(R(m)\right)$ функцией

$$f_r\left(R(m)\right)=\sum_{p|D} f\left(p^{\delta_p(R(m))}\right)+\sum_{p\leqslant r,\ p\nmid D} f\left(p^{\beta_p(R(m))}\right),$$

нам понадобится оценить сумму

$$S=\sum_{m=1}^{n}\left|f_n\left(R(m)\right)-f_r\left(R(m)\right)-\left(A\left(n^{\frac{1}{2}}\right)-A(r)\right)\right|.$$

Очевидно, что

$$S\leqslant \sum\nolimits_1+\sum\nolimits_2+\sum\nolimits_3+\sum\nolimits_4, \tag{10}$$

где

$$\sum\nolimits_1=\sum_{m=1}^{n}\left|\sum_{\substack{r<p\leqslant\sqrt{n}\\ p|R(m),}} f(p)-\left(A\left(n^{\frac{1}{2}}\right)-A(r)\right)\right|,\quad \sum\nolimits_2=\sum_{m=1}^{n}\sum_{\substack{r<p\leqslant\sqrt{n}\\ p^2\| R(m)}}|f(p)|,$$

$$\sum\nolimits_3=\sum_{m=1}^{n}\left|\sum_{\substack{r<p\leqslant\sqrt{n}\\ p^{\alpha}/R(m),\ \alpha>1}}|f(p^{\alpha})|,\quad \sum\nolimits_4=\sum_{m=1}^{n}\sum_{\substack{p>\sqrt{n}\\ p^{\alpha}|R(m)}}|f(p^{\alpha})|.$$

Займемся сперва оценкой Σ_4. Ввиду того, что для каждого m число простых чисел $p>\sqrt{n}$ при достаточно большом n, делящих $R(m)$, не больше чем $2v+1$, получим

$$\sum\nolimits_4\leqslant\psi(\sqrt{n})\sum_{m=1}^{n}\sum_{\substack{p>\sqrt{n}\\ p^{\alpha}/R(m)}}\alpha^s\leqslant n\psi(\sqrt{n})(2v+1)^{s+1}\leqslant c_1 n\psi(\sqrt{n}). \tag{11}$$

Перейдем к оценкам сумм Σ_3 и Σ_2. Учитывая (8) и свойства функции $f(m)$, найдем:

$$\sum\nolimits_3\leqslant c\psi(r)\sum_{\substack{r<p\leqslant\sqrt{n}\\ 1\leqslant\alpha\leqslant\frac{\ln R(n)}{\ln p}}}\alpha^s\left(\frac{n}{p^{\alpha}}+1\right)\leqslant c_2 n\psi(r), \tag{12}$$

$$\sum\nolimits_2\leqslant 2c\psi(r)\sum_{r<p\leqslant\sqrt{n}}\frac{n}{p^{\alpha}}\leqslant c_3 n\psi(r). \tag{13}$$

Остается оценить Σ_1. В силу неравенства Коши

$$\sum\nolimits_1\leqslant n^{\frac{1}{2}}\left[\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{\substack{r<p\leqslant\sqrt{n}\\ p|R(m)}} f(p)-\left(A\left(n^{\frac{1}{2}}\right)-A(r)\right)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Поступая совершенно так же, как в § 3 [2], получим оценку

$$\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{\substack{r<p\leqslant\sqrt{n}\\ p|R(m)}} f(p)-\left(A\left(n^{\frac{1}{2}}\right)-A(r)\right)\right)^2=n\sum_{r<p\leqslant\sqrt{n}}\frac{f^2(p)L_R(p)}{p}+c_4 n\psi^2(r).$$

Таким образом,

$$\sum\nolimits_1 \leqslant n \left(\sum_{p>r} \frac{f^2(p) L_R(p)}{p} \right)^{\frac{1}{2}} + c_5 n \psi(r) = nz^3(n) + c_6 n\psi(r). \tag{14}$$

Подставляя оценки (11), (12), (13), (14) в (10), находим

$$S \leqslant nz^3(n) + c_6 n\psi(r) \leqslant c_7 n \max\left(z^3(n),\ \psi(r)\right) = c_7 n\tilde{z}^3(n).$$

Откуда следует, что

$$\frac{1}{n} N\left\{m \leqslant n,\ \left| f_n\left(R(m)\right) - f_r\left(R(m)\right) - \left(A\left(n^{\frac{1}{2}}\right) - A(r)\right) \right| > \tilde{z}^2(n)\right\} \leqslant c_8 \tilde{z}(n). \tag{15}$$

Разобьем теперь сумму в правой части (9) на две суммы Σ_1 и Σ_2. Сумма Σ_1 будет состоять из всех тех чисел m, для которых $\left| f_n\left(R(m)\right) - f_r\left(R(m)\right) - \left(A\left(n^{\frac{1}{2}}\right) - A(r)\right) \right| > \tilde{z}^2(n)$, а сумма Σ_2 — из чисел m, для которых выполняется противоположное неравенство. Согласно (15) сумма Σ_1 равна $B\tilde{z}(n)$. В сумме Σ_2

$$\exp\left\{itf_n\left(R(m)\right)\right\} = \exp\left\{itf_r\left(R(m)\right) + it \sum_{r<p\leqslant\sqrt{n}} \frac{f(p) L_R(p)}{p} + B\tilde{z}^2(n)\right\} =$$

$$= \exp\left\{it \sum_{r<p\leqslant\sqrt{n}} \frac{f(p) L_R(p)}{p}\right\} e^{itf_r(R(m))} + B\tilde{z}^2(n).$$

Следовательно,

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{n} \exp\left\{it \sum_{r<p\leqslant\sqrt{n}} \frac{f(p) L_R(p)}{p}\right\} \sum_{m=1}^{n} e^{itf(R(m))} + o(1). \tag{16}$$

Для дальнейшего нам необходима следующая лемма.

Лемма. *Пусть* $r = r(n)$ — *функция от* n, *подчиненная условиям* $r > 2$, $\ln r(n) = o(\ln n)$ *при* $n \to \infty$; B, b — *целые положительные числа, причем* $Bb \leqslant \sqrt[4]{n}$; Q — *любое множество простых чисел, не превосходящих* r. *Тогда число целых положительных чисел* $m \leqslant n$, *удовлетворяющих условиям*

$$\begin{cases} R(m) \equiv 0 \pmod{Bb}, \\ R(m) \not\equiv 0 \pmod{bp},\ p \in Q,\ p \nmid B, \end{cases}$$

равно 0, *если* $Bb \equiv 0 \pmod{p^2}$ *для простых* $p \mid D$, *или*

$$\frac{n}{Bb} \prod_{p \mid Bb} L_R(p) \prod_{p \in Q} \left(1 - \frac{\nu_R(p)}{p}\right)\left(1 + o(1)\right)$$

в противном случае, где

$$\nu_R(p) = \begin{cases} 0, & \text{если } p \backslash B, \\ 1, & \text{если } p \nmid B,\ p \backslash b, \\ L_R(p), & \text{если } p \nmid Bb, \end{cases}$$

причем оценка равномерна относительно Q, B, b с $Bb \leqslant \sqrt[4]{n}$ и полинома $R(m)$.

Доказательство леммы ничем не отличается от доказательства методом решета аналогичной леммы 6, данного в [2]. Причем здесь используются дополнительные свойства функции $L_R(p): L_R(p) < p$ для $p \leqslant v$, $L_R(p^\alpha) = 0$ с $\alpha > 1$ для $p|D$, которые непосредственно следуют из свойств полинома $R(m)$ и являются существенными для приводимой леммы.

Введем далее в рассмотрение два вероятностных пространства $\{E, \mathfrak{S}, \mu_n\}$ и $\{E, \mathfrak{S}, P\}$, где пространством элементарных событий служит $E = \{1,2, \ldots, n\}$, множеством случайных событий $\mathfrak{S}$ — наименьшая алгебра подмножеств множества E, содержащая все множества $E^{(1)}(p^\delta)$ с $p \backslash D$, $\delta = 0;1$; $E^{(2)}(p^\alpha)$ с $p \nmid D$, $p \leqslant r$, $\alpha = 0, 1, \ldots, \gamma_p$. Здесь каждое из множеств $E^{(1)}(p^\delta)$, $E^2(p^\infty)$ состоит из тех целых положительных $m \leqslant n$, для которых соответственно $\delta_p\Big(R(m)\Big) = \delta$, $\beta_p\Big(R(m)\Big) = \alpha$. Так как

$$E^{(1)}(1) \cup E^{(1)}(p) = E, \bigcup_{\alpha=0}^{\gamma_p} E^{(2)}(p^\alpha) = E$$

и множества $E^{(1)}(p^\delta)$ для $\delta = 0;1$, а также множества $E^{(2)}(p^\alpha)$ для различных α, не пересекаются, то множества алгебры $\mathfrak{S}$ можно представить в виде объединений множеств типа

$$\bigcap_{p|D} E^{(1)}(p^{\delta_p(k)}) \bigcap_{\substack{p \leqslant r \\ p \nmid D}} E^{(2)}(p^{\alpha_p(k)}),$$

где число k имеет вид

$$k = \prod_{p|D} p^{\delta_p} \prod_{\substack{p \leqslant r \\ p \nmid D}} p^{\alpha_p}, \quad 0 \leqslant \delta_p \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \alpha_p \leqslant \gamma_p.$$

Таким образом, для всякого $A \in \mathfrak{S}$ существует набор различных между собой k, что

$$A = \bigcup_k \bigcap_{p|D} E^{(1)}(p^{\delta_p(k)}) \bigcap_{\substack{p \leqslant r \\ p \nmid D}} E^{(2)}(p^{\alpha_p(k)}),$$

причем объединение берется по этим k. После этого определяем вероятностную меру

$$P(A) = \sum_k \prod_{p|D} \pi^{(1)}(p^{\delta_p(k)}) \prod_{\substack{p \leqslant r \\ p \nmid D}} \pi^{(2)}(p^{\alpha_p(k)}),$$

где сумма берется по тем же k и

$$\pi^{(1)}(p^\delta) = \begin{cases} 1 - \dfrac{L_R(p)}{p}, & \text{если } \delta = 0, \\ \dfrac{L_R(p)}{p}, & \text{если } \delta = 1, \end{cases} \qquad \pi^{(2)}(p^\alpha) = \begin{cases} 1 - \dfrac{L_R(p)}{p}, & \text{если } \alpha = 0, \\ \dfrac{L_R(p)}{p^\alpha}\left(1 - \dfrac{1}{p}\right), & \text{если } 1 \leqslant \alpha < \gamma_p, \\ \dfrac{L_R(p)}{p^\gamma}, & \text{если } \alpha = \gamma_p. \end{cases}$$

В качестве меры $\mu_n(A)$ возьмем $\frac{1}{n} N\{m \leqslant n,\ m \in A\}$.

Воспользовавшись сформулированной выше леммой, леммой 7 и теми же рассуждениями, которые приведены в статье [2] (стр. 268—269), получим для всех $A \in \mathfrak{S}$ оценку

$$\mu_n(A) - P(A) = o(1). \tag{17}$$

Так как $f(p^{\delta_p(R(m))})$ с $p \backslash D$ и $f(p^{\beta_p(R(m))})$ с $p \nmid D$ являются независимыми случайными величинами относительно пространства $\{E, \mathfrak{S}, P\}$, то в силу (17)

$$\varphi_n(t) = \exp\left\{it \sum_{r<p\leqslant\sqrt{n}} \frac{f(p) L_R(p)}{p}\right\} \prod_{p|D} \xi_p^{(1)}(t) \prod_{p\leqslant r,\ p\nmid D} \xi_{p,n}^{(2)}(t) + o(1), \tag{18}$$

где

$$\xi_p^{(1)}(t) = 1 + \frac{(e^{itf(p)}-1) L_R(p)}{p}, \quad \xi_{p,n}^{(2)}(t) = \sum_{\alpha=0}^{\gamma_p} \pi^{(2)}(p^\alpha) e^{itf(p^\alpha)}.$$

Очевидно,

$$\xi_{p,n}^{(2)}(t) - 1 - \frac{(e^{itf(p)}-1) L_R(p)}{p} = \Theta\left(\frac{L_R(p)}{p} + \right.$$

$$\left. + L_R(p)\left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\alpha=2}^{\gamma_p - 1} \frac{1}{p^\alpha} + \frac{L_R(p)}{p^{\gamma_p}}\right) = \frac{2\Theta L_R(p)}{p^2} \tag{19}$$

и

$$|\xi_{p,n}^{(2)}(t)| \geqslant \left| 1 + \frac{(e^{itf(p)}-1) L_R(p)}{p} \right| - \frac{2L_R(p)}{p} \geqslant$$

$$\geqslant 1 - \frac{2L_R(p)}{p}\left(1 + \frac{1}{p}\right) \geqslant 1 - \frac{2v}{p}\left(1 + \frac{1}{p}\right) > \frac{1}{(2v+1)^2} \tag{20}$$

для $p > 2v$. Итак, $\xi_{p,n}^{(2)}(t) \neq 0$ при $p > 2v$. Из (18), (19), (20) заключаем, что

$$\varphi_n(t) = \prod_{p|D} \xi_p^{(1)}(t) \prod_{\substack{p\leqslant 2v \\ p\nmid D}} \xi_{p,n}^{(2)}(t) \exp\left\{it \sum_{r<p\leqslant\sqrt{n}} \frac{f(p) L_R(p)}{p} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{2v<p\leqslant r \\ p \times D}} \ln \xi_{p,n}^{(2)}(t)\right\} + o(1) = \prod_{p|D} \xi_p^{(1)}(t) \prod_{\substack{p\leqslant 2v \\ p\nmid D}} \xi_{p,n}^{(2)}(t) \exp\left\{\varkappa(t) + \right.$$

$$\left. + it \sum_{r<p\leqslant\sqrt{n}} \frac{f(p) L_R(p)}{p} + B \sum_{p\leqslant r} \frac{1}{p^2}\right\} + o(1),$$

где

$$\varkappa(t) = \sum_{2v<p\leqslant r} \frac{(e^{itf(p)}-1) L_R(p)}{p}.$$

Ввиду неравенства

$$|e^{iy} - 1 - iy| \leqslant \frac{1}{2} y^2, \tag{21}$$

справедливого для всех вещественных y, и свойств функции $f(m)$

$$\varkappa(t) = it \sum_{2v<p\leqslant r} \frac{f(p) L_R(p)}{p} + \frac{\Theta}{2} t^2 \sum_{2v<p\leqslant r} \frac{f^2(p) L_R(p)}{p}. \tag{22}$$

Следовательно,

$$\varphi_n(t)=\prod_{p|D}\xi_p^{(1)}(t)\prod_{p\le 2v,\ p\nmid D}\xi_{p,n}^{(2)}(t)\exp\Big\{it\sum_{2v<p\le\sqrt{n}}\frac{f(p)L_R(p)}{p}+$$

$$+\Theta t^2\sum_{2v<p\le r}\frac{f^2(p)L_R(p)}{p}+B\Big\}+o(1).$$

Откуда в виду сходимости ряда (3) следует, что для равномерной сходимости при $t\in[-T, T]$ функции $\varphi_n(t)$ к предельной необходима и достаточна сходимость ряда (2).

Остается подсчитать еще характеристическую функцию предельной функции распределения в случае ее существования.

В силу сходимости ряда (2)

$$\varphi_n(t)=\prod_{p|D}\xi_p^{(1)}(t)\prod_{p\le r,\ p\nmid D}\xi_{p,n}^{(2)}(t)+o(1).$$

Полагая

$$\chi_p(t)=\left(1-\frac{L_R(p)}{p}\right)+L_R(p)\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{e^{itf(p^\alpha)}}{p^\alpha},$$

оценим разность $\chi_p(t)-\xi_{p,n}^{(2)}(t)$. Имеем

$$\chi_p(t)-\xi_{p,n}^{(2)}(t)=\frac{-\exp\{itf(p^{\gamma_p})\}L_R(p)}{p^{\gamma_p+1}}+$$

$$+L_R(p)\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{\alpha=\gamma_p+1}\frac{e^{itf(p^\alpha)}}{p^\alpha}=\frac{2\Theta L_R(p)}{p^{\gamma_p+1}}=\frac{B}{r}.$$

Тогда

$$\varphi_n(t)=\prod_{p|D}\xi_p^{(1)}(t)\prod_{p\le r,\ p\nmid D}\left(\chi_p(t)+\frac{B}{r}\right)+o(1).$$

Далее, поступая совершенно так же, как в статье [1] (стр. 270), получим

$$\varphi_n(t)=\prod_{p|D}\xi_p^{(1)}(t)\prod_{p\le r,\ p\nmid D}\chi_p(t)+o(1). \tag{23}$$

Точно так же, как в (19), (20), выводим:

$$\chi_p(t)-1-\frac{(e^{itf(p)}-1)L_R(p)}{p}=\frac{2\Theta L_R(p)}{p},$$

$$|\chi_p(t)|>\frac{1}{(2v+1)^2},\ \text{при}\ p>2v.$$

Тогда ввиду (21) и сходимости рядов (2), (3)

$$\prod_{r<p\le n}\chi_p(t)=\exp\Big\{\sum_{r<p\le n}\frac{(e^{itf(p)}-1)L_R(p)}{p}+B\sum_{p>r}\frac{1}{p^2}\Big\}=$$

$$=\exp\Big\{it\sum_{r<p\le n}\frac{f(p)L_R(p)}{p}+\frac{\Theta t^2}{2}\sum_{r<p\le n}\frac{f^2(p)L_R(p)}{p}+o(1)\Big\}=$$

$$=\exp\{o(1)\}=1+o(1).$$

Отсюда и из (23) следует, что

$$\varphi_n(t)=\prod_{p\mid D}\left\{\frac{(e^{itf(p)}-1)L_R(p)}{p}+1\right\}\prod_{\substack{p\leq n\\ p\nmid D}}\chi_p(t)+o(1).$$

Теорема доказана.

Примеры. В качестве примеров рассмотрим распределение значений функций $\frac{\varphi(m)}{m}$ и $\frac{\sigma(m)}{m}$ на множестве значений полинома $R(m)=m^2+1$ $(m=1, 2, \ldots, n)$, когда $n\to\infty$. Здесь $\varphi(m)$ — функция Эйлера, $\sigma(m)$ — сумма делителей числа m. Легко проверить, что полином m^2+1 обладает в начале статьи перечисленными свойствами. При этом

$$L_R(p)=\begin{cases}1 \text{ при } p=2,\\ 2 \text{ при } p\equiv 1 \pmod 4,\\ 0 \text{ при } p\equiv -1 \pmod 4.\end{cases}$$

Очевидно, что функции $ln\,\frac{\varphi(m)}{m}$ и $ln\,\frac{\sigma(m)}{m}$ аддитивные и удовлетворяют условиям теоремы, так как

$$\ln\frac{\varphi(p^\alpha)}{p^\alpha}=\ln\left(1-\frac{1}{p}\right),\quad \ln\frac{\sigma(p^\alpha)}{p^\alpha}\leqslant\alpha\ln\left(1+\frac{1}{p}\right)$$

и ряды

$$\sum_p\frac{\ln\left(1\pm\frac{1}{p}\right)}{p},\qquad \sum_p\frac{\ln^2\left(1\pm\frac{1}{p}\right)}{p}$$

сходятся. Поэтому для функций распределения

$$\frac{1}{n}N\left\{m\leqslant n,\ \ln\frac{\varphi(m^2+1)}{m^2+1}<x\right\},$$

$$\frac{1}{n}N\left\{m\leqslant n,\ \ln\frac{\sigma(m^2+1)}{m^2+1}<x\right\}$$

существуют предельные функции распределения, характеристические функции которых соответственно равны

$$\left(\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{it+1}\right)\prod_{p\equiv 1 \pmod 4}\left\{1+\frac{2}{p}\left(\left(1-\frac{1}{p}\right)^{it}-1\right)\right\},$$

$$\left(\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{it+1}\right)\prod_{p\equiv 1 \pmod 4}\left\{1-\frac{2}{p}+\left(2-\frac{2}{p}\right)\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{p}+\ldots+\frac{1}{p^\alpha}\right)^{it}}{p^\alpha}\right\}.$$

Вильнюсский филиал
Каунасского Политехнического
института

Поступило в редакцию
20.XI.1966

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Кубилюс, Об асимптотических законах распределения аддитивных арифметических функций, Лит. мат. сб., V, 2 (1965), 261—273.
2. Р. Уждавинис, Арифметические функции на множествах значений целочисленных полиномов, Лит. мат. сб., II, 2 (1962), 253—280.
3. Б. Гнеденко, Курс теории вероятностей, М., (1961).

ERDEŠO—VINTNERIO TEOREMOS ANALOGAS POLINOMO SU SVEIKAIS KOEFICIENTAIS REIKSMIŲ SEKAI

R. UŽDAVINYS

(Reziumė)

Funkcija $f(m)$, definuota natūrinių skaičių aibėje, yra vadinama adityvine, jei kiekvienai reliatyviai pirminių skaičių porai m, n

$$f(mn)=f(m)+f(n).$$

Straipsnyje, naudojantis rėčio metodu ir charakteringųjų funkcijų teorija, įrodomas Erdešo—Vintnerio teoremos analogas funkcijoms $f(m)$, kurių argumentais yra polinomai su sveikais koeficientais.

ANALOG DES ERDÖS—WINTNERSCHEN SATZES FÜR DIE ZAHLENFOLGE DER WERTE VON POLYNOME MIT GANZZAHLINGEN KOEFFICIENTEN

R. UŽDAVINYS

(Zuzammenfassung)

Eine additive Funktion $f(m)$ ist durch Eigenschaft

$$f(mn)=f(m)+f(n), \quad (m, n)=1,$$

definiert.

Mit Hilfe der Siebmethode und der Theorie der charakteristischen Funktionen wird ein Analog des Erdös—Wintnerschen Satzes über die Verteilung der Werte von Funktionen $f(m)$, deren Argumente die Polynome mit ganzzahligen Koefficienten sind, abgeleitet.