LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VII Nr. 1, 1967
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VII № 1, 1967

К ТЕОРИИ ИНВАРИАНТНЫХ АФФИННЫХ СВЯЗНОСТЕЙ НА ГРУППЕ ЛИ

Р. В. ВОСИЛЮС

В работе [2] в пространстве группы Ли $\mathfrak{A}$ с заданной оснащенной подгруппой g построено однопараметрическое семейство связностей, инвариантных относительно группы $\mathfrak{A}_{\text{пр}} \times g_{\text{л}}$, т. е. относительно всех правых сдвигов и относительно левых сдвигов, определяемых элементами подгруппы g и имеющих геодезическими траектории однопараметрических подгрупп группы $\mathfrak{A}_{\text{пр}} \times g_{\text{п}}$.

В этой заметке рассматривается более общая задача об отыскании для некоторых классов инвариантных аффинных связностей на группе Ли $\mathfrak{A}$ геодезических, являюшихся орбитами однопараметрических подгрупп полупрямого произведения G этой группы на некоторую группу ее автоморфизмов. Задача решается методом внешних форм Картана.

В пространстве r-мерной группы Ли $\tilde{\mathfrak{A}}^r$ можно найти r линейно независимых правоинвариантных линейных дифференциальных форм ω^I, удовлетворяющих структурным уравнениям Картана:

$$d\omega^I = \frac{1}{2} C^I_{KL} \omega^K \wedge \omega^L,$$

$$I, J, K, L, P = 1, 2, \ldots, r,$$

где C^I_{KL} – структурные константы этой группы:

$$C^I_{KL} = -C^I_{LK},$$

$$C^I_{K(J} C^I_{LP)} = 0. \tag{1}$$

Рассмотрим некоторое разбиение форм ω^I на две части

$$\omega^i, \ \omega^\lambda,$$

$$i, j, k, l, p = 1, 2, \ldots, r_1; \ \alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu = r_1 + 1, \ldots, r,$$

при котором система форм ω^i – вполне интегрируема. Тогда $C^i_{\lambda\mu} = 0$ и система уравнений

$$\omega^i = 0$$

определяет некоторую подгруппу $\tilde{g}$ группы $\tilde{\mathfrak{A}}$. Структурные уравнения группы $\tilde{\mathfrak{A}}$ теперь можно записать в следующем виде:

$$d\omega^i = C^i_{\lambda k} \omega^\lambda \wedge \omega^k + \frac{1}{2} C^i_{kl} \omega^k \wedge \omega^l,$$

$$d\omega^\lambda = \frac{1}{2} C^\lambda_{\mu\nu} \omega^\mu \wedge \omega^\nu + C^\lambda_{\mu k} \omega^\mu \wedge \omega^k + \frac{1}{2} C^\lambda_{kl} \omega^k \wedge \omega^l.$$

Рассмотрим некоторую группу автоморфизмов группы $\tilde{\mathfrak{A}}^r$. Ее инвариантные формы обозначим через Θ^τ, а структурные уравнения запишем в виде:

$$d\Theta^\tau = \frac{1}{2} C^\tau_{\sigma\rho} \Theta^\tau \wedge \Theta^\rho,$$

$$\tau, \sigma, \rho = 1, 2, \dots, n,$$

где $C^\tau_{\sigma\rho}$ удовлетворяют условиям, аналогичным (1). Тогда система форм Ω^i, Ω^λ, Θ^σ, удовлетворяющих структурным уравнениям

$$d\Omega^i = a^i_{\sigma k} \Theta^\sigma \wedge \Omega^k + C^i_{\lambda k} \Omega^\lambda \wedge \Omega^k + \frac{1}{2} C^i_{kl} \Omega^k \wedge \Omega^l,$$

$$d\Omega^\lambda = a^\lambda_{\sigma\mu} \Theta^\sigma \wedge \Omega^\mu + a^\lambda_{\sigma k} \Theta^\sigma \wedge \Omega^k + \frac{1}{2} C^\lambda_{\mu\nu} \Omega^\mu \wedge \Omega^\nu +$$

$$+ C^\lambda_{\mu k} \Omega^\mu \wedge \Omega^k + \frac{1}{2} C^\lambda_{kl} \Omega^k \wedge \Omega^l, \tag{2}$$

$$d\Theta^\tau = \frac{1}{2} C^\tau_{\sigma\rho} \Theta^\sigma \wedge \Theta^\rho,$$

составляет систему правоинвариантных форм группы G, являющейся полупрямым произведением этих групп. Так как группа автоморфизмов сохраняет структуру группы $\tilde{\mathfrak{A}}^r$, то она оставляет инвариантным ее структурный тензор. Поэтому

$$C^I_{KL} a^K_{\sigma P} + C^I_{PK} a^K_{\sigma L} - C^K_{PL} a^I_{\sigma K} = 0.$$

Формы

$$\omega^i_k = a^i_{\sigma k} \Theta^\sigma, \ \omega^i_\mu = 0, \ \omega^\lambda_k = a^\lambda_{\sigma k} \Theta^\sigma, \ \omega^\lambda_\mu = a^\lambda_{\sigma\mu} \Theta^\sigma$$

задают линейное представление группы автоморфизмов в алгебре Ли группы $\tilde{\mathfrak{A}}^r$. Условие $\omega^i_\mu = 0$ означает инвариантность алгебры Ли подгруппы $\tilde{g}$, а тем самым инвариантность относительно группы автоморфизмов вышеуказанного разбиения.

Уравнения

$$\Omega^i = \omega^i, \ \Omega^\lambda = \omega^\lambda, \ \Theta^\sigma = 0$$

определяют изоморфизм группы $\tilde{\mathfrak{A}}^r$ на некоторую подгруппу $\mathfrak{A}^r$ группы G, которую мы и будем рассматривать. Наконец константы C^I_{KL}, $C^\tau_{\rho\sigma}$, $a^I_{\sigma K}$ вместе взятые должны удовлетворять соотношениям вида (1).

На многообразии M^n с параметрами u^a и базисными формами $\omega^a(u^l, v^\varphi, du^c)$ аффинная связность без кручения может быть задана системой форм ω^a, $\omega^b_c(u^d, v^\varphi, du^d, dv^\varphi)$, удовлетворяющих уравнениям такого вида:

$$d\omega^a = \omega^b \wedge \omega^a_b,$$

$$d\omega^a_b = \omega^c_b \wedge \omega^a_c + \frac{1}{2} R^a_{bcd} \omega^c \wedge \omega^d.$$

Канонически параметризованные геодезические линии такой связности суть решения системы дифференциальных уравнений:

$$-dt \cdot d\left(\frac{\omega^a}{dt}\right) = \omega^b \omega^a_b.$$

Любая другая аффинная связность без кручения на многообразии M^n задается системой форм

$$\omega^a, \ \tau^a_b = \omega^a_b + t^a_{bc} \omega^c,$$

где $t^a_{bc} = t^a_{cb}$ — тензорное поле на многообразии [1].

Канонически параметризованные геодезические линии этой связности являются решениями следующей системы:

$$-dt\cdot d\left(\frac{\omega^a}{dt}\right)=\omega^b\,\omega^a_b+\frac{1}{2}t^a_{bc}\,\omega^b\,\omega^c.$$

Из уравнений (2) следует, что система форм $\Omega^I_K=\frac{1}{2}\,C^I_{KL}\Omega^L$, Ω^I, $\Theta^\sigma=0$ определяет некоторую аффинную связность на группе $\mathfrak{A}$. Эта правоинвариантная аффинная связность на группе $\mathfrak{A}$ называется связностью Картана данной группы [1]. Отсюда следует, что любую другую аффинную связность на группе Ли $\mathfrak{A}$ можно задать системой форм

$$\Omega^I,\ \tilde{\Omega}^I_K=\frac{1}{2}\,C^I_{KL}\Omega^L+\frac{1}{2}\tilde{\gamma}^I_{KL}\Omega^L,\ \Theta^\sigma=0.$$

Эта связность тоже правоинвариантна, если $\tilde{\gamma}^I_{KL}$ постоянные [1]. Обозначая через γ^I_{KL} компоненты рассматриваемой связности в репере Ω^I, Θ^σ группы G, геодезические линии ее зададим следующей системой дифференциальных уравнений:

$$-dt\cdot d\left(\frac{\Omega^I}{dt}\right)=\omega^I_K\Omega^K+\gamma^I_{KL}\,\Omega^K\,\Omega^L. \tag{3}$$

Компоненты инвариантного относительно правых сдвигов тензорного поля γ^I_{KL} на группе Ли $\mathfrak{A}$ под действием группы G будут преобразовываться по такому же закону, как компоненты соответствующего тензора в алгебре Ли группы $\mathfrak{A}$ при преобразованиях соответствующих автоморфизмов:

$$d\gamma^I_{KL}=\gamma^I_{KP}\,\omega^P_L+\gamma^I_{PL}\,\omega^P_K-\gamma^P_{KL}\,\omega^I_P. \tag{4}$$

Вместе с разбиением форм ω^I на две части, компоненты аффинной связности γ^I_{KL} соответственно разбиваются на группы:

$$\gamma^i_{kl},\ \gamma^i_{k\alpha},\ \gamma^i_{\alpha\beta}$$
$$\gamma^\lambda_{kl},\ \gamma^\lambda_{k\alpha},\ \gamma^\lambda_{\alpha\beta}.$$

Рассмотрим класс аффинных правоинвариантных связностей на группе Ли $\mathfrak{A}$, у которой не равны нулю лишь компоненты γ^λ_{kl} и $\gamma^\lambda_{k\alpha}$. Для этого класса связностей мы укажем некоторые условия на направляющий вектор геодезической a^I, достаточные для того, чтобы геодезическая, проходящая по этому направлению, являлась траекторией однопараметрической подгруппы группы G.

Уравнения (3) для рассматриваемой связности принимают следующий вид:

$$-d\cdot\left(\frac{\Omega^i}{dt}\right)=\omega^i_k\,\frac{\Omega^k}{dt},$$

$$-d\left(\frac{\Omega^\lambda}{dt}\right)=\omega^\lambda_K\,\frac{\Omega^K}{dt}+\frac{1}{2}\,\gamma^\lambda_{kl}\,\frac{\Omega^k}{dt}\,\Omega^l+\gamma^\lambda_{k\alpha}\,\frac{\Omega^k}{dt}\,\Omega^\alpha. \tag{5}$$

Канонически параметризованные однопараметрические подгруппы и их классы смежности на группе Ли G задаются следующей системой дифференциальных уравнений:

$$d\left(\frac{\Omega^I}{dt}\right)=0,$$

$$d\left(\frac{\Theta^\sigma}{dt}\right)=0. \tag{6}$$

Из уравнений (4) следует, что вдоль траектории однопараметрической подгруппы группы G

$$\frac{d\gamma^I_{KL}}{dt}=\gamma^I_{KP}\,a^P_{\sigma L}\,b^\sigma+\gamma^I_{PL}\,a^P_{\sigma K}\,b^\sigma-\gamma^P_{KL}\,a^I_{\sigma P}\,b^\sigma. \tag{7}$$

Допустим, что некоторая геодезическая, т.е. решение системы (5), является траекторией однопараметрической подгруппы группы G. Тогда она является решением и системы (6), и можно подобрать тикие величины a^I и b^σ, что

$$\Omega^I=a^I,\quad \Theta^\sigma=b^\sigma.$$

Подставляя в систему (5) эти выражения получаем такие условия:

$$a^i_{\sigma k}\,b^\sigma\,a^k=0,$$

$$a^\lambda_{\sigma K}\,b^\sigma\,a^K+\frac{1}{2}\,\gamma^\lambda_{kl}\,a^k\,a^l+\gamma^\lambda_{k\alpha}\,a^k\,a^\alpha=0,$$

которые должны выполняться тождественно вдоль траектории однопараметрической подгруппы.

Произведем следующую группировку членов второй строки этих уравнений:

$$A^\lambda_\alpha=a^\lambda_{\sigma\alpha}\,b^\sigma+\gamma^\lambda_{k\alpha}\,a^k,$$

$$B^\lambda=a^\lambda_{\sigma k}\,b^\sigma\,a^k+\frac{1}{2}\,\gamma^\lambda_{kl}\,a^k\,a^l.$$

Воспользовавшись уравнениями (7), мы получаем вдоль траектории однопараметрической подгруппы следующую систему дифференциальных уравнений для этих величин:

$$\frac{dA^\lambda_\alpha}{dt}=a^\beta_{\sigma\alpha}\,b^\sigma\,A^\lambda_\beta-a^\lambda_{\sigma\beta}\,b^\sigma\,A^\beta_\alpha,$$

$$\frac{dB^\lambda}{dt}=a^\gamma_{\sigma k}\,b^\sigma\,a^k\,A^\lambda_\gamma-a^\lambda_{\sigma\beta}\,b^\sigma\,B^\beta.$$

Ввиду однородности полученной системы $A^\lambda_\alpha\equiv 0$ и $B^\lambda\equiv 0$ вдоль траектории однопараметрической подгруппы группы G, если в начальной точке направляющий вектор геодезической удовлетворяет условиям $A^\lambda_\alpha=0$, $B^\lambda=0$. Таким образом мы получаем следующий результат:

Теорема 1. *Если у правоинвариантной аффинной связности на группе Ли* $\mathfrak{A}$ *не равны нулю лишь компоненты* γ^λ_{kl} *и* $\gamma^\lambda_{k\alpha}$, *то геодезическая, проходящая по направлению, задаваемому вектором* a^I, *для которого можно подобрать такие величины* $b^\sigma=b^\sigma(a^I)$, *чтобы в начальной точке выполнялись условия*

$$a^\lambda_{\sigma\alpha}\,b^\sigma+\gamma^\lambda_{\alpha k}\,a^k=0,\quad a^i_{\sigma k}\,b^\sigma\,a^k=0,$$

$$a^\lambda_{\sigma k}\,b^\sigma\,a^k+\frac{1}{2}\,\gamma^\lambda_{kl}\,a^k\,a^l=0,$$

является траекторией однопараметрической подгруппы группы G.

Теперь рассмотрим класс связностей, у которых равны нулю все компоненты, кроме $\gamma^i_{k\alpha}$. Уравнения геодезических в этом случае принимают такой вид:

$$-d\left(\frac{\Omega^i}{dt}\right)=\omega^i_k\,\frac{\Omega^k}{dt}+\gamma^i_{k\alpha}\,\frac{\Omega^k}{dt}\,\Omega^\alpha,$$

$$-d\left(\frac{\Omega^\lambda}{dt}\right)=\omega^\lambda_K\,\frac{\Omega^K}{dt}.$$

Если некоторая геодезическая такой связности является траекторией однопараметрической подгруппы группы G, то рассуждения, аналогичные предыдущим, приводят к тому, что вдоль этой подгруппы должны выполняться следующие условия:

$$\begin{aligned} a^i_{\sigma k} b^\sigma a^k + \gamma^i_{k\lambda} a^k a^\lambda &= 0, \\ a^\lambda_{\sigma K} b^\sigma a^K &= 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Дифференцированием вдоль однопараметрической подгруппы выражения

$$C^i_k = a^i_{\sigma k} b^\sigma + \gamma^i_{k\lambda} a^\lambda,$$

получаем

$$\frac{dC^i_k}{dt} = a^l_{\sigma k} b^\sigma C^i_l - a^i_{\sigma l} b^\sigma C^l_k + \gamma^i_{k\mu} a^\mu_{\sigma\lambda} b^\sigma a^\lambda. \tag{9}$$

Если $a^\mu_{\sigma\lambda} b^\sigma a^\lambda = 0$ в начальной точке, то $a^\mu_{\sigma\lambda} b^\sigma a^\lambda \equiv 0$ и вдоль траектории однопараметрической подгруппы. Но тогда система (9) становится однородной относительно величин C^i_k и уравнения (8) выполняются тождественно вдоль однопараметрической подгруппы.

Мы получаем следующий результат:

Теорема 2. Если у правоинвариантной аффинной связности на группе Ли $\mathfrak{A}$ не равны нулю лишь компоненты $\gamma^i_{k\alpha}$, то геодезическая, проходящая по направлению вектора a^I является траекторией однопараметрической подгруппы группы G, если можно подобрать такие величины b^σ, чтобы в начальной точке выполнялись условия:

$$\begin{aligned} a^i_{\sigma k} b^\sigma + \gamma^i_{k\lambda} a^\lambda &= 0, \\ a^\lambda_{\sigma k} b^\sigma a^k &= 0, \\ a^\lambda_{\sigma\beta} b^\sigma a^\beta &= 0. \end{aligned} \tag{10}$$

В том случае, когда подгруппа g группы $\mathfrak{A}$ является оснащенной и за группу G берется группа $\mathfrak{A}_{\text{пр}} \times g_{\text{л}}$, этот класс связностей содержит указанное в начале однопараметрическое семейство инвариантных аффинных связностей. В этом случае уравнениям (10) можно удовлетворить при любом выборе вектора a^I.

Сейчас укажем пример группы, на которой связность с неравными нулю только компонентами γ^λ_{kl} и $\gamma^\lambda_{k\alpha}$ имеет геодезические, которые все являются траекториями однопараметрических подгрупп группы G. Это n-мерное векторное пространство, которое является коммутативной группой относительно операции сложения векторов. Автоморфизм этой группы — любое невырожденное линейное однородное преобразование пространства. За группу G возьмем все линейные неоднородные невырожденные преобразования. В подвижном репере пространства $\{\vec{M}, \vec{l}_i\}$ преобразования группы G можно задавать следующими формулами:

$$d\vec{M} = \omega^I \vec{l}_I,$$

$$d\vec{l}_I = \omega^K_I \vec{l}_K,$$

где формы ω^I и ω^I_K удовлетворяют уравнениям Картана

$$d\omega^I = \omega^K \wedge \omega^I_K, \quad d\omega^I_K = \omega^L_K \wedge \omega^I_L.$$

Возьмем некоторое разбиение форм ω^I на части ω^i и ω^λ и как это делалось выше, соответствующее разбиение компонент аффинной связности, инвариантной относительно группы сдвигов. Поступая как и раньше, мы получаем, что геодезическая связности, у которой не равны нулю лишь компоненты γ^{λ}_{kl} и $\gamma^{\lambda}_{k\alpha}$ является траекторией однопараметрической подгруппы группы G, если вдоль этой подгруппы выполнены следующие условия:

$$a^{i}_{k}\, a^{k}=0,$$

$$a^{\lambda}_{K} a^{K}+\frac{1}{2}\,\gamma^{\lambda}_{kl} a^{k} a^{l}+\gamma^{\lambda}_{k\alpha} a^{k} a^{\alpha}=0.$$

Ввиду произвольности величин a^{I}_{K}, для любого вектора a^{I}, их можно подобрать таким образом, чтобы в начальной точке выражения

$$\tilde{A}^{\lambda}_{\alpha}=a^{\lambda}_{\alpha}+\gamma^{\lambda}_{\alpha k} a^{k},$$

$$\tilde{B}^{\lambda}=a^{\lambda}_{k} a^{k}+\frac{1}{2}\,\gamma^{\lambda}_{kl} a^{k} a^{l}$$

обратились в нуль. Тогда наше утверждение будет следовать из теоремы 1.

Теорема 3. Все геодезические инвариантной относительно сдвигоз аффинной связности в линейном пространстве с неравными нулю только компонентами γ^{λ}_{kl} и $\gamma^{\lambda}_{k\alpha}$ являются траекториями однопараметрических подгрупп группы всех линейных неоднородных невырожденных преобразований этого пространства, оставляющих подгрупу $\omega^{i}=0$.

Вильнюсский Государственный
педагогический институт

Поступило в редакцию
22.IX.1966

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Васильев, Об одном классе аффинных связностей в однородных пространствах, Известия высших учебных заведений, Математика, 1959, № (9).
2. А. М. Васильев, Аффинные связности в однородных пространствах, Труды 4-того Всесоюзного математического съезда, том. 2.

INVARIANTINIŲ AFININIŲ SĄRYŠIŲ LI GRUPĖJE TEORIJOS KLAUSIMU

R. VOSYLIUS

(Reziumė)

Straipsnyje nagrinėjamos dvi invariantinių afininių ryšių Li grupėje $\mathfrak{a}$ klasės. Nurodomos pakankamos sąlygos, kad geodezinė linija būtų duotos Li grupės automorfizmų ir kairinių poslinkių grupių pusiau tiesioginės sandaugos vienparametrinio pogrupio trajektorija.

ZUR FRAGE VON DER THEORIE DER INVARIANTEN AFFINEN ZUSAMMENHÄNGE IN DER LI GRUPPE

R. VOSYLIUS

(Zusammenfassung)

In der Arbeit werden zwei — Klassen der invarianten affinen Zusammenhänge auf der Liescher Gruppe $\mathfrak{a}$ untersucht. Es werden hinreichende Bedingungen gegeben, um geodätische Kurve. Eine Trajektorie der einparametrischen Untergruppe von des halbdirekten Produktes der Automorphismen gruppe der Lieschen Gruppe und einer Gruppe ihren linken Verschiebungen wäre.