LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VII Nr. 1, 1967
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VII № 1, 1967

О РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ИГР ПЕРЕТЯГИВАНИЯ И ПРЕСЛЕДОВАНИЯ

Н. В. МУРЗОВ

В данной заметке будут даны решения некоторых динамических игр перетягивания и преследования, рассмотренных в [1]. Решения будут найдены при помощи геометрической интерпретации возможных перемещений игроков. Такой прием часто используется в [2], а в [3], например, с помощью него была доказана основная теорема.

Результаты будут получены для случаев, когда величины сил игроков постоянны и игры происходят на плоскости. Обобщение на случай n-мерного $(n>2)$ пространства не представляет трудности.

I. Пусть частица μ массы m в начальный момент времени $t=0$ находится в точке q_1^0, q_2^0 и обладает импульсом p_1^0, p_2^0. Дальнейшее движение частицы определяется как решение системы уравнений

$$\begin{aligned} m\dot{q}_1&=p_1, & \dot{p}_1&=\varphi_1(q_1,\ q_2,\ p_1,\ p_2,\ t),\\ m\dot{q}_2&=p_2, & \dot{p}_2&=\varphi_2(q_1,\ q_2,\ p_1,\ p_2,\ t). \end{aligned} \tag{*}$$

Здесь φ_1 и φ_2 удовлетворяют условиям.

1. $\varphi_1^2(q_1,\ q_2,\ p_1,\ p_2,\ t)+\varphi_2^2(q_1,\ q_2,\ p_1,\ p_2;\ t)=h=\mathrm{const}$, $h\geqslant 0$ — заданная величина.

2. φ_1 и φ_2 таковы, что система уравнений (*) имеет единственное решение при любых начальных условиях q_1^0, q_2^0 p_1^0, p_2^0.

Обозначим $\varphi_1=h\cos\Theta$, $\varphi_2=h\sin\Theta$.

Теорема 1. *Пусть частица μ массы m, двигаясь согласно уравнениям* *)

$$\begin{aligned} \dot{q}_1&=\frac{p_1}{m}, & \dot{p}_1&=h\cos\Theta,\\ \dot{q}_2&=\frac{p_2}{m}, & \dot{p}_2&=h\sin\Theta, \end{aligned} \tag{1.1}$$

в начальный момент времени $t=0$ находится в точке q_1^0, q_2^0, обладает импульсом p_1^0, p_2^0 и $t\in[0,\ T]$. Тогда

$$\left[q_1(T)-\left(\frac{p_1^0}{m}\,T+q_1^0\right)\right]^2+\left[q_2(T)-\left(\frac{p_2^0}{m}\,T+q_2^0\right)\right]^2\leqslant\left(\frac{hT^2}{2m}\right)^2 \tag{1.2}$$

и знак равенства достигается в том и только в том случае, когда $\Theta=\mathrm{const}$.

Доказательство. Зафиксируем некоторую траекторию частицы μ. Тогда очевидно, что вместо зависимости $\Theta=\Theta(q_1,\ q_2,\ p_1,\ p_2,\ t)$, можно считать, что $\Theta=\Theta(t)$, подразумевая под этим изменение Θ при движении частицы μ вдоль данной траектории.

*) Н. Н. Красовский в работе «Об одной задаче пресследования», ЛММ, 1963, т. 27, вып. 2, упоминает, что похожий результат получен Ю. М. Репиным.

Вместе с траекторией частицы μ будем рассматривать кривую $\mathfrak{F}$, определяемую уравнениями

$$\tilde{q}_1 = f_1(t) = \int_0^t \cos\Theta(\tau)\,d\tau, \quad \tilde{q}_2 = f_2(t) = \int_0^t \sin\Theta(\tau)\,d\tau,$$

касательная к которой дает направление приложения силы в данный момент времени.

Сначала докажем неравенство (1.2) в случае, когда $\mathfrak{F}$ является ломаной, то есть

$$f_1(t) = \sum_{i=0}^{k-1} (T_i - T_{i-1})\cos\Theta_i + (t - T_{k-1})\cos\Theta_k,$$

$$f_2(t) = \sum_{i=0}^{k-1} (T_i - T_{i-1})\sin\Theta_i + (t - T_{k-1})\sin\Theta_k, \tag{1.3}$$

при $t \in [T_{k-1}, T_k]$, где $k = 1, \ldots, n$,

$$0 = T_{-1} = T_0 \leqslant T_1 \leqslant \cdots \leqslant T_n = T.$$

Отсюда

$$F_1(T) = \int_0^T f_1(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} t_k \left[\sum_{i=0}^{k-1} t_i \cos\Theta_i + \frac{t_k}{2}\cos\Theta_k\right],$$

$$F_2(T) = \int_0^T f_2(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} t_k \left[\sum_{i=0}^{k-1} t_i \sin\Theta_i + \frac{t_k}{2}\sin\Theta_k\right].$$

Здесь $t_k = T_k - T_{k-1}$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Возводя $F_1(T)$, $F_2(T)$ в квадрат и складывая, получим

$$F_1^2(T) + F_2^2(T) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} t_k t_j \left[\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{l=0}^{j-1} t_i t_l \cos(\Theta_i - \Theta_l) + \frac{t_k}{2}\sum_{l=0}^{j-1} t_l \cos(\Theta_l - \Theta_k) + \right.$$

$$\left. + \frac{t_j}{2}\sum_{i=0}^{k-1} t_i \cos(\Theta_i - \Theta_j) + \frac{t_k t_j}{4}\cos(\Theta_k - \Theta_j)\right] = \frac{T^4}{4} + \alpha,$$

где

$$\alpha = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left\{\sum_{\substack{i=0\\ i\neq l}}^{k-1}\sum_{l=0}^{j-1} t_i t_l [\cos(\Theta_i - \Theta_l) - 1] + \frac{t_k}{2}\sum_{\substack{l=0\\ l\neq k}}^{j-1} t_l [\cos(\Theta_l - \Theta_k) - 1] + \right.$$

$$\left. + \frac{t_j}{2}\sum_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{k+1} t_i [\cos(\Theta_i - \Theta_j) - 1] + \frac{t_k t_j}{4}[\cos(\Theta_k - \Theta_j) - 1]\right\} \leqslant 0$$

при любых Θ_i, $t_i \geqslant 0$ и n. Притом, знак равенства достигается тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ – прямая.

Пусть теперь $\Theta = \Theta(t)$ – произвольная функция, удовлетворяющая условию 2. Так как кривая $\mathfrak{F}$ непрерывна и $[f_1(t)]^2 + [f_2(t)]^2 = 1$, можно построить последовательность ломаных $\mathfrak{F}_n$, представимых в виде (1.3), которая при $n \to \infty$ равномерно по t на $[0, T]$ приближалась бы к $\mathfrak{F}$.

Поскольку при любых n, Θ_i и $t_i \geqslant 0$ $\alpha \leqslant 0$, то

$$\frac{T^4}{4} \geqslant \lim_{n\to\infty} \left\{[F_1^{(n)}]^2 + [F_2^{(n)}]^2\right\} = \left[\lim_{n\to\infty} \int_0^T f_1^{(n)}(t)\, dt\right]^2 + \\ + \left[\lim_{n\to\infty} \int_0^T f_2^{(n)}(t)\, dt\right]^2 = F_1^2(T) = F_2^2(T).$$

А так как

$$\left[q_1(T) - \left(\frac{p_1^0}{m}\ T + q_1^0\right)\right]^2 + \left[q_2(T) - \left(\frac{p_2^0}{m}\ T + q_2^0\right)\right]^2 = \frac{h^2}{m^2}\ [F_1^2(T) + F_2^2(T)],$$

получаем требуемый результат.

Теорема 2. *Пусть частица* μ *массы* m, *двигаясь согласно уравнениям* (1.1), *в начальный момент времени* $t=0$ *находится в точке* q_1^0, q_2^0 *обладает импульсом* p_1^0, p_2^0 и $t \in [0,\ T]$. *Тогда*

$$[p_1(T) - p_1^0]^2 + [p_2(T) - p_2^0]^2 \leqslant (hT)^2 \tag{1.4}$$

и знак равенства достигается в том и только в том случае, когда $\Theta = \mathrm{const}$.

Доказательство очевидно.

Определение 1. *Кру́гом действия в конфигурационном пространстве называется круг с центром в точке* $q_i^0 + \frac{p_i^0}{m}\ T$, $i=1,\ 2$, *и радиуса* $R = \frac{hT^2}{2m}$.

Определение 2. *Кру́гом действия в импульсном пространстве называется круг с центром в точке* p_i^0, $i=1,\ 2$, *и радиуса* $R = hT$.

Таким образом, и в конфигурационном и в импульсном пространствах существует некоторый круг, параметры которого зависят только от начальных условий и момента времени T и не зависят от вида функции $\Theta = \Theta(t)$. Указанные круги определяют области возможных перемещений частицы μ в соответствующем пространтсве.

В теоремах 1, 2 было показано, что при $\Theta = \mathrm{const}$, траектория движения частицы μ в момент времени $t=T$ пересекает границу круга действия. Можно показать и обратное, то есть, для каждой точки a границы круга действия найдется такое Θ, что соответствующая траектория частицы μ будет в момент времени $t=T$ пересекать границу круга действия в точке a.

Теорема 3. *Каждая точка границы круга действия как в конфигурационном, так и в импульсном пространствах достижима.*

Применим теоремы 1, 2, 3 к решению некоторых теоретико игровых задач.

II. Рассмотрим следующую антагонистическую игру перетягивания [1]. Частица μ массы m в начальный момент времени $t=0$ находится в точке q_1^0, q_2^0 и обладает импульсом p_1^0, p_2^0. Она может перемещаться в плоскости под действием сил, приложенных к ней игроками P и E. Игроки имеют полную информацию о состоянии системы. Множества вектор-функций $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{E}$, представляющие собой множества стратегий игроков P и E, определяются следующим образом.

Для любых

$$\varphi(q_1,\ q_2,\ p_1,\ p_2\ T) = [\varphi_1(q_1,\ q_2,\ p_1,\ p_2,\ T),\quad \varphi_2(q_1,\ q_2,\ p_1,\ p_2,\ T)] \in \mathfrak{P}$$

и

$$\psi(q_1, q_2, p_1, p_2, T) = [\psi_1(q_1, q_2, p_1, p_2, T), \quad \psi_2(q_1, q_2, p_1, p_2, T)] \in \mathfrak{E}$$

выполняются условия.

1. $\varphi_1^2(q_1, q_2, p_1, p_2, T) + \varphi_2^2(q_1, q_2, p_1, p_2, T) = \Phi^2 = \text{const},$

$\psi_1^2(q_1, q_2, p_1, p_2, T) + \psi_2^2(q_1, q_2, p_1, p_2, T) = \Psi^2 = \text{const},$

где $\Phi \geqslant 0$, $\Psi \geqslant 0$ — заданные величины и $h = \Phi - \Psi \geqslant 0$.

2. Система уравнений

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \frac{p_1}{m}, \quad \dot{p}_1 = \varphi_1 - \psi_1, \\ \dot{q}_2 &= \frac{p_2}{m}, \quad \dot{p}_2 = \varphi_2 - \psi_2 \end{aligned} \tag{2.1}$$

имеет единственное решение при любых начальных условиях q_1^0, q_2^0, p_1^0, p_2^0.

Функция выигрыша определяется следующим образом. Пусть $U(q_1, q_2, p_1, p_2)$ — достаточно гладкая вещественная функция, заданная во всем фазовом пространстве. Тогда, если $q_1(t)$, $q_2(t)$, $p_1(t)$, $p_2(t)$ есть решение системы уравнений (2.1) в станции (φ, ψ) при начальных условиях q_1^0, q_2^0, p_1^0, p_2^0, то

$$K(q_1^0, q_2^0, p_1^0, p_2^0; \varphi, \psi) = U[q_1(T_0), q_2(T_0), p_1(T_0), p_2(T_0)],$$

где T_0 — предписанная заранее продолжительность игры.

Обозначим получившуюся игру через $\Gamma(q^0, p^0, T_0)$.

Пусть в игре $\Gamma(q, p, T)$ существует ситуация равновесия в чистых стратегиях и пусть

$$V(q_1, q_2, p_1, p_2, T) = \operatorname{val} \Gamma(q, p, T).$$

Имеют место следующие теоремы [1].

Теорема I. *Для того, чтобы игра $\Gamma(q, p, T)$ имела дифференцируемое значение в чистых стратегиях необходимо, чтобы задача Коши для уравнения*

$$\frac{\partial V}{\partial T} - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{2} p_i \frac{\partial V}{\partial q_i} + (\Psi - \Phi) \left[\sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial V}{\partial p_i} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = 0 \tag{2.2}$$

при начальном условии

$$V|_{T=0} = U(q_1, q_2, p_1, p_2) \tag{2.3}$$

имела решение.

Теорема II. *Пусть $V(q_1, q_2, p_1, p_2, T)$ является решением задачи Коши ля уравнения (2.2) и пусть функции*

$$\begin{aligned} \varphi_i^* &= \Phi \frac{\partial V}{\partial p_i} \left[\sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial V}{\partial p_i} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}, \\ \psi_i^* &= \Psi \frac{\partial V}{\partial p_i} \left[\sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial V}{\partial p_i} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad j = 1, 2, \end{aligned} \tag{2.4}$$

принадлежат множествам $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{E}$ соответственно, тогда

$$\operatorname{val} \Gamma(q, p, T) = V(q_1, q_2, p_1, p_2, T)$$

и оптимальные стратегии определяются по формулам (2.4).

Положим

$$U = U(q_1, q_2) = -\sqrt{(q_1 - q_1^*)^2 + (q_2 - q_2^*)^2}, \tag{2.5}$$

где q_1^*, q_2^* — координаты некоторой фиксированной точки.

Теорема 4. *Пусть* $U=U(q_1, q_2)$ *определяется по формуле* (2.5) *и пусть*

$$\rho \geqslant \frac{\Phi+\Psi}{2m} T^2. \tag{2.6}$$

Тогда

$$\operatorname{val}\Gamma(q, p, T)=V(q_1, q_2, p_1, p_2, T)=-[\rho-R], \tag{2.7}$$

где $\rho=\sqrt{\left[\left(q_1+\frac{p_1}{m}T\right)-q_1^*\right]^2+\left[\left(q_2+\frac{p_2}{m}T\right)-q_2^*\right]^2}$ — *расстояние от центра круга действия в конфигурационном пространстве до точки* q_1^*, q_2^*, *а* $R=\frac{hT^2}{2m}$ — *радиус указанного круга действия.*

Доказательство теоремы основывается на теоремах 1 и 3 и непосредственно из них следует. Укажем, что его можно провести и используя теоремы I и II. Действительно, непосредственно подстановкой убеждаемся, что (2.7) удовлетворяет уравнению (2.2) и начальному условию (2.3) с функцией $U(q_1, q_2, p_1, p_2)$, определяемой по формуле (2.5). С другой стороны, условие (2.6) гарантирует нам принадлежность φ_i^* и ψ_i^* к классам $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{E}$.

Итак, в указанном случае оптимальные стратегии и оптимальная траектория имеют вид

$$\varphi_i^*=-\frac{\Phi}{\rho}\left[\left(q_i+\frac{p_i}{m}T\right)-q_i^*\right],$$

$$\psi_i^*=-\frac{\Psi}{\rho}\left[\left(q_i+\frac{p_i}{m}T\right)-q_i^*\right], \quad i=1, 2,$$

$$q_i(t)=-\frac{h\left(q_i^0+\frac{p_i^0}{m}T_0-q_i^*\right)}{2m\sqrt{\sum_{i=1}^{2}\left(q^0+\frac{p_i^0}{m}T_0-q_i^*\right)^2}}t^2+\frac{p^0}{m}t+q_i^0. \tag{2.8}$$

Пусть теперь

$$U=U(p_1, p_2)=-\sqrt{p_1^2+p_2^2}. \tag{2.9}$$

Теорема 5. *Пусть* $U(p_1, p_2)$ *определяется по формуле* (2.9) *и пусть* $\rho\geqslant(\Phi+\Psi)T$, *тогда*

$$\operatorname{val}\Gamma(q, p, T)=V(p_1, p_2, T)=-[\rho-R],$$

где $\rho=\sqrt{p_1^2+p_2^2}$ — *расстояние от центра круга действия в импульсном пространстве до начала координат в том же пространстве, а* $R=hT$ — *радиус круга действия в импульсном пространстве.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4.

Оптимальные стратегии и оптимальная траектория в импульсном пространстве имеют вид (ср. [4]

$$\psi_i^*=-\frac{\Phi}{\rho}p_i,$$

$$\psi_i^*=-\frac{\Psi}{\rho}p_i, \quad i=1; 2,$$

$$p_i(t)=-\frac{hp_i^0}{\sqrt{(p_1^0)^2+(p_2^0)^2}}t+p_i^0, \quad i=1, 2. \tag{2.10}$$

III. Рассмотрим теперь динамическую антагонистическую игру преследования [1]. Две частицы — преследователь P и преследуемый E — с массами m_P и m_E в начальный момент времени $t=0$ находятся в точках q_1^0, q_2^0; r_1^0, r_2^0

и обладают импульсами p_1^0, p_2^0; s_1^0, s_2^0 соответственно. Игроки P и E могут перемещаться по плоскости, имея возможность в каждый момент времени изменять направление прилагаемых сил и имея, при этом, полную информацию о состоянии системы.

Множества вектор-функций $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{E}$, представляющие множества стратегии игроков P и E, определяются следующим образом. Для любых

$$\varphi(q, p, r, s, T)=[\varphi_1(q, p, r, s, T), \quad \varphi_2(q, p, r, s, T)] \in \mathfrak{P},$$
$$\psi(q, p, r, s, T)=[\psi_1(q, p, r, s, T), \quad \psi_2(q, p, r, s, T)] \in \mathfrak{E}$$

выполняются условия

1. $\varphi_1^2(q, p, r, s, T)+\varphi_2^2(q, p, r, s, T)=\Phi^2=\text{const},$

$\psi_1^2(q, p, r, s, T)+\psi_2^2(q, p, r, s, T)=\Psi^2=\text{const},$

где $\Phi \geqslant 0$, $\Psi \geqslant 0$ — заданные величины и $h=\frac{\Phi}{m_P}-\frac{\Psi}{m_E} \geqslant 0$.

2. Система уравнений

$$\begin{aligned} m_P\dot{q}_1&=p_1, & \dot{p}_1&=\varphi_1(q, p, r, s, T),\\ m_P\dot{q}_2&=p_2, & \dot{p}_2&=\varphi_2(q, p, r, s, T),\\ m_E\dot{r}_1&=s_1, & \dot{s}_1&=\psi_1(q, p, r, s, T),\\ m_E\dot{r}_2&=s_2, & \dot{s}_2&=\psi_2(q, p, r, s, T)\end{aligned} \tag{3.1}$$

имеет единственное решение при любых начальных условиях

$$q_1^0, q_2^0, \quad p_1^0, p_2^0, \quad r_1^0, r_2^0, \quad s_1^0, s_2^0.$$

Функцию выигрыша определим следующим образом. Пусть $U(q_1, q_2, p_1, p_2, r_1, r_2, s_1, s_2)$ — достаточно гладкая вещественная функция. Тогда, если $q_i(t)$, $p_i(t)$, $r_i(t)$, $s_i(t)$, $i=1, 2$, есть решение системы уравнений (3.1) в ситуации (φ, ψ) при начальных условиях q_i^0, p_i^0, r_i^0, s_i^0, $i=1, 2$, то

$$K(q^0, p^0, r^0, s^0; \varphi, \psi)=U[q(T_0), p(T_0), r(T_0) s(T_0)],$$

где T_0 — предписанная заранее продолжительность игры.

Обозначим получившуюся игру через $\Gamma(q^0, p^0, r^0, s^0, T_0)$.

Пусть в игре $\Gamma(q, p, r, s, T)$ существует ситуация равновесия в чистых стратегиях и пусть

$$V(q, p, r, s, T)=\operatorname{val}\Gamma(q, p, r, s, T).$$

В [1] доказываются теоремы, аналогичные теоремам I и II из пункта II. Не будем приводить их полностью. Выпишем только основное уравнение, начальное условие для него и выражения для оптимальных стратегий

$$\frac{\partial V}{\partial T}-\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\frac{p_i}{m_p}+\frac{\partial V}{\partial r_i}\frac{s_i}{m_E}\right)+\Psi\left[\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial V}{\partial s_i}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}-\Phi\left[\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial V}{\partial p_i}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}=0, \tag{3.2}$$

$$V|_{T=0}U(q_1, q_2, p_1, p_2, r_1, r_2, s_1, s_2), \tag{3.3}$$

$$\varphi_i^*=\Phi\frac{\partial V}{\partial p_i}\left[\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial V}{\partial p_i}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}},$$

$$\psi_i^*=-\Psi\frac{\partial V}{\partial s_i}\left[\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial V}{\partial s_i}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}, \quad i=1, 2. \tag{3.4}$$

Пусть

$$U = U(q_1, q_2, r_1, r_2).$$

В данном случае можно построить два круга действия Q и R в конфигурационном пространстве с границами Q_g и R_g, соответствующие игрокам P и E. Обозначим $\overline{Q} = Q \times Q_g$, $\overline{R} = R \times R_g$. Положим, что начальные условия q_i^0, p_i^0, r_i^0, s_i^0, $i = 1, 2$ и T_0 таковы, что $\overline{Q}$ и $\overline{R}$ не пересекаются. Тогда, очевидно, имеет место следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть непрерывная вещественная функция* $U(q_1, q_2, r_1, r_2)$, *заданная на* $\overline{Q} \times \overline{R}$, *удовлетворяет следующим условиям:*

а) *при любых фиксированных* $r_1, r_2 \in \overline{R}$, $U(q_1, q_2, r_1, r_2)$ *как функция* q_1, q_2 *достигает своего наибольшего значения на* Q_g;

б) *при любых фиксированных* $q_1, q_2 \in \overline{Q}$, $U(q_1, q_2, r_1, r_2)$ *как функция* r_1, r_2 *достигает своего наименьшего значения на* R_g;

в) $\min\limits_{r \in R_g} \max\limits_{q \in Q_g} U(q, r) = \max\limits_{q \in Q_g} \min\limits_{r \in R_g} U(q, r)$.

Тогда

$$V(q_1, q_2, p_1, p_2, r_1, r_2, s_1, s_2, T) = U(q_1^*, q_2^*, r_1^*, r_2^*),$$

где точки

$$q_1^*, q_2^* \in Q_g, \quad r_1^*, r_2^* \in R_g$$

определяются из соотношения

$$\min_{r \in R_g} \max_{q \in Q_g} U(q_1, q_2, r_1, r_2) = U(q_1^*, q_2^*, r_1^*, r_2^*).$$

В случае, когда $U = U(p_1, p_2, s_1, s_2)$, имеет место теорема, совершенно аналогичная теореме 6.

Обозначим, как и ранее, через Q, R, Q_g, R_g, $\overline{Q}$, $\overline{R}$ круги действия в импульсном пространстве, их границы и замыкания; и предположим, что $\overline{Q}$ и $\overline{R}$ не пересекаются.

Теорема 7. *Пусть непрерывная вещественная функция* $U(p_1, p_2, s_1, s_2)$, *заданная на* $\overline{Q} \times \overline{R}$, *удовлетворяет следующим условиям:*

а) *при любых фиксированных* $s_1, s_2 \in \overline{R}$, $U(p_1, p_2, s_1, s_2)$ *как функция* p_1, p_2 *достигает своего наибольшего значения на* Q_g;

б) *при любых фиксированных* $p_1, p_2 \in \overline{Q}$, $U(p_1, p_2, s_1, s_2)$ *как функция* s_1, s_2 *достигает своего наименьшего значения на* R_g;

в) $\min\limits_{s \in R_g} \max\limits_{p \in Q_g} U(p, s) = \max\limits_{p \in Q_g} \min\limits_{s \in R_g} U(p, s)$.

Тогда

$$V(p_1, p_2, s_1, s_2, T) = U(p_1^*, p_2^*, s_1^*, s_2^*),$$

где точки

$$p_1^*, p_2^* \in Q_g; \quad s_1^*, s_2^* \in R_g$$

определяются из соотношения

$$\min_{s \in R_g} \max_{p \in Q_g} U(p_1, p_2, s_1, s_2,) = U(p_1^*, p_2^*, s_1^*, s_2^*).$$

Примеры. Пусть

$$U(q_1, q_2, r_1, r_2) = -[(q_1 - r_1)^2 + (q_2 - r_2)^2]. \tag{3.5}$$

Очевидно, что эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы 6. Таким образом, получаем

$$V(q_1,\ q_2,\ p_1,\ p_2,\ r_1,\ r_2,\ s_1,\ s_2,\ T)=$$
$$=\left\{\sqrt{\sum_{i=1}^{2}\left[\left(q_i+\frac{p_i}{m_P}T\right)-\left(r_i+\frac{s_i}{m_E}T\right)\right]^2}-\frac{hT^2}{2}\right\}^2. \qquad (3.6)$$

Нетрудно проверить также, что функция (3.6) удовлетворяет (3.2) и (3.3). Оптимальные стратегии и оптимальные траектории с функцией выигрыша (3.5) приведены в 5.

Пусть теперь

$$U(p_1,\ p_2,\ s_1,\ s_2)=-\sqrt{(p-s_1)^2+(p_2-s_2)^2}. \qquad (3.7)$$

Функция (3.7) удовлетворяет всем условиям теоремы 7, а, следовательно,

$$V(p_1,\ p_2,\ s_1,\ s_2,\ T)=-\left[\sqrt{\sum_{i=1}^{2}(p_i-s_i)^2}-(\Phi-\Psi)T\right]. \qquad (3.8)$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что функция (3.8) удовлетворяет уравнению (3.2) и начальному условию (3.3). Оптимальные стратегии в данном случае имеют вид

$$\varphi_i^*=-\Phi(p_i-s_i)\left[\sum_{i=1}^{2}(p_i-s_i)^2\right]^{-\frac{1}{2}},$$
$$\psi_i^*=-\Psi(p_i-s_i)\left[\sum_{i=1}^{2}(p_i-s_i)^2\right]^{-\frac{1}{2}},\quad i=1,\ 2. \qquad (3.9)$$

Если оба игрока действуют оптимально, то траектории их в импульсном пространстве — прямые. Если же игрок E двигается не оптимальным образом, то оптимальная траектория игрока P представляет собой погонную линию в импульсном пространстве [2], что непосредственно следует из (3.9) и (3.1).

В заключение заметим, что если функция $U(q_1,\ q_2,\ r_1,\ r_2)$ является гармонической по переменным $q_1,\ q_2$ в $\bar{Q}=Q\times Q_g$ и по переменным $r_1,\ r_2$ в $\bar{R}=R\times R_g$, то условия а) и б) теоремы 6 всегда выполнены.

То же самое можно сказать и о функции $U(p_1,\ p_2,\ s_1,\ s_2)$.

Автор приносит благодарность Л. А. Петросяну за внимание к работе и полезные указания.

Ленинград

Поступило в редакцию 30.VI.1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Петросян, Н. В. Мурзов. Теоретико-игровые задачи механики, Лит. мат. сб., VI, № 3, 1966.
2. R. Isaacs, Differential games, NY., 1965.
3. Л. А. Петросян, Об одном семействе дифференциальных игр на выживание в пространстве R^n, ДАН СССР, т. 161, № 1, 1965.
4. Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко, Математическая теория оптимальных процессов, ФМ, М., 1961.
5. Л. А. Петросян, Н. В. Мурзов, Динамическая игра преследования, ДАН СССР, т. 172, № 6, 1967.

KAI KURIŲ DINAMINIŲ GALYNĖJIMOSI IR PERSEKIOJIMO LOŠIMŲ SPRENDIMAS

N. MURZOVAS

(Reziumė)

Surasti dinaminių galynėjimosi ir persekiojimo lošimų, nagrinėtų [1] straipsnyje, sprendiniai.

ABOUT THE SOLUTIONS OF SOME DYNAMICAL GAMES OF "PERETIAGIVANIJE" AND PERSUIT

N. MURZOV

(Summary)

In the paper the solutions of some dynamical games, which were investigated in [1], are given.