LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VII Nr. 1, 1967
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VII № 1, 1967

ОБ ЭКСЦЕССИВНЫХ ФУНКЦИЯХ И ОПТИМАЛЬНЫХ ПРАВИЛАХ ОСТАНОВКИ СТУПЕНЧАТЫХ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕСССОВ

Б. ГРИГЕЛИОНИС

Введение

Пусть $X=(x_t,\ \infty,\ M_t,\ P_x)$ — однородный ступенчатый непрерывный справа марковский процесс*) с непрерывным временем $t \geqslant 0$ в полукомпакте $(E,\ \mathscr{B})$, заданный на пространстве элементарных событий $\Omega=\{\omega\}$. Напомним, что марковский процесс X называется ступенчатым, если для каждых $\omega \in \Omega$ и $t \geqslant 0$ существует $\delta>0$ такое, что $x_{t+h}(\omega)=x_t(\omega)$ для всех $h \in [0,\ \delta)$, и при любом ω множество скачков траектории $x_t(\omega)$ не имеет конечных предельных точек. (Число t называется моментом скачка траектории $x_t(\omega)$, если существует последовательность $t_n \uparrow t$ такая, что $x_{t_n}(\omega) \neq x_t(\omega)$, $n=1,\ 2, \ldots$)

В настоящее время класс ступенчатых марковских процессов весьма полно исследован. Структуру траекторий ступенчатого марковского процесса и их построение по инфинитезимальным характеристикам рассматривал Дж. Дуб (см. [2] и там же ссылки на более ранние работы других авторов). Марковские процессы со счетным числом состояний очень подробно исследованы К. Л. Чжуном (сводку результатов см. в [3]). Е. Б. Дынкиным [4] вычислены инфинитезимальные операторы однородных ступенчатых марковских процессов и даны общие критерии ступенчатости. Обобщение результатов Дж. Дуба для абстрактного фазового пространства приведено И. И. Гихманом и А. В. Скороходом в [5].

Пусть $P(t,\ x,\ \Gamma)$ — переходная функция процесса X. Далее мы всюду, где это особо не оговаривается, будем считать выполненными следующие предположения.

I. При $t \downarrow 0$

$$\frac{P(t,x,\Gamma)-\chi_\Gamma(x)}{t} \to q(x,\ \Gamma)$$

равномерно по $(x,\ \Gamma)$, $x \in E$, $\Gamma \in \mathscr{B}$; $\chi_\Gamma(x)$ — характеристическая функция множества Γ.

II. $|q(x,\Gamma)| \leqslant K$ для всех $x \in E$ и $\Gamma \in \mathscr{B}$, где K — некоторая константа.

III. Функция $T_t f(x)=\int\limits_E f(y)\ P(t,\ x,\ dy)$ непрерывна по x для любого $t>0$ и любой финитной непрерывной функции $f(x)$.

*) Мы пользуемся терминологией и обозначениями монографии [1]

Заметим, что условия I и II обеспечивают ступенчатость марковского процесса с переходной функцией $P(t, x, \Gamma)$ (см. [5]).

Обозначим

$$q(x) = -q(x, \{x\}) = q(x, E \setminus \{x\})$$

и

$$\Pi(x, \Gamma) = \begin{cases} \dfrac{q(x, \Gamma \setminus \{x\})}{q(x)} & \text{при } q(x) \neq 0, \\ \chi_\Gamma(x) & \text{при } q(x) = 0. \end{cases}$$

Легко проверить, что $\Pi(x, \Gamma)$ является вероятностной мерой на $\mathscr{B}$.

Основным результатом настоящей работы является теорема 1, где устанавливается, что классы эксцессивных функций для процесса X и для марковского процесса с дискретным временем и переходной функцией за один шаг $\Pi(x, \Gamma)$ совпадают. В § 2, используя этот результат и результаты работ [6—8], задачи об оптимальной остановке и оптимальном управлении ступенчатых марковских процессов сводятся к соответствующим задачам для марковских процессов с дискретным временем. Последние же вопросы в настоящее время довольно широко исследованы (см., например, работы [6], [7], [9—14]).

§ 1. Об эксцессивных функциях ступенчатых марковских процессов

1. Сначала установим несколько общих свойств процесса X.

Лемма 1. *Если выполнены предположения* I — II *и функции* $q(x)$ *и* $Tf(x) = \int_E f(y)\Pi(x, dy)$ *непрерывны, где* $f(x)$ — *любая ограниченная непрерывная функция, то процесс* X *является феллеровским.*

Доказательство. Пусть $f(x)$ — любая непрерывная ограниченная функция. Тогда в силу теоремы 3 гл. VII в [5] и [4] функция $T_t f(x)$ является единственным решением среди всех ограниченных измеримых функций задачи

$$\frac{dT_t f(x)}{dt} = \tilde{A} T_t f(x), \quad T_0 f(x) = f(x), \tag{2}$$

где $\tilde{A}$ — слабый инфинитезимальный оператор процесса X. Из предположений I и II и результатов работы [4] легко следует, что область определения $D_{\tilde{A}}$ оператора $\tilde{A}$ совпадает с пространством всех измеримых функций и $\tilde{A}f(x) = -q(x)f(x) + q(x)\int_E f(y)\Pi(x, dy)$. Тогда из (2) получаем, что

$$T_t f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^r}{r!} \tilde{A}^r f(x), \tag{3}$$

где $\tilde{A}^r$ — r-я степень оператора $\tilde{A}$, $\tilde{A}^0$ — единичный оператор.

В силу предположений леммы, если функция $f(x)$ непрерывна и $\sup_{x \in E} |f(x)| \leqslant C$, то $\tilde{A}f(x)$ также непрерывна и $\sup_{x \in E} |\tilde{A}f(x)| \leqslant 2KC$. Отсюда следует, что все функции $\tilde{A}^r f(x)$ непрерывны и $\sup_{x \in E} |\tilde{A}^r f(x)| \leqslant (2K)^r C$. Значит, ряд (3) при любом $t > 0$ равномерно сходится и $T_t f(x)$ является непрерывной функцией по x. Феллеровость процесса X доказана.

Следствие 1. *При предположениях* I *и* II *непрерывность функций* $q(x)$ *и* $Tf(x)$ *для любой непрерывной ограниченной функции* $f(x)$ *обеспечивает выполнение предположения* III.

Лемма 2. *Процесс* X *является стандартным.*

Действительно, процесс X задан на полукомпакте $(E, \mathscr{B})$, является непрерывным справа, строго марковским (см. [15]) и нормальным (в силу предположения I). Квазинепрерывность слева процесса X следует из предположения I и теоремы 3.13 в [1]. Наконец, условие 3.9. А из [1] без ограничения общности можно считать выполненным в силу предположения III и теоремы 3.3 в [1].

Лемма 3. *Естественная топология, связанная с процессом* X, *дискретна.*

В самом деле, если обозначить $\tau(x)$ — момент первого выхода процесса X из точки $x \in E$, то (см. [4], [5])

$$\mathbf{P}_x\{\tau(x) > t\} = e^{-tq(x)}$$

и

$$\mathbf{P}_x\{\tau(x) > 0\} = 1.$$

Значит, любое подмножество пространства E открыто в естественной топологии, связанной с процессом X.

2. Перейдем к исследованию свойств эксцессивных функций относительно ступенчатого марковского процесса X.

Поскольку естественная топология, связанная с процессом X, дискретна, то измеримая функция $f(x)$, определенная на $(E, \mathscr{B})$ со значениями в $[0, \infty]$ является эксцессивной относительно процесса X, если $T_t f(x) \leqslant f(x)$ для всех $t \geqslant 0$ и $x \in E$.

Измеримую функцию $f(x)$, определенную на $(E, \mathscr{B})$, со значениями в $[0, \infty]$ называют эксцессивной относительно марковского процесса с дискретным временем и переходной функцией за один шаг $P(x, \Gamma)$, если $\int_E f(y) P(x, dy) \leqslant f(x)$ для всех $x \in E$.

Обозначим через $\tau_1(\omega), \tau_2(\omega), \ldots$ моменты скачков траектории $x_t(\omega)$ процесса X. Пусть $\xi_k(\omega) = x_{\tau_k(\omega)}(\omega)$. В силу теоремы 1 § 7 гл. VII в [5] последовательность $\{\xi_k\}$ образует однородный марковский процесс с дискретным временем и переходной функцией за один шаг $\Pi(x, \Gamma)$.

Теорема 1. *Классы эксцессивных функций для процессов* X *и* $\{\xi_k\}$ *совпадают.*

Доказательство. α) Пусть $f(x)$ — эксцессивная функция для процесса X. Предположим сначала, что она ограничена. Тогда $f(x) \in D_{\tilde{A}}$ и из неравенства $T_t f(x) \leqslant f(x)$ следует, что $\tilde{A} f(x) \leqslant 0$. Это эквивалентно неравенству $Tf(x) \leqslant f(x)$. Значит, $f(x)$ — эксцессивна для процесса $\{\xi_k\}$. Для любой неограниченной эксцессивной функции $f(x)$ для процесса X в силу леммы 12. 1 в [1] можно найти неубывающую последовательность ограниченных эксцессивных функций $f_n(x)$ для процесса X таких, что $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Поскольку для каждого $nTf_n(x) \leqslant f_n(x)$, $x \in E$, то, переходя к пределу при $n \to \infty$, получим, что $Tf(x) \leqslant f(x)$, $x \in E$, т. е. что $f(x)$ является эксцессивной функцией для процесса $\{\xi_k\}$.

β) Пусть теперь $f(x)$ – эксцессивная функция для процесса $\{\xi_k\}$. Тогда известно [6], что для любого марковского момента $\varkappa$ относительно процесса $\{\xi_k\}$

$$\mathbf{M}_x f(\xi_\varkappa) \leqslant f(x). \tag{4}$$

Пусть Γ – произвольное компактное множество пространства E и τ_Γ – момент первого достижения этого множества процессом X. Через $\varkappa_\Gamma$ обозначим момент первого достижения Γ процессом $\{\xi_k\}$. Очевидно, что $\varkappa_\Gamma$ является марковским моментом для процесса $\{\xi_k\}$ и что $x_{\tau_\Gamma}(\omega) = \xi_{\varkappa_\Gamma}(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega$. Тогда из неравенства (4) получаем, что

$$\mathbf{M}_x f(x_{\tau_\Gamma}) = \mathbf{M}_x f(\xi_{\varkappa_\Gamma}) \leqslant f(x). \tag{5}$$

В силу леммы 2 и теоремы 12.4 в [1] из (5) следует, что $f(x)$ – эксцессивная функция для процесса X. Теорема 1 доказана.

§ 2. Об оптимальных правилах остановки ступенчатых марковских процессов

1. Задача об оптимальной остановке марковского процесса $X = (x_t, \cdot \infty\ M_t, \mathbf{P}_x)$, заданного на полукомпакте $(E, \mathscr{B})$ с дискретным или непрерывным временем формулируется следующим образом (см., например, [6], [7]). Пусть $g(x)$ – неотрицательная измеримая функция, заданная на $(E, \mathscr{B})$ и $\mathfrak{M}$ – класс марковских моментов, т.е. совокупность неотрицательных (в случае дискретного времени – неотрицательных целочисленных) случайных величин τ таких, что при любом $\cdot t$ $\{\omega : \tau(\omega) > t\} \in M_t$. Говорят, что марковский момент τ задает правило остановки процесса X. Положим

$$s(x) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}} \mathbf{M}_x g(x_\tau).$$

Марковский момент τ_ε называется ε-оптимальным, если для всех $x \in E$

$$\mathbf{M}_x g(x_{\tau_\varepsilon}) \geqslant s(x) - \varepsilon.$$

Возникают задачи, как находить функцию $s(x)$, называемую ценой, ε-оптимальные и оптимальные (т. е. 0-оптимальные) правила остановки (если они вообще существуют) процесса X.

В работе [6] (см. также [7]) доказано, что как в случае дискретного времени так и в случае непрерывного времени (в предположении, что X – стандартный марковский процесс), цена $s(x)$ является наименьшей эксцессивной мажорантой функции $g(x)$, т. е. $s(x) \geqslant g(x)$ и $s(x) \leqslant f(x)$, где $f(x)$ – любая эксцессивная функция относительно процесса X такая, что $f(x) \geqslant g(x)$. В этих же работах обсуждаются условия, когда ε-оптимальный момент остановки ($\varepsilon \geqslant 0$) определяется как первый момент попадания процесса X в множество $\{x : g(x) \geqslant s(x) - \varepsilon\}$.

Из теоремы 1 и результатов работ [6], [7] непосредственно вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. *Задачи оптимальной остановки ступенчатого марковского процесса X и марковского процесса $\{\xi_k\}$ эквиваленты в том смысле, что цены совпадают и если ε – оптимальный момент остановки ($\varepsilon \geqslant 0$) существует и определяется как первый момент попадания в некоторое множество $\Gamma_\varepsilon \in \mathscr{B}$, то это верно одновременно для обоих процессов.*

Замечание. По лемме 1 в [7] цена $s(x)$ удовлетворяет уравнению

$$s(x)=\max\{g(x),\ Ts(x)\}. \tag{6}$$

Но, поскольку (см. [4]) $\mathbf{P}_x\{\xi_1\in\Gamma\}=\Pi(x,\ \Gamma)=\mathbf{P}_x\{X_{\tau(x)}\in\Gamma\}$ и $Tf(x)=T_{\tau(x)}f(x)$, то уравнение (6) можно записать в виде

$$s(x)=\max\{g(x),\ T_{\tau(x)}s(x)\}.$$

Последнее уравнение является аналогом уравнения

$$s(x)=\max\{g(x),\ T_{\tau(U)}s(x)\},$$

где U – достаточно малая окрестность точки x, а $\tau(U)$ – момент первого выхода процесса X из U, доказанного в [7] для непрерывных марковских процессов.

2. Пусть $X^d=(x_t^d,\ \infty,\ M_t^d,\ \mathbf{P}_x^d)$ – набор однородных ступенчатых непрерывных справа марковских процессов с непрерывным временем $t\geqslant 0$ в полукомпакте $(E,\ \mathscr{B})$, заданных на пространстве элементарных событий $\Omega=\{\omega\}$; $d\in D=\{1,\ \ldots,\ m\}$, $m<\infty$. Предположим далее, что при каждом $d\in D$ выполнены предположения I – III. Соответствующие процессу X^d функции и операторы будем снабжать индексами d.

Следуя работе [8], с набором процессов X^d, $d\in D$, связываем класс $\hat{T}$– эксцессивных функций. Измеримую функцию $f(x)$, определенную на $(E,\ \mathscr{B})$, со значениями в $[0,\ \infty]$ называем $\hat{T}$ – эксцессивной, если $\max\limits_{d\in D} T_t^d f(x)\leqslant f(x)$ для всех $t\geqslant 0$, $x\in E$. Аналогично определяется класс $\hat{T}$ – эксцессивных функций относительно набора марковских процессов с дискретным временем и заданными переходными функциями за один шаг.

Поскольку класс $\hat{T}$ – эксцессивных функций относительно набора ступенчатых марковских процессов X^d, $d\in D$, является пересечением классов эксцессивных функций относительно каждого процесса X^d, то из теоремы 1 получаем такое утверждение.

Следствие 2. *Классы $\hat{T}$ – эксцессивных функций относительно набора ступенчатых марковских процессов X^d, $d\in D$, и относительно соответствующего набора марковских процессов $\{\xi_k^d\}$ с дискретным временем и с переходными функциями за один шаг $\Pi^d(x,\ \Gamma)$, $d\in D$, совпадают.*

Отсюда и из результатов работы [8] следует, что задачи оптимального управления (или последовательного планирования экспериментов) для ступенчатых марковских процессов X^d, $d\in D$, (формулировку задачи см. в [8]) и для марковских процессов $\{\xi_k^d\}$, $d\in D$, эквивалентны во всяком случае в смысле равенства цен. Случай дискретного времени при общих предположениях исследован в недавней работе Г. Хагстрема [13] (см. также [14]).

3. В заключение рассмотрим один простой пример. Пусть $E=\{0,\ 1,\ \ldots\}$ с дискретной топологией, X – процесс чистого размножения (см., например, [16]), т. е. такой, что

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{P(t,\ i,\ \{i\})-1}{t}=-\lambda_i,\quad \lim_{t\downarrow 0}\frac{P(t,\ i,\ \{i+1\})}{t}=\lambda_i$$

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{P(t,\ i,\ E\setminus\{i,\ i+1\})}{t}=0,\quad \lambda_i>0,\quad i\in E.$$

Известно [16], что необходимым и достаточным условием ступенчатости процесса X является расходимость ряда $\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i^{-1}$.

Соответствующий процесс $\{\xi_k\}$ в этом случае представляет собой детерминированное движение вправо по решетке неотрицательных целых чисел с единичным шагом. Неотрицательная функция $f(i)$, заданная на E, эксцессивна относительно процесса X тогда и только тогда, когда $f(i) \geqslant f(i+1)$, $i \in E$.

Пусть, задана неотрицательная ограниченная функция $g(i)$, $i \in E$. Тогда ценой $s(i)$ в задаче об обтимальной остановке процесса X будет наименьшая невозрастающая функция, мажорирующая функцию $g(i)$. Отсюда следует, что, если

$$\begin{cases} k'_0 = \min\{k : g(k) = \max\limits_{i \in E} g(i)\}, \\ k_0 = \max\{k : g(k) = g(k'_0)\}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ k'_n = \min\{k : g(k) = \max\limits_{i > k_{n-1}} g(i),\ k > k_{n-1}\}, \\ k_n = \max\{k : g(k) = g(k'_n)\}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

(для простоты полагаем, что все числа k_n и k'_n конечны), то

$$s(i) = \begin{cases} g(k_0), & 0 \leqslant i \leqslant k_0, \\ \dots\dots\dots \\ g(k_n), & k_{n-1} < i \leqslant k_n, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Отсюда видно, что, как следует и из (6),

$$s(i) = \max\{g(i),\ s(i+1)\},\quad i \in E.$$

Имеем

$$\Gamma_0 = \{i : s(i) = g(i)\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{i : g(i) = g(k_n),\ k'_n \leqslant i \leqslant k_n\}.$$

Пусть $i \in \delta\Gamma_0$, если $i \in \Gamma_0$, а $i+1 \,\overline{\in}\, \Gamma_0$. Тогда функция $s(i)$ удовлетворяет соотношениям:

$$\begin{cases} s(i) = g(i), & i \in \Gamma_0, \\ s(i+1) = s(i), & i \in E \setminus \delta\Gamma_0, \\ s(i+1) = \max\limits_{j<i} g(j), & i \in \delta\Gamma_0, \\ s(i) = \max\limits_{j \in E} g(j), & 0 \leqslant i_0 \leqslant k_0. \end{cases}$$

Из этих соотношений функция $s(i)$ и множество Γ_0 определяются однозначно. Таким образом для определения цены $s(i)$ и множества Γ_0 кроме уравнения (6) следует искать еще дополнительные условия. Оптимальный момент остановки процесса чистого размножения определяется как первый момент достижения множества Γ_0. Заметим еще, что в случае $\lambda_k \equiv \lambda$ процесс X является пуассоновским.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
30. IX. 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Б. Дынкин, Марковские процессы, Физматгиз, М., 1963.
2. Дж. Дуб, Вероятностные процессы, ИЛ, М., 1956.
3. К. Л. Чжун, Однородные цепи Маркова, Из-во «Мир», М., 1964.
4. Е. Б. Дынкин, Скачкообразные марковские процессы, Теория вероятн. и ее примен., III, 1 (1958), 41—60.
5. И. И. Гихман, А. В. Скороход, Введение в теорию случайных процессов, Из-во «Наука», М., 1965.
6. Е. Б. Дынкин, Оптимальный выбор момента остановки марковского процесса, ДАН СССР, 150, 2 (1963), 238—240.
7. Б. И. Григелионис, А. Н. Ширяев, О задаче Стефана и оптимальных правилах остановки марковских процессов, Теория вероятн. и ее прим., XI, 4 (1966).
8. Б. И. Григелионис, А. Н. Ширяев, Об управляемых марковских процессах и задаче Стефана, Проблемы передачи информации (1967) (в печати).
9. J. L. Snell, Applications of martingale system theorems, Trans. Amer. Math. Soc., 73 (1952), 293—312.
10. V. S. Chow, H. Robbins, On optimal stopping rules, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete, 2, 1(1963), 33/49.
11. А. Н. Ширяев, Последовательный анализ и управляемые случайные процессы (дискретное время), Кибернетика, 3 (1965), 1—24.
12. Н. В. Крылов, Об оптимальной остановке управляемой цепи, Сб. «Оптимальное управление и теория информации» (тезисы докладов на VII Всесоюзном совещании по теории вероятн. и математ. статист., Тбилиси, 1963, Из-во Института математики АН УССР, Киев, 1963, 11—15).
13. G. W. Haggstrom, Optimal stopping and experimental design, Ann. Math. Statist., 37, 1(1966), 7—29.
14. P. Whittle, Some general results in sequential design (with discussion), J. Roy. Statist, Soc., ser. B, 27, 3(1965), 371—394.
15. А. А. Юшкевич, О строго марковских процессах, Теория вероятн. и ее прим., II, 2 (1957), 187—213.
16. В. Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, Из-во «Мир», М., 1964.

APIE LAIPTUOTŲ MARKOVO PROCESŲ EKSCESYVINES FUNKCIJAS IR OPTIMALIAS SUSTABDYMO TAISYKLES

B. GRIGELIONIS

(Reziumė)

Darbe įrodoma, kad ekscesyvinių funkcijų, surištų su laiptuotu Markovo procesu, tenkinančiu I—III sąlygas, klasė sutampa su ekscesyvinių funkcijų, surištų su diskretinio laiko Markovo procesu su perėjimo funkcija (1), klase. Remiantis šiuo rezultatu, įrodomas tų procesų optimalaus sustabdymo uždavinių ekvivalentiškumas.

ON THE EXCESSIVE FUNCTIONS OF THE STEP MARKOV PROCESSES AND OPTIMAL STOPPING RULES

B. GRIGELIONIS

(Summary)

In the paper it is proved, that the class of the excessive functions related to the step Markov process fulfilling conditions I—III and the class of the excessive functions related to the discret time Markov process with a transition function (1) are equal. By means of this result it is proved, that optimal stopping problems of these processes are equivalent.