

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

ЗАМЕЧАНИЕ К СТАТЬЕ „О ВЕРХНИХ И НИЖНИХ ФУНКЦИЯХ
ДЛЯ УСТОЙЧИВЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ“, Часть 1

В моей работе „О верхних и нижних функциях для устойчивых случайных процессов“ I. (Лит. мат. сб. т. V, 4 (1965), 541–553) третий абзац снизу на стр. 542 следует читать так:

Следствием теоремы 1 являются следующие утверждения:

$$P \left\{ \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\xi(t)}{\varphi(t)} = 1 \right\} = 1 \quad \text{при } 1 < \alpha < 2$$

и

$$P \left\{ \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\xi(t)}{\varphi(t)} = 1 \right\} = 1 \quad \text{при } 0 < \alpha < 1,$$

где

$$\varphi(t) = (-1)^{\times} t^{\frac{1}{\alpha}} (B^{-1}(\alpha) \ln \ln t)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}.$$

Аналогичные изменения необходимы и в локальном аналоге закона повторного логарифма (стр. 546).

На стр. 541 в формуле (3) вместо x нужно читать $[x]$.

При проверке условия 3 леммы 5 использована нерерная оценка (20) (стр. 550). Можно обойтись и без нее, если для рассмотрения случая Б привлечь не лемму 5, а просто – закон нуля или единицы. План нового доказательства приводим ниже.

Б. Пусть $I_{\alpha}(g) = \infty$. Достаточно рассматривать последовательность $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющую условию (7). Обозначим $F_k = \{ \xi(t_k) > g(t_k) \}$. Так как $\limsup_{k \rightarrow \infty} F_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} F_k$, то в силу закона нуля или единицы достаточно показать, что для любого n можно найти номер $\psi(n) > n$ такой, что

$$P \left\{ \bigcup_{k=n}^{\psi(n)} F_k \right\} > c > 0. \quad (15)$$

Пусть $\delta_1 > 0$. Так как $P(F_k) \downarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, и в силу леммы 3, $\sum_{k=1}^{\infty} P(F_k) = \infty$, то для любого натурального $n > n_0(\delta_1)$ найдется номер $\psi(n) > n$, такой, что

$$\delta_1 \leq \sum_{n \leq k \leq \psi(n)} P(F_k) \leq 2\delta_1. \quad (16)$$

Обозначим

$$D(m) = F_m \cap \bigcap_{r=1}^{\psi(n)-m} \bar{F}_{m+r} = \\ = \{ \xi(t_m) > g(t_m), \xi(t_{m+1}) \leq g(t_{m+1}), \dots, \xi(t_{\psi(n)}) \leq g(t_{\psi(n)}) \},$$

$$D_1(m) = \left\{ g(t_m) \leq \xi(t_m) \leq g(t_m) + \frac{a}{4\alpha} \left(\frac{t_m}{q(t_m)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right\}.$$

Из (9) следует, что

$$P(D_1(m)) > C_1 \cdot P(F_m), \quad 0 < C_1 < 1. \quad (17)$$

Для случая $1 < \alpha < 2$ введем событие

$$D_2(m) = D_1(m) \cup \bigcap_{k=0}^{h-1} \{ \xi(t_{m+k+1}) - \xi(t_{m+k}) \leq 0 \}.$$

При условии, что имеет место событие $D_2(m)$, в силу (7) и равенства (18):

$$q^{-\frac{1}{\alpha}}(t) = \varphi(t) q^{-1}(t)$$

получаем, что тогда имеют место события:

$$\xi(t_{m+r}) \leq \xi(t_m) \leq t_m^{\frac{1}{\alpha}} \varphi(t_m) + \frac{a}{4\alpha} \left(\frac{t_m}{q(t_m)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq t_{m+1}^{\frac{1}{\alpha}} \varphi(t_{m+1}) \leq t_{m+2}^{\frac{1}{\alpha}} \varphi(t_{m+2})$$

для всех $r=1, 2, \dots, h$. Следовательно, мы доказали, что

$$D_2(m) \subset D_1(m) \cup \bigcap_{r=1}^h \bar{F}_{m+r}.$$

Введем события

$$D_3(m) = D_2(m) \cap \bigcap_{r=h+1}^{\Psi(n)-m} \bar{F}_{m+r},$$

$$D_{3,r}(m) = D_2(m) \cap F_{m+r}, \quad h+1 \leq r.$$

Очевидно, что

$$D_2(m) \subset D_3(m) \cup \bigcup_{r=h+1}^{\Psi(n)-m} D_{3,r}(m) \quad (19)$$

и

$$D_{3,r}(m) \subset D_2(m) \cap E_r(m), \quad (20)$$

где

$$E_r(m) = \left\{ \xi(t_{m+r}) - \xi(t_{m+h}) \geq t_{m+r}^{\frac{1}{\alpha}} \varphi(t_{m+r}) - t_m^{\frac{1}{\alpha}} \varphi(t_m) - \frac{a}{4\alpha} \left(\frac{t_m}{q(t_m)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right\}.$$

В силу (7) и (18) имеем

$$\Phi_{m,r} \equiv t_{m+r}^{\frac{1}{\alpha}} \varphi(t_{m+r}) - t_m^{\frac{1}{\alpha}} \varphi(t_m) - \frac{a}{4\alpha} \left(\frac{t_m}{q(t_m)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \geq \frac{a}{4\alpha} \sum_{k=0}^{r-1} \left(\frac{t_{m+k}}{q(t_{m+k})} \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Если $t_{m+h} < t_{m+r} \leq 2t_m$, то из (7) получаем

$$t_{m+r} - t_{m+h} \leq 2br \frac{t_m}{q(t_m)}$$

и, следовательно, из (3), если h достаточно большое, получаем

$$P(E_r(m)) \leq C_2 \exp\{-C_3 r\},$$

$$P \left\{ \bigcup_{t_{m+h} < t_{m+r} \leq 2t_m} D_{3,r}(m) \right\} \leq C_2 P(D_2(m)) \sum_{r=h+1}^{\infty} e^{-C_3 r}. \quad (21)$$

Число членов последовательности (7), удовлетворяющих условию

$$2t_m < t_{m+r} \leq t_m q^\alpha(t_{m+r})$$

не превосходит $C_4 (\ln \ln t_m)^{\alpha+2}$. Для тех же t_{m+r} из (7), (19) и (6) следует, что

$$\left(\frac{t_{m+k}}{q(t_{m+k})} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \geq C_5 \left(\frac{1}{t_{m+k+1}} \left(B^{-1}(\alpha) \ln \ln t_{m+k+1} \right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} - t_{m+k} \left(B^{-1}(\alpha) \ln \ln t_{m+k} \right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \right).$$

Поэтому

$$P \left\{ \bigcup_{2t_m < t_{m+r} \leq t_m q^\alpha(t_{m+r})} D_{3,r}(m) \right\} \leq C_4 P(D_2(m)) \cdot \frac{(\ln \ln t_m)^{\alpha+2}}{(\ln t_m)^{C_4}}. \quad (22)$$

Если $t_m q^\alpha(t_{m+r}) < t_{m+r} \leq t \Psi(n)$, то

$$\Phi_{r,m} \geq t_{m+r}^{\frac{1}{\alpha}} \varphi(t_{m+r}) \left(1 - \frac{2}{q(t_{m+r})} \right).$$

Поэтому согласно лемме 4 получаем

$$P \left\{ \bigcup_{t_m q^\alpha (t_{m+r}) < t_{m+r} \leq t_\psi(n)} D_{s,r}(m) \right\} \leq \leq C_7 P(D_2(m)) \sum_{t_m q^\alpha (t_{m+r}) < t_{m+r} \leq t_\psi(n)} P(F_{m+r}) \leq C_7 \cdot 2\delta_1 \cdot P(D_2(m)). \quad (23)$$

Если h возьмем достаточно большим, а δ_1 — достаточно малым, то из (21), (22) и (23) следует, что для всех достаточно больших n имеет место неравенство

$$P \left(\bigcup_{n \leq m \leq \psi(n)} D_{s,r}(m) \right) \leq C_8 P(D_2(m)), \quad 0 < C_8 < 1.$$

Следовательно, из (20) получаем, что

$$P(D_2(m)) \geq C_{11} P(F_m).$$

Так как

$$\begin{aligned} P \left(\bigcup_{n \leq m \leq \psi(n)} F_m \right) &= P \left(\bigcup_{n \leq m \leq \psi(n)} D(m) \right) = \sum_{n \leq m \leq \psi(n)} P(D(m)) \geq \\ &\geq \sum_{n \leq m \leq \psi(n)} P(D_2(m)) \geq C_{11} \sum_{n \leq m \leq \psi(n)} P(F_m) > C_{11} \delta_1, \end{aligned}$$

то соотношение (15) в случае $1 < \alpha < 2$ доказано.

Если $0 < \alpha < 1$, то полагаем, что $D_2(m) = D_1(m)$.

$$\begin{aligned} D_2(m) &= D_2(m) \cap \bigcap_{m < m+r \leq \psi(n)} \bar{F}_{m+r}, \\ D_{s,r}(m) &= D_2(m) \cap F_{m+r}, \\ E_r(m) &= \left\{ \xi(t_{m+r}) - \xi(t_m) \geq -\frac{1}{t_{m+r}} \varphi(t_{m+r}) + \frac{1}{t_m} \varphi(t_{m+r}) - \frac{a}{4\alpha} \left(\frac{t_m}{q(t_m)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right\}. \end{aligned}$$

Соотношения (17), (19) и (20) имеют место и здесь.

При $t_m < t_{m+r} \leq 2t_m$ из (7) и (18) следует, что

$$t_{m+r} - t_m \geq r \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{t_m}{q(t_m)}$$

и

$$\Phi_{r,m} \geq -\frac{4b}{\alpha} \sum_{k=0}^{r-1} \left(\frac{t_{m+k}}{q(t_{m+k})} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \geq -\frac{4 \cdot 2^{\frac{1}{\alpha}} br}{\alpha} \left(\frac{t_m}{q(t_m)} \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Следовательно, при достаточно большом a , полагая, что $b = a^{\frac{1+\alpha^2}{2\alpha}}$, из (7) и (3) получаем

$$P \left\{ \bigcup_{t_m < t_{m+r} \leq 2t_m} D_{s,r}(m) \right\} < C_9 \cdot P(D_2(m)) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} e^{-C_{10} r a^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}}}.$$

Вероятность $P(D_{s,r}(m))$ при $\alpha t_m < t_{m+r} \leq t_m q(t_{m+r})$ и $t_m q(t_{m+r}) < t_{m+r} \leq t_\psi(n)$ оцениваем таким же методом как и в случае $1 < \alpha < 2$, используя (7), (18) и (3). Доказательство завершаем так же как и в случае $1 < \alpha < 2$.

Н. Калинаускайте

К СВЕДЕНИЮ ПОДПИСЧИКОВ

Подписка на периодическое издание «Литовский математический сборник» в Литовской ССР принимается всеми отделениями Союзпечати, конторами, отделениями и агентствами связи по республиканскому каталогу газет и журналов (индекс сборника по каталогу 76716).

Лица и организации, находящиеся за пределами Литовской ССР, годовую подписку на сборник могут оформить в Вильнюсском городском отделении Союзпечати по адресу: Вильнюс, ул. Людаса Гиры, 22.

Для оформления подписки следует направить по указанному адресу 3 рубля (почтовым переводом) и указать фамилию (или наименование организации) и полный адрес подписчика, а также цель перевода (годовая подписка на сборник).

Редакция

СОДЕРЖАНИЕ

В. И. Близникас. О некоторых связностях расслоенных пространств	5
Б. С. Брудовский. О k - и c -рефлексивности локально выпуклых пространств	17
<u>Б. И. Будрейка</u> Э. И. Вилкас. Проводная значения параметрической антагонистической игры	23
Р. В. Восилюс. К теории инвариантных аффинных связностей на группе Ли..	29
Э. Гячяускас. Распределение расстояния внутри овалоида	35
Б. Григеллонис. Об эксцессивных функциях и оптимальных правилах остановки ступенчатых марковских процессов	37
В. Кабайла. Условия существования обобщенных автоморфных функций и краевая задача Карлемана	45
А. М. Каган, О. В. Шалаевский. Характеризация нормального закона свойством нецентрального хи-квадрат распределения	57
Б. Кведарас. О краевой задаче с интегральными условиями для систем обыкновенных дифференциальных уравнений	59
А. А. Кондратюк. Экстремальный индикатор для целых функций с положительными нулями	79
Н. В. Мурзов. О решении некоторых динамических игр перетягивания и преследования	119
А. В. Нагаев, И. Бадалбаев. Уточнение некоторых теорем о ветвящихся случайных процессах	129
В. А. Петров. Бигармонический интеграл Пуассона	137
В. М. Терпигорева. Вид и свойства экстремальных функций в некоторых линейных и нелинейных экстремальных задачах	143
В. В. Шилерис. Решение системы уравнений эллиптического типа	157
И. П. Ячяускас. Одна игра преследования на полуплоскости	167
Хроника	171
Письмо в редакцию	172

TURINYS

V. Bliznikas. Apie kai kuriuos išslyksniuotų erdvių sąryšius	16
B. Brudovskis. Apie lokaliai iškilų erdvių k - ir c -refleksivumą	21
B. Budreika, E. Vilkas. Parametrinio antagonistinio lošimo reikšmės iš- vestinė	27
R. Vosylius. Invariantinių afininių sąryšių Li grupėje teorijos klausimu	34
E. Gečiauskas. Atstumo pasiskirstymas ovaloide	36
B. Grigelionis. Apie laiptuotų Markovo procesų ekscesyvinės funkcijas ir opti- malias sustabdymo taisykles	43
V. Kabaila. Apibendrintų automorfinių funkcijų egzistavimo sąlygos ir Karlema- no kraštinis uždavinys	56
A. Kaganas, O. Salajevskis. Normalinio dėsnio charakterizavimas necentri- nio χ^2 -pasiskirstymo savybės pagalba	58
B. Kvedaras. Apie kraštinį uždavinį su integralinėmis sąlygomis antros eilės di- ferencialinių lygčių sistemoms,	76
A. Kondratiuk. Sveikos funkcijos su teigiamais nuliais ekstremalinių indikatorius N. Murzovas. Kai kurių dinaminių galynėjimosi ir persekiojimo lošimų sprendimas	117
A. Nagajevs, I. Badalbjevs. Kai kurių teoremų apie išsišakojančius at- sitiktinius procesus patikslinimas	127
V. Petrovas. Biharmoninis Puasono integralas	136
V. Terpigoreva. Kai kurie tiesiniai ir netiesiniai ekstremumo uždaviniai; ekstre- malinių funkcijų pavidalas ir savybės	142
V. Sileris. Elipsinio tipo lygčių sistemos sprendimas	154
I. Jačiauskas. Vienas persekiojimo lošimas pusplokštumėje	165
Kronika	170
Laiškas redakcijai	171
	172

CONTENTS

V. Bliznikas. On the some conections of fibre spaces	16
B. Brudovski. The k - and c -reflexivity of locally convex vector spaces	21
B. Budreika, E. Vilkas. The derivative of the value of parametric antagonistic game	27
R. Vosylius. Zur frage von den Theorie der Invarianten Affinen Zusammenhänge in der Li Gruppe	34
F. Gečiasuskas. Distribution of a distance in an ovaloid	36
B. Grigelionis. On the excessive functions of the step Markov processes and optimal stopping rules	44
V. Kabaila. Die Existenzbedingungen der verallgemeinerten automorphen Funktionen und eine Randwertaufgabe Carlemans	56
A. Kagan, O. Shalaevsky. Characterization of normal law by a property of the non-central χ^2 -distribution	58
B. Kvedaras. On the boundary value problem with integral conditions for the systems of differential equations of second order	77
A. Kondratjuk. Ein Extremalindikator für die ganzen Funktionen mit positiven Nullstellen	117
N. Murzov. About the solutions of some dynamical games of „peretiagivanije“ and pursuit	127
A. Nagaev, I. Badalbaev. The refinements of some theorems for the random branching processes	136
V. Petrov. Das biharmonische Integral von Poisson	142
V. Terpigoreva. Gestalt und Eigenschaften der Extremalfunktionen in einigen linearen und nichtlinearen Aufgaben	155
V. Šilieris. Die Lösung einer elliptischen Gleichungssystem	165
I. Jačiasuskas. A game of pursuit in the halfplane	170
Chronikle	171
Letters of the editor	172

Indeksas 76716
Kaina Rb. 0,70