LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VII Nr. 2, 1967
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VII № 2, 1967

О ГЕОМЕТРИИ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

В. И. БЛИЗНИКАС

Методом Г. Ф. Лаптева [2] исследуются некоторые вопросы геометрии систем дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} + H^i_{\alpha\beta}\left(x^k,\ u^\gamma,\ \frac{\partial x^k}{\partial u^\gamma}\right) = 0 \tag{1}$$

$$(i,\ j,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ \alpha,\ \beta,\ \gamma = 1,\ 2,\ \ldots,\ m,\ m < n).$$

Найдены дифференциально-геометрические связности, усеченные аффинные и усеченные тензорные связности, а также и аффинные связности общего вида. Для частного класса систем дифференциальных уравнений, т. е. таких систем, которые определяют пространства m-протяжений, указаны пространства проективной связности, инвариантным образом присоединенные к рассматриваемым системам дифференциальных уравнений.

§ 1. Пространство m-мерных поверхностных элементов

1. *Структурные уравнения.* Пусть V_n и V_m – дифференцируемые многообразия, структурные уравнения которых (а так же и присоединенных многообразий [3]: $V_n^{(1)},\ V_n^{(2)},\ \ldots,\ V_n^{(p)}$ и $V_m^{(1)},\ V_m^{(2)},\ \ldots,\ V_m^{p}$ имеют вид

$$D\omega^i = [\omega^k,\ \omega^i_k],$$

$$D\omega^i_{j_1 \ldots j_a} = \sum_{s=1}^{a} \frac{a!}{s!\,(a-s)!}[\omega^k_{(j_1 \ldots j_s},\ \omega^i_{j_{s+1} \ldots j_a)}] + [\omega^k,\ \omega^i_{j_1 \ldots j_a k}], \tag{2}$$

$$D\Theta^\alpha = [\Theta^\beta,\ \Theta^\alpha_\beta],$$

$$D\Theta^\alpha_{\beta_1 \ldots \beta_a} = \sum_{s=1}^{a} \frac{a!}{s!\,(a-s)!}[\Theta^\gamma_{(\beta_1 \ldots \beta_s},\ \Theta^\alpha_{(\beta_{s+1} \ldots \beta_a)\gamma}] + [\Theta^\gamma,\ \Theta^\alpha_{\beta_1 \ldots \beta_a \gamma}]. \tag{3}$$

Дифференциальные группы $GL^p(n,\ R)$ и $GL^p(m,\ R)$ (порядка p) определяются инвариантными формами

$$\mathfrak{d}^i_{j_1 \ldots j_a} = \omega^i_{j_1 \ldots j_a}\big|_{\omega^i=0},\quad \mathfrak{d}^\alpha_{\beta_1 \ldots \beta_a} = \Theta^\alpha_{\beta_1 \ldots \beta_a}\big|_{\Theta^\alpha=0},$$

которые имеют следующую структуру:

$$D\mathfrak{d}^i_{j_1\ldots j_a}=\sum_{s=1}^{a}\frac{a!}{s!\,(a-s)!}[\mathfrak{d}^k_{(j_1\ldots j_s},\ \mathfrak{d}^i_{j_{s+1}\ldots j_a)k}],\tag{4}$$

$$D\mathfrak{d}^\alpha_{\beta_1\ldots\beta_a}=\sum_{s=1}^{a}\frac{a!}{s!\,(a-s)!}[\mathfrak{d}^\gamma_{(\beta_1\ldots\beta_s},\ \mathfrak{d}^\alpha_{\beta_{s+1}\ldots\beta_a)\gamma}].\tag{5}$$

Очевидно, что прямое произведение $GL^p(n,\ R)\times GL^p(m,\ R)$ дифференциальных групп $GL^p(n,\ R)$ и $GL^p(m,\ R)$ определяется инвариантными формами $\mathfrak{d}^i_{j_1\ldots j_a}$ и $\mathfrak{d}^\alpha_{\beta_1\ldots\beta_a}$. Если прямое произведение $GL(n,\ R)\times J\Big(GL(m,\ R)\Big)\Big(J$ – инволютивное преобразование группы $GL(m,\ R)\Big)$ аффинных групп $GL(n,\ R)$ и $GL(m,\ R)$ с инвариантными формами $\mathfrak{d}^i_j$ и $\mathfrak{d}^\alpha_\beta$ представлено в векторном пространстве $T_n\otimes T^*_m$, где T_n – касательное пространство дифференцируемого многообразия V_n, а T^*_m – дуальное пространство касательного пространства T_m к V_m (в произвольно фиксированной точке), то дифференциальные формы инфинитезимального смещения репера этого пространства имеют вид

$$\mathfrak{d}^{i\beta}_{\alpha j}=\delta^\beta_\alpha\,\mathfrak{d}^i_j-\delta^i_j\,\mathfrak{d}^\beta_\alpha\tag{6}$$

и удовлетворяют структурным уравнениям

$$D\,\mathfrak{d}^{i\beta}_{\alpha j}=[\mathfrak{d}^{k\beta}_{\gamma j},\ \mathfrak{d}^{i\gamma}_{\alpha k}].\tag{7}$$

Расслоенное пространство $E(B,\ F,\ G,\ p\ Z)$, где $B=V_n\times V_m$, $F=T_n\otimes T^*_m$, $G=GL(n,\ R)\times J\Big(GL(m,\ R)\Big)$, p: $E\to B$, Z – семейство гомеоморфизмов, называется пространством m-мерных поверхностных элементов $K^{(1)}_{n,m}$. Пространство $K^{(1)}_{n,m}$ является частным случаем пространства опорных элементов и опорным объектом в этом случае является тензор p^i_α. Локальные координаты $(x^i,\ u^\alpha,\ p^i_\alpha)$ пространства $K^{(1)}_{n,m}$ можно рассматривать как первые интегралы вполне интегрируемой системы

$$\omega^i=0,\ \ \Theta^\alpha=0,\ \ dp^i_\alpha+p^k_\alpha\omega^i_k-p^i_\beta\Theta^\beta_\alpha=0,\tag{8}$$

ибо формы $\Theta^i_\alpha=dp^i_\alpha+p^k_\alpha\omega^i_k-p^i_\beta\Theta^\beta_\alpha$ имеют следующую структуру:

$$D\Theta^i_\alpha=[\Theta^k_\alpha,\ \omega^i_k]-[\Theta^i_\beta,\ \Theta^\beta_\alpha]+[\omega^k,\ \Theta^i_{\alpha k}]+[\Theta^\beta,\ \Theta^i_{\alpha\beta}],\tag{9}$$

где

$$\Theta^i_{\alpha k}=p^l_k\omega^i_{lk},\ \ \Theta^i_{\alpha\beta}=-p^i_\gamma\Theta^\gamma_{\alpha\beta}.\tag{10}$$

Уравнения (2_1), (3_1) и (9) называются структурными уравнениями пространства $K^{(1)}_{n,m}$. Вертикальная дифференциальная группа пространства $K^{(1)}_{n,m}$ изоморфна группе $GL(n,\ R)\times J\Big(GL(m,\ R)\Big)$.

Дифференцируемое многообразие V_m иногда называется параметрическим многообразием пространства m-мерных поверхностных элементов $K^{(1)}_{n,m}$. Если V_m является m-мерным аффинным пространством, то формы ω^i и Θ^i_α образуют вполне интегрируемую систему и в этом случае получается пространство переменных $(x^i,\ p^i_\alpha)$, которое называется аффинным пространством m-мерных плоских элементов. Аналогичным образом можно определить и проективное пространство m-мерных плоских элементов. Если V_m является пространством представления группы Ли G с левоинварнантными формами $\varphi^\alpha (a=1,\ 2,\ \ldots,\ r)$:

$$D\varphi^a = \frac{1}{2} C^a_{bc} [\varphi^b,\ \varphi^c], \tag{11}$$

т. е. локальные координаты u^α пространства V_m являются первыми интегралами вполне интегрируемой системы

$$du^\alpha + U^\alpha_a(u)\,\varphi^\alpha = 0, \tag{12}$$

то получим G – однородное пространство m-мерных поверхностных элементов. В том случае, когда (12) определяют линейное представление группы G, получается G – однородное пространство m-мерных плоских элементов, которые называется обобщенным пространством m-мерных плоских элементов.

2. *Дифференциально-геометрические связности пространства* $K^{(1)}_{n,m}$. Пфаффовые формы

$$\overset{\circ}{\Theta}{}^i_\alpha = \Theta^i_\alpha + N^i_{\alpha k}\omega^k + M^i_{\alpha\beta}\Theta^\beta \tag{13}$$

определяют дифференциально-геометрическую связность пространства $K^{(1)}_{n,m}$ тогда и только тогда, когда на $K^{(1)}_{n,m}$ заданы следующие поля дифференциально-геометрических объектов:

$$\nabla N^i_{\alpha k} - \Theta^i_{\alpha k} = N^i_{\alpha k\beta}\Theta^\beta + N^i_{\alpha kh}\omega^h + N^{i\cdot\sigma}_{\alpha kh}\Theta^h_\sigma, \tag{14}$$

$$\nabla M^i_{\alpha\beta} - \Theta^i_{\alpha\beta} = M^i_{\alpha\beta\gamma}\Theta^\gamma + M^i_{\alpha\beta k}\omega^k + M^{i\cdot\sigma}_{\alpha\beta h}\Theta^h_\sigma. \tag{15}$$

Эти объекты будем называть объектами дифференциально-геометрической связности пространства $K^{(1)}_{n,m}$.

Рассмотрим касательное пространство пространства $K^{(1)}_{n,m}$. Так как уравнения движения подвижного репера $\{e_i,\ e_\alpha,\ e^\alpha_i\}$ пространства T_{n+m+nm} для $(x^i_0,\ u^\alpha_0,\ \overset{\circ}{p}{}^i_\alpha) \in K^{(1)}_{n,m}$ имеют вид

$$\begin{aligned} de_i &= \mathfrak{d}^k_i e_k + \mathfrak{d}^k_{\alpha i} e^\alpha_k, \\ de_\alpha &= \mathfrak{d}^\beta_\alpha e_\beta + \mathfrak{d}^k_{\alpha\beta} e^\beta_k, \\ de^\alpha_i &= \mathfrak{d}^k_i e^\alpha_k - \mathfrak{d}^\alpha_\beta e^\beta_i, \end{aligned} \tag{16}$$

где $\mathfrak{d}^i_j$, $\mathfrak{d}^\alpha_\beta$, $\mathfrak{d}^k_{\alpha i}$ и $\mathfrak{d}^k_{\alpha\beta}$ – инвариантные формы первой полной дифференциальной группы пространства $K^{(1)}_{n,m}$, то пространство T_{n+m+nm} имеет инвариантное подпространство T_{nm}, которое называется вертикальным касательным пространством слоя пространства $K^{(1)}_{n,m}$. Уравнения движения подвижного репера

$\{e^i, e^\alpha, e^\alpha_i\}$ дуального касательного пространства T^*_{n+m+nm} имеют вид

$$de^i = -\mathfrak{d}^i_k e^k,$$
$$de^\alpha = -\mathfrak{d}^\alpha_\beta e^\beta,$$
$$de^i_\alpha = -\mathfrak{d}^i_k e^k_\alpha + \mathfrak{d}^\beta_\alpha e^i_\beta - \mathfrak{d}^i_{\alpha k} e^k - \mathfrak{d}^i_{\alpha\beta} e^\beta, \tag{17}$$

откуда и следует, что T^*_{n+m+nm} имеет инвариантные подпространства T^*_n, T^*_m и $T^*_n \dotplus T^*_m$. Пространство T^*_{n+m+nm} называется оснащенным или нормализованным, если задано подпространство H^*_{nm}, инвариантное относительно преобразований первой полной дифференциальной группы пространства $K^{(1)}_{n,m}$, и такое, что

$$T^*_{n+m+nm} = T^*_n \dotplus T^*_m \dotplus H^*_{nm},$$
$$H^*_{nm} \cap (T^*_n \dotplus T^*_m) = \varnothing.$$

Если подпространство определено линейно независимыми векторами

$$E^i_\alpha = e^i_\alpha + \mathcal{N}^i_{\alpha k} e^k + \mathcal{M}^i_{\alpha\beta} e^\beta, \tag{18}$$

то условия инвариантности имеют вид

$$dE^i_\alpha = \Psi'^{i\beta}_{\alpha k} E^k_\beta, \tag{19}$$

где пфаффовые формы $\Psi'^{i\beta}_{\alpha k}$ удовлетворяют уравнениям структуры (они являются условиями вполной интегрируемости системы (19)):

$$D\Psi'^{i\gamma}_{\alpha k} = [\Psi'^{h\gamma}_{\beta k}, \Psi'^{i\beta}_{\alpha k}]. \tag{20}$$

Дифференцируя уравнения (18), в силу (17), мы получим

$$dE^i_\alpha = -\mathfrak{d}^{i\beta}_{\alpha k} E^k_\beta + (\nabla \mathcal{N}^i_{\alpha k} - \mathfrak{d}^i_{\alpha k}) e^k + (\nabla \mathcal{M}^i_{\alpha\beta} + \mathfrak{d}^i_{\alpha\beta}) e^\beta.$$

Отсюда следует, что пространство H^*_{nm} является инвариантным тогда и только тогда, когда

$$\Psi'^{i\beta}_{\alpha k} = -\mathfrak{d}^{i\beta}_{\alpha k} \tag{21}$$

и

$$\nabla \mathcal{N}^i_{\alpha k} - \mathfrak{d}^i_{\alpha k} = 0, \quad \nabla \mathcal{M}^i_{\alpha\beta} - \mathfrak{d}^i_{\alpha\beta} = 0. \tag{22}$$

Таким образом, если на $K^{(1)}_{n,m}$ заданы поля дифференциально-геометрических объектов (14) и (15), то (в силу того, что левые части уравнений (14), и (15) и (22) одинаковые, можно положить $\mathcal{N}^i_{\alpha k} = N^i_{\alpha k}$ и $\mathcal{M}^i_{\alpha\beta} = M^i_{\alpha\beta}$) на $K^{(1)}_{n,m}$ задано поле инвариантных подпространств H^*_{nm} пространства T^*_{n+m+nm}. Пространству H^*_{nm} соответствуют инвариантные подпространства H_n и H_m, определенные векторами

$$E_i = e_i - N^k_{\alpha i} e^\alpha_k, \tag{23}$$
$$E_\alpha = e_\alpha - M^k_{\alpha\beta} e^\beta_k. \tag{24}$$

* Формы $\mathfrak{d}^i_{\alpha k}$ и $\mathfrak{d}^k_{\alpha\beta}$ определены равенствами

$$\mathfrak{d}^i_{\alpha k} \equiv \Theta^i_{\alpha k}, \quad \mathfrak{d}^i_{\alpha\beta} \equiv \Theta^i_{\alpha\beta} \quad (\mathrm{mod}\ \omega^k, \Theta^\gamma, \Theta^k_\gamma).$$

3. *Усеченные аффинные связности.* Усеченную аффинную связность пространства $K^{(1)}_{n,m}$ можно определить при помощи форм

$$\overset{*}{\omega}{}^i_j=\omega^i_j+\Gamma^i_{jk}\omega^k,$$
$$\overset{*}{\Theta}{}^\alpha_\beta=\Theta^\alpha_\beta+\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\Theta^\gamma, \tag{25}$$

где Γ^i_{jk} и $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ — объекты аффинных связностей, т. е.

$$\nabla\Gamma^i_{jk}-\omega^i_{jk}=\Gamma^i_{ljk}\omega^l+\Gamma^i_{\beta jk}\Theta^\beta+\Gamma^{i\gamma}_{jkh}\Theta^h_\gamma,$$
$$\nabla\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}-\Theta^\alpha_{\beta\gamma}=\Gamma^\alpha_{k\beta\gamma}\omega^k+\Gamma^\alpha_{\sigma\beta\gamma}\Theta^\sigma+\Gamma^{\alpha\sigma}_{\beta\gamma h}\Theta^h_\sigma. \tag{26}$$

Частичное продолжение уравнений (14) и (15) дает

$$\left.\begin{aligned}&\nabla N^{i\cdot\sigma}_{\alpha kh}-\delta^\sigma_\alpha\omega^i_{kh}\equiv 0,\\&\nabla M^{i\cdot\sigma}_{\alpha\beta k}+\delta^i_k\Theta^\sigma_{\alpha\beta}\equiv 0.\end{aligned}\right.\quad(\operatorname{mod}\omega^i,\ \Theta^\alpha,\ \Theta^i_\alpha) \tag{27}$$

Из структуры этих дифференциальных уравнений следует, что из компонент дифференциально-геометрических объектов $N^{i\cdot\sigma}_{\alpha kh}$ и $M^{i\cdot\sigma}_{\alpha\beta k}$ можно построить объекты аффинных связностей Γ^i_{kh} и $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$, т. е.

$$\Gamma^i_{kh}=\frac{1}{m}N^{i\cdot\sigma}_{\sigma kh}, \tag{28}$$

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}=-\frac{1}{n}M^{k\cdot\alpha}_{\beta\gamma k}. \tag{29}$$

Таким образом, дифференциально-геометрическая связность всегда индуцирует усеченную аффинную связность.

4. *Усеченные тензорные связности.* Усеченную линейную тензорную связность в пространстве $K^{(1)}_{n,m}$ можно определить при помощи форм

$$\overset{\circ}{\Theta}{}^{i\beta}_{\alpha k}=\Theta^{i\beta}_{\alpha k}+\Gamma^{i\beta}_{\alpha kh}\omega^h+\Gamma^{i\beta}_{\alpha k\gamma}\Theta^\gamma, \tag{30}$$

где величины $\Gamma^{i\beta}_{\alpha kh}$ и $\Gamma^{i\beta}_{\alpha k\gamma}$ образуют дифференциально-геометрический объект следующей структуры:

$$\left.\begin{aligned}&\nabla\Gamma^{i\beta}_{\alpha kh}-\delta^\beta_\alpha\omega^i_{kh}\equiv 0,\\&\nabla\Gamma^{i\beta}_{\alpha k\gamma}+\delta^i_k\Theta^\beta_{\alpha\gamma}\equiv 0.\end{aligned}\right.\quad(\operatorname{mod}\omega^i,\ \Theta^\alpha,\ \Theta^i_\alpha) \tag{31}$$

Сравнивая уравнения (27) и (31) получаем, что дифференциально-геометрическая связность индуцирует усеченную тензорную связность пространства $K^{(1)}_{n,m}$.

5. *Общие связности.* Если рассмотрим аффинную связность пространства $K^{(1)}_{n,m}$, определенную формами

$$\tilde{\omega}^i_j=\omega^i_j+\Gamma^i_{jk}\omega^k+C^i_{j\alpha}\Theta^\alpha, \tag{32}$$

$$\tilde{\Theta}^\alpha_\beta=\Theta^\alpha_\beta+\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\Theta^\gamma+C^\alpha_{\beta k}\omega^k, \tag{33}$$

то она будет определена тогда и только тогда, когда на $K^{(1)}_{n,m}$ заданы объекты аффинных связностей (26) и тензоры $C^i_{j\alpha}$ и $C^\alpha_{\beta k}$, т. е.

$$\nabla C^i_{j\alpha}\equiv 0,\ \nabla C^\alpha_{\beta k}\equiv 0\ (\operatorname{mod}\omega^i,\ \Theta^\alpha\ \Theta^i_\alpha). \tag{34}$$

Аффинная связность вида

$$\bar{\omega}_j^i = \omega_j^i + G_{jk}^i \omega^k + L_{j\alpha}^i \Theta^\alpha + \mathfrak{N}_{jk}^{i\gamma} \Theta_\gamma^k, \qquad (35)$$

$$\bar{\Theta}_\beta^\alpha = \Theta_\beta^\alpha + G_{\beta\gamma}^\alpha \Theta^\gamma + L_{\beta k}^\alpha \omega^k + \mathfrak{N}_{\beta k}^{\alpha\gamma} \Theta_\gamma^k \qquad (36)$$

определяется при помощи дифференциально-геометрических объектов следующей структуры:

$$\begin{aligned} &\nabla G_{jk}^i - \mathfrak{N}_{jh}^{i\gamma} \Theta_{\gamma k}^h - \omega_{jk}^i \equiv 0, \\ &\nabla G_{\beta\gamma}^\alpha - \mathfrak{N}_{\beta h}^{\alpha\sigma} \Theta_{\sigma\gamma}^h - \Theta_{\beta\gamma}^\alpha \equiv 0, \\ &\nabla L_{j\alpha}^i - \mathfrak{N}_{jh}^{i\gamma} \Theta_{\gamma\alpha}^h \equiv 0, \qquad (\mathrm{mod}\, \omega^i,\ \Theta^\alpha,\ \Theta_\alpha^i) \\ &\nabla L_{\beta k}^\alpha - \mathfrak{N}_{\beta h}^{\alpha\sigma} \Theta_{\sigma k}^h \equiv 0, \\ &\nabla \mathfrak{N}_{jk}^{i\gamma} \equiv 0, \ \nabla \mathfrak{N}_{\beta k}^{\alpha\gamma} \equiv 0. \end{aligned} \qquad (37)$$

Объекты кривизны всех упомянутых связностей можно найти таким же образом как и для соответствующих связностей пространства опорных элементов [1].

§ 2. Геометрия системы дифференциальных уравнений второго порядка с частными производными

1. *Фундаментальный объект.* Систему дифференциальных уравнений (1) можно рассматривать как конечные уравнения поверхности пространства $K_{n,m}^{(2)}$, локальные координаты $(x^i,\ u^\alpha,\ p_\alpha^i,\ p_{\alpha\beta}^i)$ которого преобразуются следующим образом:

$$x^{i'} = x^{i'}(x^i), \quad u^{\alpha'} = u^{\alpha'}(u^\alpha),$$

$$p_{\alpha'}^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial u^\alpha}{\partial u^{\alpha'}} p_\alpha^i,$$

$$p_{\alpha'\beta'}^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial u^\alpha}{\partial u^{\alpha'}} \frac{\partial u^\beta}{u^{\beta'}} p_{\alpha\beta}^i + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial u^{\alpha'} \partial u^{\beta'}} p_\alpha^i +$$

$$+ \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial u^\alpha}{\partial u^{\alpha'}} \frac{\partial u^\beta}{\partial u^{\beta'}} p_\alpha^i p_\beta^j.$$

Система функций $H_{\alpha\beta}^i$ определена на пространстве $K_{n,m}^{(1)}$. Таким образом, если в пространстве $K_{n,m}^{(2)}$ задана поверхность (1), то она индуцирует в пространстве $K_{n,m}^{(1)}$ дифференциально-геометрический объект следующей структуры (и на оборот):

$$H_{\alpha'\beta'}^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial u^\alpha}{\partial u^{\alpha'}} \frac{\partial u^\beta}{\partial u^{\beta'}} H_{\alpha\beta}^i - \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial u^{\alpha'} \partial u^{\beta'}} p_\alpha^i -$$

$$- \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial u^\alpha}{\partial u^{\alpha'}} \frac{\partial u^\beta}{\partial u^{\beta'}} p_\alpha^i p_\beta^j. \qquad (39)$$

Закон преобразования компонент этого объекта обратим и обладает свойством транзитивности.

Геометрия системы дифференциальных уравнений (1) (имеется в виду геометрия поверхности $n+m+nm$ — измерений $n+m+nm+n\frac{m(m+1)}{2}$ — мерного пространства $K^{(2)}_{n,m}$) эквивалентна геометрии пространства $K^{(1)}_{n,m}$ с заданным дифференциально-геометрическим объектом $H^i_{\alpha\beta}$, который будет играть роль фундаментального объекта этого пространства. Геометрией пространства $K^{(1)}_{n,m}$ с фундаментальным объектом $H^i_{\alpha\beta}$ называется совокупность инвариантов и инвариантных операций, построенных при помощи объекта $H^i_{\alpha\beta}$ и инвариантных относительно нормальных расслоенных псевдогрупп $G^{(p)}_n$ и $G^{(p)}_m$ (они определяются инвариантными формами ω^i, Θ^α, $\omega^i_{j_1\ldots j_a}$, $\Theta^\alpha_{\beta_1\ldots\beta_a}$; $a = 1, 2, \ldots, p$).

Для того, чтобы применить метод Г. Ф. Лаптева к исследованию пространства $K^{(1)}_{n,m}$ с фундаментальным объектом $H^i_{\alpha\beta}$ нужно заменить конечные законы преобразования компонент фундаментального объекта $H^i_{\alpha\beta}$ дифференциальными уравнениями. Оказывается, что система дифференциальных уравнений объекта $H^i_{\alpha\beta}$, определенного на $K^{(1)}_{n,m}$, имеет вид

$$\nabla H^i_{\alpha\beta} - \Psi^i_{\alpha\beta} = H^i_{\alpha\beta\gamma}\Theta^\gamma + H^i_{\alpha\beta k}\omega^k + H^{i\cdot\gamma}_{\alpha\beta k}\Theta^k_\gamma, \tag{39}$$

где

$$\Psi^i_{\alpha\beta} = \omega^i_{kh}p^k_\alpha p^h_\beta - p^i_\gamma\Theta^\gamma_{\alpha\beta}. \tag{40}$$

2. *Внутренние связности.* Частичное продолжение системы (39) дает

$$\nabla H^{i\cdot\gamma}_{\alpha\beta k} - \omega^i_{kh}(p^h_\beta\delta^\gamma_\alpha + p^h_\alpha\delta^\gamma_\beta) + \delta^i_k\Theta^\gamma_{\alpha\beta} =$$
$$= H^{i\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\beta\sigma k}\Theta^\sigma + H^{i\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\beta hk}\omega^h + H^{i\cdot\gamma\sigma}_{\alpha\beta kh}\Theta^h_\sigma, \tag{41}$$

$$\nabla H^{i\cdot\gamma\sigma}_{\alpha\beta kh} - \omega^i_{kh}(\delta^\gamma_\alpha\delta^\sigma_\beta + \delta^\sigma_\alpha\delta^\gamma_\beta) = H^{i\cdot\gamma\varepsilon\cdot}_{\alpha\beta kh\sigma}\Theta^\sigma +$$
$$+ H^{i\cdot\gamma\sigma\cdot}_{\alpha\beta klh}\omega^l + H^{i\cdot\gamma\sigma\tau}_{\alpha\beta khl}\Theta^l_\tau, \tag{42}$$

$$\nabla H^{i\cdot\gamma\sigma\tau}_{\alpha\beta khl} = H^{i\cdot\gamma\sigma\tau\cdot}_{\alpha\beta khl\rho}\Theta^\rho + H^{i\cdot\gamma\sigma\tau\cdot}_{\alpha\beta khtl}\omega^t + H^{i\cdot\gamma\sigma\tau\rho}_{\alpha\beta khlt}\Theta^t_\rho, \tag{43}$$

где

$$H^{i\cdot\gamma\sigma}_{\alpha\beta kh} = H^{i\cdot\sigma\gamma}_{\alpha\beta hk}, \quad H^{i\cdot\gamma\sigma\tau}_{\alpha\beta khl} = H^{i\cdot\gamma\tau\sigma}_{\alpha\beta klh} \tag{44}$$

и т. д. Объекты связностей пространства $K^{(1)}_{n,m}$ с фундаментальным объектом $H^i_{\alpha\beta}$ будем называть внутренними объектами связностей, если их компоненты являются функциями компонент продолженного фундаментального объекта $H^i_{\alpha\beta}$.

Так как в систему дифференциальных уравнений поля объекта аффинной связности Γ^i_{jk} входят формы ω^i_{jk}, то из структуры уравнений (42) следует, что внутренний объект аффинной связности Γ^i_{jk} можно определить следующей формулой:

$$\Gamma^i_{kh} = \frac{1}{m(m+1)} H^{i\cdot\alpha\beta}_{\alpha\beta kh}. \tag{45}$$

Из соотношений (44) следует, что эта связность является связностью без кручения. Заметим, что ($\Gamma_i = \Gamma^k_{ik}$)

$$\nabla\Gamma_i - \omega^k_{ik} \equiv 0 \pmod{\omega^i, \Theta^\alpha, \Theta^i_\alpha}. \tag{46}$$

Так как в систему дифференциальных уравнений (41) входят формы ω^i_{jk} и $\Theta^\alpha_{\beta\gamma}$, то для построения внутреннего объекта аффинной связности $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ необходимо исключить формы ω^i_{jk}. Свертывая по индексам i и k уравнения

(41), мы получим

$$\nabla H^{k\cdot\gamma}_{\alpha\beta k} - 2\omega^{k}_{hk} p^{h}_{(\alpha}\delta^{\gamma}_{\beta)} + n\Theta^{\gamma}_{\alpha\beta} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \omega^{i},\ \Theta^{\alpha},\ \Theta^{i}_{\alpha}). \tag{47}$$

Величины $2\Gamma_k p^{k}_{(\alpha}\delta^{\gamma}_{\beta)}$ являются решениями системы

$$\nabla (2\Gamma_k p^{k}_{(\alpha}\delta^{\gamma}_{\beta)}) - 2\omega^{k}_{kh} p^{h}_{(\alpha}\delta^{\gamma}_{\beta)} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \omega^{i},\ \Theta^{\alpha},\ \Theta^{i}_{\alpha}). \tag{48}$$

Составляя разность уравнений (48) и (47), мы получим

$$\nabla (2\Gamma_k p^{k}_{(\alpha}\delta^{\gamma}_{\beta)} - H^{k\cdot\gamma}_{\alpha\beta k}) - n\Theta^{\gamma}_{\alpha\beta} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \omega^{i},\ \Theta^{\alpha},\ \Theta^{i}_{\alpha}).$$

Отсюда и следует, что величины

$$\frac{1}{n}(2\Gamma_k p^{k}_{(\alpha}\delta^{\gamma}_{\beta)} - H^{k\cdot\gamma}_{\alpha\beta k})$$

образуют внутренний объект аффинной связности, т. е. можно положить

$$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{1}{n}(2\Gamma_k p^{k}_{(\alpha}\delta^{\gamma}_{\beta)} - H^{k\cdot\gamma}_{\alpha\beta k}). \tag{49}$$

Таким образом, мы построили внутренние усеченные аффинные связности пространства $K^{(1)}_{n,m}$ с фундаментальным объектом $H^{i}_{\alpha\beta}$. Так как величины $H^{i\cdot\gamma\sigma\tau}_{\alpha\beta khl}$ образуют тензор, то из его компонент можно образовать тензоры типа (32), т. е. можно положить

$$C^{i}_{j\alpha} = H^{i\cdot\sigma\rho\tau}_{\alpha\tau khj} p^{k}_{\rho} p^{h}_{\sigma}, \quad C^{\alpha}_{\beta k} = H^{k\cdot\sigma\rho\alpha}_{\sigma\rho hkl}\, p^{l}_{\beta}. \tag{49'}$$

Следовательно, внутреннюю аффинную связность вида (30) и (31) можно построить при помощи формул (45), (49) и (49′).

Из уравнений (22_1) и (41) следует что объект $N^{i}_{\alpha k}$ можно построить из компонент объекта $H^{i\cdot\gamma}_{\alpha\beta k}$ (исключая из уравнений (39) формы $\Theta^{\gamma}_{\alpha\beta}$). Суммируя уравнения (41) по индексам γ и β, мы получим

$$\nabla H^{i\cdot\beta}_{\alpha\beta k} - (m+1)\,\omega^{i}_{kh} p^{h}_{\alpha} + \delta^{i}_{k}\Theta^{\beta}_{\alpha\beta} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \omega^{i},\ \Theta^{\alpha},\ \Theta^{i}_{\alpha}).$$

Так как ($\Gamma_\alpha = \Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}$)

$$\nabla (\delta^{i}_{k}\Gamma_\alpha) - \delta^{i}_{k}\Theta^{\beta}_{\alpha\beta} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \omega^{i},\ \Theta^{\alpha},\ \Theta^{i}_{\alpha}),$$

то, в силу последних двух систем уравнений, мы можем положить, что

$$N^{i}_{\alpha k} = \frac{1}{m+1}(H^{i\cdot\beta}_{\alpha\beta k} + \delta^{i}_{k}\Gamma_\alpha). \tag{50}$$

Сравнивая системы дифференциальных уравнений (37) и (22), мы видим, что эти системы отличаются друг от друга слагаемым вида $\omega^{i}_{kh} p^{k}_{\alpha} p^{h}_{\beta}$.
Очевидно, что

$$\nabla (\Gamma^{i}_{kh} p^{k}_{\alpha} p^{h}_{\beta}) - \omega^{i}_{kh} p^{k}_{\alpha} p^{h}_{\beta} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \omega^{i},\ \Theta^{\alpha},\ \Theta^{i}_{\alpha}), \tag{51}$$

и составляя разность уравнений (51) и (39), мы получим

$$\nabla (\Gamma^{i}_{kh} p^{k}_{\alpha} p^{h}_{\beta} - H^{i}_{\alpha\beta}) - \Theta^{i}_{\alpha\beta} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \omega^{i},\ \Theta^{\alpha},\ \Theta^{i}_{\alpha}),$$

т. е. можно положить

$$M^{i}_{\alpha\beta} = \Gamma^{i}_{kh} p^{k}_{\alpha} p^{h}_{\beta} - H^{i}_{\alpha\beta}. \tag{52}$$

Таким образом, мы построили внутренним образом объекты дифференциально-геометрической связности пространства $K^{(1)}_{n,m}$ с фундаментальным объектом $H^{i}_{\alpha\beta}$.

Заметим, что из объектов (37), определяющих общую аффинную связность (35) и (36), и объектов, определяющих дифференциально-геометрическую связность, можно построить объекты аффинных связностей, которые имеют вид

$$\overset{*}{\Gamma}{}^i_{jk} = G^i_{jk} - N^h_{\gamma k}\mathfrak{N}^{i\gamma}_{jh},$$
$$\overset{*}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta\gamma} = G^\alpha_{\beta\gamma} - M^k_{\sigma\gamma}\mathfrak{N}^{\alpha\sigma}_{\beta k} \tag{53}$$

и тензоры

$$\overset{*}{C}{}^i_{j\alpha} = L^i_{j\alpha} - M^k_{\gamma\alpha}\mathfrak{N}^{i\gamma}_{jk},$$
$$\overset{*}{C}{}^\alpha_{\beta k} = L^\alpha_{\beta k} - N^h_{\gamma k}\mathfrak{N}^{\alpha\gamma}_{\beta h}. \tag{54}$$

Отсюда следует, что имея объекты аффинных связностей Γ^i_{jk} и $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ и тензоры $C^i_{j\alpha}$, $C^\alpha_{\beta k}$, $\mathfrak{N}^{i\alpha}_{jk}$ и $\mathfrak{N}^{\alpha k}_{\beta k}$ всегда можно построить объекты, определяющие общую аффинную связность, заданную формами (35) и (36). Для того, чтобы построить эту связность внутренним образом, нужно иметь тензоры $\mathfrak{N}^{i\alpha}_{jk}$ и $\mathfrak{N}^{\alpha\gamma}_{\beta k}$ (также построенные внутренним образом). Если тензоры

$$c_{ij} = C^\alpha_{\beta i}C^\beta_{\alpha j}$$

и

$$c_{\alpha\beta} = C^i_{j\alpha}C^j_{i\beta}$$

невырожденные, то при помощи тензоров c^{ij} и $c^{\alpha\beta}$, определенных равенствами

$$c^{ik}c_{kj} = \delta^i_j,\quad c^{\alpha\gamma}c_{\gamma\beta} = \delta^\alpha_\beta,$$

и тензора $H^{i\cdot\sigma\epsilon\tau}_{\alpha\beta khl}$ всегда можно построить тензоры $\mathfrak{N}^{i\alpha}_{jk}$ и $\mathfrak{N}^{\alpha\gamma}_{\beta k}$, т. е. можно, например, положить

$$\mathfrak{N}^{\alpha\gamma}_{\beta k} = c^{ij}\Gamma^{\cdot\alpha}_{i;h}\Gamma^{\cdot\gamma}_{j;k}p^h_\beta, \tag{55}$$

где

$$\nabla\Gamma_i - \omega^k_{ik} \equiv \Gamma^{;\sigma}_{ik}\Theta^k_\sigma\ (\mathrm{mod}\,\omega^i,\ \Theta^\beta).$$

Аналогичным образом можно построить и тензор $\mathfrak{N}^{i\gamma}_{jk}$ (пользуясь объектом Γ_α).

Внутреннюю усеченную тензорную связность можно получить или частичным продолжением объектов (51) и (52) (это было доказано в п. 3 §I) или построить из объектов аффинных связностей (45) и (49), т.е. можно положить

$$\Gamma^{i\beta}_{\alpha kh} = \delta^\beta_\alpha\Gamma^i_{kh},\quad \Gamma^{i\beta}_{\alpha k\gamma} = -\delta^i_k\Gamma^\beta_{\alpha\gamma}.$$

Заметим, что при помощи общих аффинных связностей можно построить и общую тензорную связность.

§ 3. Пространство m-протяжений

Если система дифференциальных уравнений (1) не зависит явным образом от u^α и инвариантна относительно невырожденных линейных преобразований

$$\bar{u}^\alpha = a^\alpha_\beta u^\beta + a^\alpha,$$

то (см. [4])

$$H^{i}_{\cdot\alpha\beta}(x,\ \bar{p})=a^{\sigma}_{\alpha}a^{\rho}_{\beta}H^{i}_{\cdot\sigma\rho}(x,\ p), \tag{57}$$

где

$$\bar{p}^{i}_{\alpha}=a^{\beta}_{\alpha}p^{i}_{\beta}. \tag{58}$$

В этом случае дифференцируемое многообразие V_m является аффинным пространством, т. е. структурные уравнения (3) принимают вид (формы $\Theta^{\alpha}_{\beta_1\ldots\beta_a}=0$, при $a>2$):

$$D\Theta^{\alpha}=[\Theta^{\beta},\ \Theta^{\alpha}_{\beta}],\ D\Theta^{\alpha}_{\beta}=[\Theta^{\gamma}_{\beta},\ \Theta^{\alpha}_{\gamma}]. \tag{59}$$

Условия инвариантности системы (39) относительно невырожденных линейных преобразований имеют вид (и соотношение (56) относится к этим условиям)

$$\begin{gathered}H^{i\cdot}_{\cdot\alpha\beta k}(x,\ \bar{p})=a^{\rho}_{\alpha}a^{\tau}_{\beta}H^{i\cdot}_{\cdot\rho\tau k}(x,\ p),\\ H^{i\cdot\gamma}_{\cdot\alpha\beta k}(x,\ \bar{p})=\overset{*}{a}{}^{\gamma}_{\sigma}a^{\rho}_{\alpha}a^{\tau}_{\beta}H^{i\cdot\sigma}_{\cdot\rho\tau k}(x,\ p),\\ H^{i\cdot\gamma}_{\cdot\alpha\beta k}p^{k}_{\sigma}=2H^{i}_{\cdot\sigma\rho}\overset{*}{a}{}^{\sigma}_{(\alpha}\overset{*}{a}{}^{\rho}_{\beta)},\end{gathered} \tag{60}$$

где $\overset{*}{a}{}^{\alpha}_{\beta}$ — параметры обратного преобразования.

Пространство $K^{(1)}_{n,m}$ (V_m — аффинное пространство) с фундаментальным объектом $H^{i}_{\cdot\alpha\beta}$, который удовлетворяет условиям (57) и (60), называется пространством m-протяжений (m-spreads). В этом случае в систему дифференциальных уравнений (39) не входят формы $\Theta^{\alpha}_{\beta\gamma}$, т. е. можно построить объекты Γ^{i}_{jk}, $N^{i}_{j\alpha}$, а объекты $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ и $M^{i}_{\beta\gamma}$ отсутствуют (в силу того, что компоненты фундаментального объекта не зависят от переменных u^{α}). Если $H^{i\cdot}_{\cdot\alpha\beta\gamma}\neq 0$, то соответствующее пространство $K^{(1)}_{n,m}$ с фундаментальным объектом $H^{i}_{\cdot\alpha\beta}$ будем называть обобщенным пространством m-протяжений, если кроме условий (57) и (60) выполняются еще и условия

$$H^{i\cdot}_{\cdot\alpha\beta\gamma}(x,\ \bar{u},\ \bar{p})=a^{\sigma}_{\alpha}a^{\rho}_{\beta}a^{\tau}_{\gamma}H^{i}_{\cdot\sigma\rho\tau}(x,\ u,\ p). \tag{61}$$

В этом случае объекты $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ и $M^{i}_{\beta\gamma}$ являются тензорами.

1. *Параметры Томаса.* Если $T^{\alpha}_{\beta\gamma}$ — тензор, то величины

$$\bar{H}^{i}_{\cdot\alpha\beta}=H^{i}_{\cdot\alpha\beta}+p^{i}_{\sigma}T^{\sigma}_{\alpha\beta} \tag{62}$$

образуют такой же объект, как и $H^{i}_{\cdot\alpha\beta}$. Преобразования (62) называются проективными преобразованиями объекта $H^{i}_{\cdot\alpha\beta}$, если тензор $T^{\sigma}_{\alpha\beta}$ обладает тем свойством, что объект $\bar{H}^{i}_{\cdot\alpha\beta}$ удовлетворяет условиям, аналогичным (57) и (60). Эти условия для тензора $T^{\gamma}_{\alpha\beta}$ имеют вид

$$T^{\gamma}_{\alpha\beta}(x,\ \bar{p})=a^{\sigma}_{\alpha}a^{\rho}_{\beta}\overset{*}{a}{}^{\gamma}_{\tau}T^{\tau}_{\sigma\rho}(x,\ p), \tag{63}$$

которые иногда называются обобщенными условиями однородности в смысле Дугласа [4].

Если

$$\nabla T^{\alpha}_{\beta\gamma}=T^{\alpha\cdot}_{\beta\gamma k}\omega^{k}+T^{\alpha\cdot\sigma}_{\beta\gamma k}\Theta^{k}_{\sigma}, \tag{64}$$

то частичное продолжение этой системы дает

$$\begin{gathered}\nabla T^{\alpha\cdot\sigma}_{\beta\gamma k}=T^{\alpha\cdot\sigma}_{\beta\gamma lk}\omega^{l}+T^{\alpha\cdot\sigma\rho}_{\beta\gamma kh}\Theta^{h}_{\rho},\\ \nabla T^{\alpha\cdot\sigma\rho}_{\beta\gamma kh}=T^{\alpha\cdot\sigma\rho}_{\beta\gamma klh}\omega^{l}+T^{\alpha\cdot\sigma\rho\tau}_{\beta\gamma khl}\Theta^{l}_{\tau}.\end{gathered}$$

Дифференцируя соотношения (58), мы получим

$$\bar{\Theta}^{i}_{\alpha}=a^{\beta}_{\alpha}\Theta^{i}_{\beta}+p^{i}_{\beta}\nabla a^{\beta}_{\alpha}, \tag{65}$$

где формы $\bar{\Theta}^{i}_{\alpha}$ образованы из $\bar{p}^{i}_{\alpha}$ таким же образом, как и формы Θ^{i}_{α} из p^{i}_{α}.

Найдем условия инвариантности системы (64) относительно преобразований (58). Так как

$$\nabla T^{\alpha}_{\beta\gamma}(x,\ \bar{p})=T^{\alpha}_{\beta\gamma k}(x,\ \bar{p})\,\omega^{k}+T^{\alpha\cdot\sigma}_{\beta\gamma k}\bar{\Theta}^{k}_{\sigma},$$

то, в силу соотношений (65) и тождеств

$$\overset{*}{a}{}^{\beta}_{\lambda}(\nabla a^{\sigma}_{\beta})\,\overset{*}{a}{}^{\gamma}_{\sigma}+\nabla\overset{*}{a}{}^{\gamma}_{\lambda}=0,$$

$$\nabla T^{\alpha}_{\beta\gamma}(x,\ \bar{p})=(\nabla a^{\lambda}_{\alpha})\,a^{\rho}_{\beta}\overset{*}{a}{}^{\gamma}_{\tau}T^{\tau}_{\lambda\rho}(x,\ p)+$$

$$+a^{\sigma}_{\alpha}(\nabla a^{\lambda}_{\beta})\overset{*}{a}{}^{\gamma}_{\tau}T^{\tau}_{\sigma\lambda}(x,\ p)+a^{\sigma}_{\alpha}a^{\rho}_{\beta}(\nabla\overset{*}{a}{}^{\gamma}_{\tau})\,T^{\tau}_{\sigma\rho}(x,\ p)+$$

$$+a^{\sigma}_{\alpha}a^{\rho}_{\beta}\overset{*}{a}{}^{\gamma}_{\tau}\nabla T^{\tau}_{\sigma\rho}(x,\ p),$$

мы получим

$$\{T^{\alpha}_{\beta\gamma k}(x,\ \bar{p})-a^{\rho}_{\beta}a^{\sigma}_{\gamma}\overset{*}{a}{}^{\alpha}_{\lambda}T^{\lambda}_{\rho\sigma k}(x,\ p)\}\,\omega^{k}+\{T^{\alpha\cdot\sigma}_{\beta\gamma k}(x,\ \bar{p})\,a^{\tau}_{\sigma}-$$

$$-a^{\rho}_{\beta}a^{\sigma}_{\gamma}\overset{*}{a}{}^{\alpha}_{\lambda}T^{\lambda\cdot\tau}_{\rho\sigma k}(x,\ p)\}\,\Theta^{k}_{\tau}+\{T^{\alpha\cdot\sigma}_{\beta\gamma k}(x,\ \bar{p})\,p^{k}_{\tau}-$$

$$-T^{\lambda}_{\tau\rho}(x,\ p)\,\overset{*}{a}{}^{\alpha}_{\lambda}a^{\rho}_{\gamma}\delta^{\sigma}_{\beta}+T^{\lambda}_{\rho\varepsilon}(x,\ p)\,a^{\rho}_{\beta}a^{\varepsilon}_{\gamma}\overset{*}{a}{}^{\alpha}_{\tau}\overset{*}{a}{}^{\sigma}_{\lambda}-$$

$$-T^{\lambda}_{\rho\tau}(x,\ p)\,a^{\rho}_{\beta}\overset{*}{a}{}^{\alpha}_{\lambda}\delta^{\sigma}_{\gamma}\}\,\nabla a^{\tau}_{\sigma}=0.$$

Отсюда, в силу линейной независимости форм ω^{k}, Θ^{k}_{τ} и ∇a^{τ}_{σ}, получаем условия инвариантности системы (64)

$$T^{\alpha}_{\beta\gamma k}(x,\ \bar{p})=a^{\rho}_{\beta}a^{\sigma}_{\gamma}\overset{*}{a}{}^{\alpha}_{\lambda}T^{\lambda}_{\rho\sigma k}(x,\ p),$$

$$T^{\alpha\cdot\sigma}_{\beta\gamma k}(x,\ \bar{p})=a^{\alpha}_{\tau}\overset{*}{a}{}^{\sigma}_{\lambda}a^{\rho}_{\beta}a^{\nu}_{\gamma}T^{\tau\cdot\lambda}_{\rho\nu k}(x,\ p),$$

$$T^{\alpha\cdot\sigma}_{\beta\gamma k}(x,\ \bar{p})\,p^{k}_{\tau}=T^{\lambda}_{\tau\rho}(x,\ p)\,\overset{*}{a}{}^{\alpha}_{\lambda}a^{\rho}_{\gamma}\delta^{\sigma}_{\beta}+T^{\lambda}_{\rho\tau}(x,\ p)\,a^{\rho}_{\beta}\overset{*}{a}{}^{\alpha}_{\lambda}\delta^{\sigma}_{\gamma}-$$

$$-T^{\lambda}_{\rho\varepsilon}(x,\ p)\,a^{\rho}_{\beta}a^{\varepsilon}_{\gamma}\overset{*}{a}{}^{\alpha}_{\tau}\overset{*}{a}{}^{\sigma}_{\lambda}. \tag{66}$$

Если $a^{\beta}_{\alpha}=\delta^{\beta}_{\alpha}$, то $T^{\alpha\cdot\sigma}_{\beta\gamma k}(x,\ \bar{p})=T^{\alpha\cdot\sigma}_{\beta\gamma k}(x,\ p)$ и последние соотношения принимают вид

$$T^{\alpha\cdot\sigma}_{\beta\gamma k}p^{k}_{\tau}=T^{\alpha}_{\tau\gamma}\delta^{\sigma}_{\beta}+T^{\alpha}_{\beta\tau}\delta^{\sigma}_{\gamma}-T^{\sigma}_{\beta\gamma}\delta^{\alpha}_{\tau}. \tag{67}$$

Отсюда получаем, что

$$T^{\alpha\cdot\rho\sigma}_{\beta\gamma hk}\,p^{k}_{\tau}=T^{\alpha\cdot\rho}_{\tau\gamma h}\delta^{\sigma}_{\beta}+T^{\alpha\cdot\rho}_{\beta\tau h}\delta^{\sigma}_{\gamma}-T^{\sigma\cdot\rho}_{\beta\gamma h}\delta^{\alpha}_{\tau}-T^{\alpha\cdot\sigma}_{\beta\gamma h}\delta^{\rho}_{\tau}. \tag{67'}$$

Частичное продолжение соотношений (62), в силу линейной независимости форм ω^{i} и Θ^{i}_{α}, дает

$$H^{i\cdot\gamma}_{\alpha\beta k}=H^{i\cdot\gamma}_{\alpha\beta k}+\delta^{i}_{k}T^{\gamma}_{\alpha\beta}+p^{i}_{\sigma}T^{\sigma\cdot\gamma}_{\alpha\beta k},$$

$$\bar{H}^{i\cdot\gamma\varepsilon}_{\alpha\beta kh}=H^{i\cdot\gamma\varepsilon}_{\alpha\beta kh}+\delta^{i}_{k}T^{\gamma\cdot\varepsilon}_{\alpha\beta h}+\delta^{i}_{h}T^{\varepsilon\cdot\gamma}_{\alpha\beta k}+p^{i}_{\sigma}T^{\sigma\cdot\gamma\varepsilon}_{\alpha\beta kh}. \tag{68}$$

Из формулы (45) следует, что объекты аффинных связностей $\bar{\Gamma}^i_{jk}$ и Γ_{jk}, присоединенные к объектам $\bar{H}^i_{\alpha\beta}$ и $H^i_{\alpha\beta}$, связаны соотношениями

$$\bar{\Gamma}^i_{kh}=\Gamma^i_{kh}+\frac{1}{m(m+1)}(\delta^i_k T^{\alpha\cdot\beta}_{\alpha\beta h}+\delta^i_h T^{\beta\cdot\alpha}_{\alpha\beta k}+p^i_\sigma T^{\sigma\cdot\alpha\beta}_{\alpha\beta kh}). \tag{69}$$

Найдем объект, построенный из компонент продолженного объекта $H^i_{\alpha\beta}$, но инвариантный относительно преобразований (62). Из (67′) следует, что

$$T^{\alpha\cdot\beta\gamma}_{\beta\gamma kh}p^k_\alpha=0$$

и свертывая равенства (69) по индексам i и h, мы получим

$$\bar{\Gamma}_k=\Gamma_k+\frac{n+1}{m(m+1)}T^{\alpha\cdot\beta}_{\alpha\beta k}. \tag{70}$$

Частичное продолжение соотношений (69) дает

$$\bar{\Gamma}^{i\cdot\gamma}_{khl}=\Gamma^{i\cdot\gamma}_{khl}+\frac{1}{m(m+1)}\{\delta^i_k T^{\alpha\cdot\beta\gamma}_{\alpha\beta hl}+\delta^i_h T^{\alpha\cdot\beta\gamma}_{\alpha\beta kl}+$$

$$+p^i_\sigma T^{\sigma\cdot\alpha\beta\gamma}_{\alpha\beta khl}+\delta^i_l T^{\gamma\cdot\alpha\beta}_{\alpha\beta kh}\}.$$

Свертывая эти равенства по индексам i и l получим

$$\bar{\Gamma}^{l\cdot\gamma}_{khl}=\Gamma^{l\cdot\gamma}_{khl}+\frac{1}{m(m+1)}\{T^{\alpha\cdot\beta\gamma}_{\alpha\beta hk}+T^{\alpha\cdot\beta\gamma}_{\alpha\beta kh}+$$

$$+nT^{\gamma\cdot\alpha\beta}_{\alpha\beta kh}+p^l_\sigma T^{\sigma\cdot\alpha\beta\gamma}_{\alpha\beta khl}\}. \tag{71}$$

Частично продолжая (67) мы заметим, что

$$p^l_\sigma T^{\sigma\cdot\alpha\beta\gamma}_{\alpha\beta khl}=-mT^{\gamma\cdot\alpha\beta}_{\alpha\beta kh}$$

и соотношения (71) принимают вид

$$\bar{\Gamma}^{l\cdot\gamma}_{khl}=\Gamma^{l\cdot\gamma}_{khl}+\frac{1}{m(m+1)}\{T^{\alpha\cdot\beta\gamma}_{\alpha\beta hk}+T^{\alpha\cdot\beta\gamma}_{\alpha\beta kh}+$$

$$+(n-m)T^{\gamma\cdot\alpha\beta}_{\alpha\beta kh}\}. \tag{72}$$

Наконец, частично продолжая соотношения (70), мы будем иметь

$$\bar{\Gamma}^{\cdot\gamma}_{kh}=\Gamma^{\cdot\gamma}_{kh}+\frac{n+1}{m(m+1)}T^{\alpha\cdot\beta\gamma}_{\alpha\beta kh}, \tag{73}$$

где

$$\nabla\Gamma_k-\omega^h_{kh}\equiv\Gamma^{\cdot\gamma}_{kh}\Theta^h_\gamma \pmod{\omega^k}$$

и величины $\bar{\Gamma}^{\cdot\gamma}_{kh}$ определены аналогичным образом, как и $\Gamma^{\cdot\gamma}_{kh}$. Из (70), (72) и (73) следует, что

$$T^{\alpha\cdot\beta}_{\alpha\beta k}=\frac{m(m+1)}{n+1}(\bar{\Gamma}_k-\Gamma_k),$$

$$T^{\gamma\cdot\alpha\beta}_{\alpha\beta kh}=\frac{m(m+1)}{n-m}\{(\bar{\Gamma}^{l\cdot\gamma}_{khl}-\Gamma^{l\cdot\gamma}_{khl})-$$

$$-\frac{1}{n+1}(\bar{\Gamma}^{\cdot\gamma}_{hk}-\Gamma^{\cdot\gamma}_{hk})-\frac{1}{n+1}(\bar{\Gamma}^{\cdot\gamma}_{kh}-\Gamma^{\cdot\gamma}_{kh})\}$$

и подставляя эти выражения в (69), мы получим

$$\bar{\Gamma}^i_{kh} = \Gamma^i_{kh} + \frac{1}{n+1}\{\delta^i_k(\bar{\Gamma}_h - \Gamma_h) + \delta^i_h(\bar{\Gamma}_k - \Gamma_k)\} +$$

$$+ \frac{1}{n-m} p^i_\gamma \{(\bar{\Gamma}^{l\cdot\gamma}_{khl} - \Gamma^{l\cdot\gamma}_{khl}) - \frac{1}{n+1}(\bar{\Gamma}^{\cdot\gamma}_{hk} - \Gamma^{\cdot\gamma}_{hk}) -$$

$$- \frac{1}{n+1}(\bar{\Gamma}^{\cdot\gamma}_{kh} - \Gamma^{\cdot\gamma}_{kh})\}$$

или

$$\bar{\Gamma}^i_{kh} - \frac{1}{n+1}(\delta^i_k\bar{\Gamma}_h + \delta^i_h\bar{\Gamma}_k) - \frac{p^i_\gamma}{n-m}(\bar{\Gamma}^{l\cdot\gamma}_{khl} -$$

$$- \frac{1}{n+1}\bar{\Gamma}^{\cdot\gamma}_{hk} - \frac{1}{n+1}\bar{\Gamma}^{\cdot\gamma}_{kh}) = \Gamma^i_{kh} - \frac{1}{n+1}(\delta^i_k\Gamma_h +$$

$$+ \delta^i_h\Gamma_k - \frac{p^i_\gamma}{n-m}(\Gamma^{l\cdot\gamma}_{khl} - \frac{1}{n+1}\Gamma^{\cdot\gamma}_{hk} - \frac{1}{n+1}\Gamma^{\cdot\gamma}_{kh}). \tag{74}$$

Отсюда следует, что величины

$$\Pi^i_{kh} = \Gamma^i_{kh} - \frac{2}{n+1}\delta^i_{(k}\Gamma_{h)} - \frac{p^i_\gamma}{n-m}(\Gamma^{l\cdot\gamma}_{khl} - \frac{2}{n+1}\Gamma^{\cdot\gamma}_{(kh)}) \tag{75}$$

инвариантны относительно проектных преобразований объекта $H^i_{\alpha\beta}$. Дифференцируя (75), мы получим ($\omega_i = \omega^k_{ik}$):

$$\nabla \Pi^i_{kh} - \omega^i_{kh} + \frac{1}{n+1}(\delta^i_k\omega_h + \delta^i_h\omega_k) \equiv 0 \, (\mathrm{mod}\, \omega^k, \ \Theta^k_\alpha), \tag{76}$$

т. е. величины Π^i_{kh} образуют параметры Томаса (объект проективной связности).

2. *Ассоциированные пространства проективной связности.* Структурные уравнения главного расслоенного пространства, фундаментальная группа которого совпадает с проективной группой преобразований, имеют вид [3]:

$$D\Theta^i_0 = [\Theta^0_0, \ \Theta^i_0] + [\Theta^k_0, \ \Theta^i_k],$$

$$D\Theta^i_j = [\Theta^0_j, \ \Theta^i_0] + [\Theta^k_j, \ \Theta^i_k] + [\Theta^k_0, \ \Theta^i_{jk}],$$

$$D\Theta^0_j = [\Theta^0_j, \ \Theta^0_0] + [\Theta^k_j, \ \Theta^0_k] + [\Theta^k_0, \ \Theta^0_{jk}],$$

$$D\Theta^0_0 = [\Theta^k_0, \ \Theta^0_k], \tag{77}$$

где

$$\Theta^i_0 = \omega^i, \ \ \Theta^i_j = \omega^i_j - \frac{1}{n+1}\delta^i_j\omega,$$

$$\Theta^0_0 = -\frac{1}{n+1}\omega, \ \ \Theta^0_i = -\frac{1}{n+1}\omega_i,$$

$$\Theta^i_{jk} = \omega^i_{jk} - \frac{1}{n+1}\delta^i_j\omega_k - \frac{1}{n+1}\delta^i_k\omega_j,$$

$$\Theta^0_{jk} = -\frac{1}{n+1}\omega_{jk}, \ \ \omega = \omega^k_k, \ \ \omega_i = \omega^k_{ik}, \ \ \omega^k_{ijk}. \tag{78}$$

Объект проективной связности Картана ($\mathring{\gamma}^i_{jk}$, $\mathring{\gamma}_{ij}$, $\mathring{\gamma}_i$) имеет следующую структуру [3]:

$$d\mathring{\gamma}^k_{ij}-\mathring{\gamma}^k_{sj}\Theta^s_i-\mathring{\gamma}^k_{is}\Theta^s_j+\mathring{\gamma}^s_{ij}\Theta^k_s+\mathring{\gamma}^k_{ij}\Theta^0_0-\Theta^k_{ij}=\mathring{\gamma}^k_{ij,s}\Theta^s_0, \tag{79}$$

$$d\mathring{\gamma}_{ij}-\mathring{\gamma}_{sj}\Theta^s_i-\mathring{\gamma}_{is}\Theta^s_j+2\mathring{\gamma}_{ij}\Theta^0_0-2\mathring{\gamma}_{(i}\Theta^0_{j)}+\mathring{\gamma}^k_{ij}\Theta^0_k-\Theta^0_{ij}=\mathring{\gamma}_{ij,k}\Theta^k_0, \tag{80}$$

$$d\mathring{\gamma}_i-\mathring{\gamma}_s\Theta^s_i+\mathring{\gamma}_i\Theta^0_0=\mathring{\gamma}_{i,k}\Theta^k_0. \tag{81}$$

Если $\mathring{\gamma}_i=0$, то объект проективной связности Картана называется объектом центропроективной связности. Мы найдем объекты этих связностей, инвариантным образом присоединенные к фундаментальному объекту геометрии m-протяжений. В этом случае в правых частях уравнений (79) – (81) будут и коэффициенты с формами Θ^k_α. Заметим, что в силу соотношений (77), левая часть системы дифференциальных уравнений (76) совпадает с левой частяю уравнений (79), т. е. можно положить

$$\gamma^i_{kh}=\Pi^i_{kh}. \tag{82}$$

Если $\mathring{\nabla}_k$ – символ неголономной базисной производной относительно объекта $N^i_{\alpha k}$, то величины

$$\mathring{\Pi}_{ij}=\frac{1}{n+1}(\mathring{\nabla}_k\Pi^k_{ij}-\Pi^k_{ih}\Pi^h_{jk}) \tag{83}$$

удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\nabla\mathring{\Pi}_{ij}-\frac{1}{n+1}\Pi^k_{ij}\omega_k+\frac{1}{n+1}\omega_{ij}\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\omega^i,\ \Theta^i_\alpha), \tag{84}$$

или

$$d\mathring{\Pi}_{ij}-\mathring{\Pi}_{sj}\Theta^s_i-\mathring{\Pi}_{is}\Theta^s_j+2\mathring{\Pi}_{ij}\Theta^0_0+\Pi^k_{ij}\Theta^0_k-\Theta^0_{ij}\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\Theta^i_0,\ \Theta^i_\alpha). \tag{84'}$$

Отсюда следует, что величины (Π^i_{jk}, $\mathring{\Pi}_{ij}$), построенные из компонент продолженного объекта $H^i_{\alpha\beta}$, образуют объект центропроективной связности. Таким образом, к пространству m-протяжений всегда можно инвариантным образом присоединить пространство центропроективной связности.

Для того, чтобы построить объект (γ^i_{jk}, γ_{ij}, γ_i), образованный из компонент продолженного объекта $H^i_{\alpha\beta}$ и имеющий структуру объекта ($\mathring{\gamma}^i_{jk}$, $\mathring{\gamma}_{ij}$, $\mathring{\gamma}_i$), то сначала нужно построить ковектор γ_i. Например, величины

$$H_i=H^{k\cdot\alpha\beta\gamma}_{\alpha\beta k\cdot hi}p^h_\gamma \tag{85}$$

образуют ковектор. Величины

$$H_{ij}=H^{k\cdot\alpha\beta\gamma}_{\alpha\beta ihj}p^h_\gamma H_k \tag{86}$$

образуют тензор. Если этот тензор невырожденный, то величины

$$c_i=\mathring{\nabla}_i(\ln\sqrt{|H|}), \tag{87}$$

где

$$H=\det\|H_{ij}\|,$$

образуют дифференциально-геометрический объект следующей структуры:

$$\nabla c_i-\omega_i\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\omega^k,\ \Theta^k_\alpha). \tag{88}$$

Очевидно, что величины

$$a_{ij} = \frac{2}{n+1} c_{(i} H_{j)} \tag{89}$$

являются решениями системы

$$\nabla a_{ij} - \frac{2}{n+1} H_{(i} \omega_{j)} \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \omega^k,\ \Theta^k_\alpha).$$

Отсюда, в силу (84), следует, что величины

$$\Pi_{ij} = \overset{\circ}{\Pi}_{ij} + a_{ij} \tag{90}$$

являются решениями системы

$$\nabla \Pi_{ij} - \frac{1}{n+1} \Pi^k_{ij} \omega_k - \frac{2}{n+1} H_{(i} \omega_{j)} + \frac{1}{n+1} \omega_{ij} \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \omega^k,\ \Theta^k_\alpha),$$

структура которой такая же как и (80). Таким образом, величины Π^k_{ij}, Π_{ij} и H_i образуют объект проективной связности Картана. Этот объект существенным образом зависит от выбора объектов H_i и c_i.

Вильнюсский Государственный педагогический институт

Поступило в редакцию 28.IX.1966

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Близникас, Неголономное дифференцирование Ли и линейные связности в пространстве опорных элементов, Лит. мат. сб., 1966, т. VI, № 2, 141—209.
2. Г. Ф. Лаптев, Дифференциальная геометрия погруженных многообразий, Тр. Московского мат. об-ва, 1953, т. 2, 275—382.
3. Г. Ф. Лаптев, Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии, Труды геометрического семинара, 1966, т. 1, 139—189.
4. J. Douglas, Systems of K-dimensional manifolds in a N-dimensional space, Math. Ann., 1931, Bd. **105**, 707—733.

ANTROS EILĖS DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ SISTEMŲ SU DALINĖMIS IŠVESTINĖMIS GEOMETRIJOS KLAUSIMU

V. BLIZNIKAS

(Reziumė)

Specialaus tipo diferencialinių lygčių sistemų

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} + H^i_{\alpha\beta}\left(x^k, \frac{\partial x^k}{\partial u^\gamma}\right) = 0$$

geometrijos pagrindiniai klausimai tenzorinio skaičiavimo metodu yra išnagrinėti J. Duglaso [4] darbe. Straipsnyje G. Laptevo metodu nagrinėjami bendresnio pavidalo diferencialinių lygčių (1) sistemų geometrijos klausimai. Pasirodo, kad diferencialinių lygčių (1) sistemos geometrija yra ekvivalenti m-mačių paviršinių elementų daugdaros $K^{(1)}_{n,m}$, kurioje yra duotas geometrinis objektas $H^i_{\alpha\beta}$, geometrijai. Surasti sąryšio objektai (45), (49), (50) ir (52). Specialių diferencialinių lygčių sistemų atveju yra surastos asocijuotosios centroprojektyvinio ir projektyvinio sąryšio erdvės.

ÜBER GEOMETRIE DES SYSTEMS DER PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ZWEITER ORDNUNG

V. BLIZNIKAS

(Zusammenfassung)

Die Geometrie der Bahnen ist zuerst von J. Douglas in Falle des verallgemeinerten Systems der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung (k-spreads)

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} + H^i_{\alpha\beta}\left(x^k, \frac{\partial x^k}{\partial u^\gamma}\right) = 0$$

erweitert worden [4]. In dem vorliegenden Artikel wird mit Hilfe der Methode von G. Laptew die Geometrie des Systems der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung (1), die unter der Pseudogruppe aller Koordinate- und Parametertransformationen invariant untersucht ist. Dies ist nicht anderes als die Geometrie der Manningfaltigkeit vom m-dimensionalen Flächenelementen erster Ordnung, in welcher ein Objekt $H^i_{\alpha\beta}$ dessen Komponenten das Sysstem von Differentialgleichungen (9) befriedigen, gegeben ist.

Es wird gezeigt, dass die Zusammenhangsobjekte, d.h. Linear-, Affin-, und Tensorzusammenhangsobjekte, durch das Grundobjekt $H^i_{\alpha\beta}$ ausgedrücht werden können. Wenn das Objekt (87) nicht gleich Null ist, dann existieren assozierte Räume von Projektiven- und Zentroprojektiven Zusammenhängen.