LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VII Nr. 1, 1967
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VII № 1, 1967

УТОЧНЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМ О ВЕТВЯЩИХСЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССАХ

А. В. НАГАЕВ, И. БАДАЛБАЕВ

Пусть $\{\mu_n\}$ случайные величины, образующие однородный ветвящийся случайный процесс с одним типом частиц и дискретным временем, т.е.

$$\mathbf{P}\{\mu_0=1\}=1,$$
$$\mathbf{P}\{\mu_1=k\}=p_k, \tag{1}$$

при $l\neq 0$.

$$\mathbf{P}\{\mu_{n+1}=k/\mu_n=l\}=\mathbf{P}\{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_l=k\},$$

где ξ_i независимы и имеют распределение (1).

Кроме того,

$$\mathbf{P}\{\mu_n=0/\mu_{n-1}=0\}=1$$

(см., например, [1]).

Пусть

$$f(x)=\sum_{k\geqslant 0} p_k x^k,$$

$$a=f'(1)=\sum_{k>0} kp_k=\mathbf{M}\,\mu_1,$$

$$b=f''(1)=\sum_{k>1} k(k-1)p_k=\mathbf{D}\,\mu_1-\mathbf{M}\,\mu_1+(\mathbf{M}\,\mu_1)^2.$$

Известно, что при $n\to\infty$ $p_{n0}\to\lambda$, где λ – наименьший положительный корень уравнения

$$f(x)=x, \tag{2}$$

причем

$$\lambda=1, \text{ если } a\leqslant 1 \text{ и } \lambda<1, \text{ если } a>1.$$

Следующие утверждения доказаны Колмогоровым и Ягломом [2], [3].

Теорема А (Колмогорова).

Если

$$a<1,\ b<\infty,$$

то при $n\to\infty$

$$q_n=\mathbf{P}\{\mu_n>0\}=Ka^n\Big(1+o(1)\Big),$$

где K *– абсолютная постоянная.*

Теорема В (Яглома).

Если $a<1$, $b<\infty$, *то распределение* $p^*_{nk}=\mathbf{P}\{\mu_n=k/\mu_n>0\}$ *сходится к предельному распределению* p^*_{nk} *с производящей функцией* $F(x)$, *удовлетворяющей следующему равенству:*

$$F\Big(f(x)\Big)=aF(x)+1-a \tag{3}$$

и условию

$$F'(1)=\frac{1}{K},$$

где K *то же, что и в теореме* A.

Теорема С. (Яглома).

Если $a>1$ и $b<\infty$, то распределение

$$S_n(y)=\mathbf{P}\left\{\frac{\mu_n}{a^n}<y/\mu_n>0\right\}, \tag{4}$$

при $n\to\infty$ сходится к предельному распределению $S(y)$, преобразование Лапласа которого $\psi(s)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$f\left(\psi(s)(1-\lambda)+\lambda\right)=a\psi(s)(1-\lambda)+\lambda. \tag{5}$$

В дальнейшем в работе [4] было показано, что теоремы А, В и С справедливы, если

$$\sum_{k>0}k^{1+\delta}p_k<\infty.$$

В предлагаемой заметке приводятся дальнейшие уточнения теорем А, В и С, аналогичные результатам Золотарева [5].

Теорема a.

Если $a<1$, то для того, чтобы

$$q_n=Ka^n\{1+o(1)\}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_0^1\frac{1-ax-f(1-x)}{x^2}\,dx<\infty. \tag{6}$$

Заметим сразу, что

$$-\frac{1-ax-f(1-x)}{x^2}=\sum_{k\geq 0}r_kx^k,$$

где

$$r_k=\sum_{i\geq k}\sum_{j\geq i}p_j.$$

Если

$$b<\infty,$$

то

$$\sum_{k\geq 0}r_k=b.$$

Теорема b.

Если $a<1$, то распределение p^*_{nk}, при $n\to\infty$, сходится к предельному распределению p^*_k с производящей функцией $F(x)$, удовлетворяющей уравнению (3).

Причем

$$F'(1)=\frac{1}{K},$$

если условие (6) *выполнено, и*

$$F'(1)=\infty,$$

если условие (6) *не выполнено.*

Пусть $f_{-1}(x)$ — функция, обратная к $f(x)$, а $f_{-n}(x)$ n-ая итерация $f_{-1}(x)$ и

$$f_{-1}(1-x)=1-Ax-Ax\left(e^{\delta_1(x)}-1\right),$$

где

$$A=f'_{-1}(1)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{a}.$$

Теорема с.

Если $a>1$, *то при* $n\to\infty$

$$S_n(y)=\mathbf{P}\left\{\frac{\mu_n}{\alpha(n)}<y/\mu_n>0\right\}$$

сходится к предельному распределению $S(y)$, *преобразование Лапласа которого* $\psi(s)$ *удовлетворяет равенству* (5). *При этом:*

1. $\alpha(n)=a^n$ *тогда и только тогда, когда*

$$\int_0^1 \frac{\delta_1(x)}{x}\,dx<\infty; \tag{7}$$

2. $\alpha(n)=a^n/l(n)$, *если* (7) *не выполняется.*

Здесь $l(n)$ *решение уравнения*

$$\int_1^{l(n)} \frac{du}{\ln\frac{1-f_{-1}(1-u)}{u}}=n. \tag{8}$$

Замечание. После того, как результаты, излагаемые в этой статье были получены, авторам попала рукопись австралийских математиков C. R. Heathcote'а, E. Seneta'а, D. Vere-Jones'а (Australian National University), в которой доказываются теоремы *a* и *b*, только условие (6) имеет у них следующий вид:

$$\sum_{k>0} k\log p_k<\infty. \tag{6'}$$

Нам кажется, что приводимые ниже доказательства теорем a и b несколько проще.

Доказательство теоремы a.

Пусть

$$f(1-x)=1-ax-ax\,\delta(x), \tag{9}$$

где $\delta(x)\to 0$, при $x\to 0$. Положим

$$q_k=\sum_{i\geqslant k} p_i,$$

$$g(x)=\sum_{k\geqslant 0} q_k x^k.$$

Так как

$$g(x)=\frac{1-f(x)}{1-x}, \tag{10}$$

то используя (3), имеем

$$g(1-x)=\frac{1-f(1-x)}{x}=a\left(1+\delta(x)\right). \tag{11}$$

Из (4) следует, что $g(x)\uparrow a$, при $x\uparrow 0$. Отсюда и из (5) получаем, что при $0\geqslant x\geqslant 1$

$$\delta(x)\leqslant 0. \tag{12}$$

И, кроме того, при $x\uparrow 0$

$$\delta(x)\uparrow 0. \tag{13}$$

Далее, так как

$$\frac{1-f_n(1-x)}{a^n x}=\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1-f_{k+1}(1-x)}{a\left(1-f_k(1-x)\right)},$$

то

$$\frac{1-f_n(0)}{a^n}=\prod_{k=0}^{n=1}\frac{1-f_{k+1}(0)}{a\left(1-f_k(0)\right)}. \tag{14}$$

Пусть

$$q_n=1-f_n(0)=Ka^n\left(1+o(1)\right). \tag{15}$$

Запишем условие (6) в виде

$$\int_0^1\frac{\delta(x)}{x}\,dx.$$

Произведение (14) переобразуется в силу равенства (9) следующим образом:

$$\frac{1-f_n(0)}{a^n}=\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1-f\left(1-\left(1-f_k(0)\right)\right)}{a\left(1-f_k(0)\right)}=\prod_{k=0}^{n-1}1+\delta\left(1-f_k(0)\right). \tag{16}$$

Используя (15), получаем

$$\prod_{k=0}^{n-1}1+\delta\left(1-f_k(0)\right)=K\left(1+0(1)\right),$$

т.е.

$$-\sum_k\delta\left(1-f_k(0)\right)<\infty.$$

В силу (16)

$$-\sum_{i\geqslant 0}\delta(Ka^i)<\infty.$$

Или

$$-\int_0^\infty\delta(Ka^x)\,dx<\infty.$$

Или

$$\int_0^1\frac{\delta(x)}{x}\,dx<\infty.$$

Необходимость условия (6) доказана.

Докажем достаточность этого условия. Отметим, что произведение (17) в виду свойства (12) либо сходится, либо расходится к нулю.

Пусть (2) выполнено, но тем не менее

$$\frac{1-f_n(0)}{a^n}=l(n)=0(1).$$

Очевидно, $l(n)\downarrow 0$. Далее из (16) получаем

$$\infty=-\sum_{k\geqslant 0}\delta\left(1-f_k(0)\right)=-\sum_{k\geqslant 0}\delta\left(a^k\,l(k)\right)<-\sum_{k\geqslant 0}\delta(a^k),$$

но тогда

$$-\int_1^\infty\delta(a^x)\,dx=\infty,$$

или

$$\int_0^1\frac{\delta(x)}{x}\,dx=\infty.$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы b.

Легко видеть, что

$$\frac{1-f_n(1-x)}{1-f_n(0)}=x\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1-f_{k+1}(1-x)}{1-f_k(1-x)}\cdot\frac{1-f_{k+1}(0)}{1-f_k(0)},$$

или

$$R_n(x)=\frac{1-f_n(1-x)}{1-f_n(0)}=x\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1+\delta\left(1-f_k(1-x)\right)}{1+\delta\left(1-f_k(0)\right)}.$$

Из (13) легко получаем, что

$$R_n(x)<R_{n+1}(x).$$

Поскольку $0\leqslant R_n(x)\leqslant 1$, то существует

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=R(x).$$

Далее, функция $R_n(x)$ выпукла.

Поэтому следует проверить непрерывность $R(x)$ только в нуле. Если (6) справедливо, то

$$1-p_{no}=1-f_n(0)=Ka^n\left(1+o(1)\right).$$

Поскольку

$$1-f_n(1-x)<a^nx,$$

то

$$R_n(x)\leqslant\frac{x}{K}.$$

Таким образом, $R_n(x)<\varepsilon$, едва лишь $x<K\varepsilon$.

Пусть (2) не выполняется, тогда

$$1-f_n(0)=1-p_{n0}=a^n l(n),$$

где $l(n)\downarrow 0$

Выберем k такое, чтобы

$$f_k(0)>1-\varepsilon.$$

Это возможно, так как $f_n(0)\to 1$.

Далее

$$\frac{1-f_{n+k}(0)}{1-f_n(0)}=\frac{a^{n+k}l(n+k)}{a^n l(n)}=a^k\cdot\frac{l(n+k)}{l(n)}.$$

С другой стороны

$$\frac{1-f_n\left(f_k(0)\right)}{1-f_n(0)}=\frac{1-f_{n+k}(0)}{1-f_n(0)}.$$

Поскольку $l(n)\downarrow 0$, то при $f_k(0)<x<1$

$$\frac{1-f_n(x)}{1-f_n(0)}<a^k.$$

Таким образом, непрерывность $R(x)$ в нуле доказана.

Доказательство теоремы c.

1. Пусть

$$f_{-1}(1-x)=1-Ax-Ax\left(e^{\delta_1(x)}-1\right),\tag{17}$$

где

$$A=f_{-1}'(1)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{a}.$$

Положим

$$x=1-f(x).$$

Тогда

$$\delta_1\left(1-f(x)\right)=\ln\frac{1-x}{A\left(1-f(x)\right)}.$$

Из (10) следует, что

$$\delta_1\left(1-f(x)\right)=\ln\frac{1}{Ag(x)}.$$

Отсюда легко видеть, что при $x\downarrow 0$

$$\delta_1(x)\downarrow 0.$$

Повторяя все рассуждения теоремы a получаем, что функция $\frac{1-f_{-n}(1-x)}{A^n}$ сходится к предельной функции $K(x)$ тогда и только тогда, когда выполняется условие (7). Сходимость, как и в теореме, равномерная по x. В силу выпуклости функции $1-f_{-n}(1-x)$, функция $K(x)$ будет строго возрастающей. Таким образом,

$$\frac{1-f_{-n}(1-x)}{A^n K(x)}\sim 1.$$

Положим

$$x=1-f_n(e^{-A^n s}).$$

Тогда

$$\frac{s+o(A^n)}{K(1-f_n(e^{-A^n s}))}\sim 1.$$

В силу строгой монотонности $K(x)$ функция

$$V_n(s)=f_n(e^{-A^n s})$$

сходится при $n\to\infty$ к некоторой функции $V(s)$, принимающей значения из промежутка $[\lambda, 1]$. Тогда, как легко видеть, функция

$$\psi(s)=\frac{V(s)-\lambda}{1-\lambda}$$

и будет преобразованием Лапласа для предельной функции распределения. Далее нетрудно видеть, что

$$f\left(V_n(As)\right)=V_{n+1}(s),$$

или в пределе

$$f\left(V(As)\right)=V(s),$$

откуда немедленно следует второе утверждение теоремы.

2. Рассмотрим отношение

$$\frac{1-f_{-n}(1-x)}{1-f_{-n}(1-h)},$$

где h — число, сколь угодно близкое к $1-\lambda$, но меньше его. Рассуждениями, подобными приведенным в доказательстве теоремы b и c п. 1 доказываемой теоремы, несложно показать, что функция

$$V_n(s)=f_n\left(e^{-s\left(1-f_{-n}(1-h)\right)}\right)$$

сходится при $n\to\infty$ к предельной функции $V(s)$, принимающей значения из промежутка $[\lambda, 1]$. При этом, очевидно, функция

$$\psi(s)=\frac{V(s)-\lambda}{1-\lambda}$$

будет преобразованием Лапласа для предельной функции распределения. Из разложения (17) получаем

$$1-f_{-n}(1-h)=A^n e^{\sum\limits_{k=0}^{n-1}\delta_1\left(1-f_k(1-h)\right)}=A^n e^{\sum\limits_{k=0}^{n-1}\delta_1\left(A^k l_1(k)\right)}=A^n l_1(n).$$

Так как

$$\sum_{k=0}^{n-1}\delta_1\left(A^k l(k)\right)\leqslant\int\limits_0^{n-1}\delta_1\left(A^x l(x)\right)dx\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\delta\left(A^k l(k)\right),$$

то

$$l_1(n)=\exp\left\{\int\limits_0^{n-1}\delta_1\left(A^x l_1(x)\right)dx\right\}\qquad\left(1+o(1)\right).$$

Покажем, что $l(n)$ эквивалентна решению уравнения

$$l_1(n)=\exp\int\limits_0^{A^{n-1}l_1(n)}\frac{\delta_1(u)}{u\left(\ln A+\delta_1(u)\right)}\,du,$$

или, после упрощения,

$$n=\int\limits_1^{l(n)}\frac{du}{\ln\dfrac{1-f_{-1}(1-u)}{u}}.$$

После замены переменной получим, что

$$l_1(n)=\exp\left\{\int\limits_0^{A^{n-1}l(n)}\frac{\delta_1(u)}{u\left(\ln A+\delta_1(u)\right)}\,du\right\}\qquad\left(1+o(1)\right).$$

Рассмотрим теперь отношение $\frac{l_1(n)}{l(n)}$. Имеем

$$\ln\frac{l_1(n)}{l(n)}=\int\limits_{A^{n-1}l(n)}^{A^{n-1}l_1(n)}\frac{\delta_1(u)}{u\left(\ln A+\delta_1(u)\right)}\,du+o(1)=$$

$$=\int\limits_{A^{n-1}l(n)}^{A^{n-1}l_1(n)}\frac{du}{u}+\int\limits_{A^{n-1}l(n)}^{A^{n-1}l_1(n)}\frac{\ln A}{u\left(\ln A+\delta_1(u)\right)}\,du+o(1).$$

Отсюда

$$\left|\int\limits_{A^{n-1}l(n)}^{A^{n-1}l_1(n)}\frac{du}{u\left(\ln A+\delta_1(u)\right)}\right|=o(1).$$

Так как

$$\left|\int\limits_{A^{n-1}l(n)}^{A^{n-1}l_1(n)}\frac{\delta_1(u)}{u\left(\ln A+\delta_1(u)\right)}\,du\right|\leqslant\left|\int\limits_{A^{n-1}l(n)}^{A^{n-1}l_1(n)}\frac{du}{u\left(\ln A+\delta_1(u)\right)}\right|,$$

то, при $n\to\infty$,

$$\frac{l_1(n)}{l(n)}\to 1.$$

Далее,

$$V_n(s)=f_n\left(e^{-s\left(1-f_{-n}(1-h)\right)}\right)=f_n\left(e^{-sA^n l(n)}\right),$$

или

$$f\left(f_n\left(e^{-sA^{n+1}l(n+1)}\right)\right)=f\left(V_n\left(A\,\frac{l(n+1)}{l(n)}\cdot s\right)\right)=V_{n+1}(s),$$

так как

$$\frac{l(n+1)}{l(n)} = e^{\delta_1 \left(1 - f_{-n}(1-h)\right)} = 1 + o(1).$$

Отсюда, при $n \to \infty$, получаем

$$f\left(V(As)\right) = V(s).$$

Таким образом, теорема доказана полностью.

Ташкент

Поступило в редакцию
25.IX.1966

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее применения, 1952.
2. А. Н. Колмогоров, К решению одной биологической задачи, Изв. НИИмат. и мех. Томского Универ. 2, 2, вып. 1 (1938), 1—12.
3. А. М. Яглом, Некоторые предельные теоремы теории ветвящихся случайных процессов, ДАН СССР, 56, 8 (1947).
4. А. В. Нагаев, Уточнение некоторых предельных теорем теории ветвящихся случайных процессов, Тр. ТашГУ, вып. 189, 55—63.
5. В. М. Золотарев, Уточнение ряда теорем теории ветвящихся случайных процессов, Теория вероятн. и ее примен. 2, 2 (1957), 256—265.
6. T. E. Harris, Branching processes, AMS vol. XIX, 4 (1948) 474—494.

KAI KURIŲ TEOREMŲ APIE IŠSIŠAKOJANČIUS ATSITIKTINIUS PROCESUS PATIKSLINIMAS

A. NAGAJEVAS, I. BADALBAJEVAS

(Reziumė)

Darbe autoriai šiek tiek patikslina žinomus Kolmogorovo ir Jaglomo rezultatus.

THE REFINEMENTS OF SOME THEOREMS FOR THE RANDOM BRANCHING PROCESSES

A. NAGAEV, I. BADALBAEV

(Summary)

The authors have made some refinement of well-known Kolmogoroff's and Yaglom's results.