LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VII Nr. 1, 1967
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VII № 1, 1967

# О $k$- и $c$-РЕФЛЕКСИВНОСТИ ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВ

Б. С. БРУДОВСКИЙ

Отделимое локально выпуклое пространство $(E,\ t)$ будем называть *$k$- рефлексивным*, если $(E,\ t)=((E',\ t_k)',\ t'_k)$, где $t_k$ и $t'_k$ — топологии равномерной сходимости на бикомпактных множествах соответственно из $(E, t)$ и $(E', t_k)$; аналогично, $(E,\ t)$ будем называть *$c$-рефлексивным*, если $(E,\ t)=((E',\ t_c)',\ t_c)$, где $t_c$ и $t'_c$ — топологии равномерной сходимости на абсолютно выпуклых*) бикомпактных множествах соответственно из $(E,\ t)$ и $(E',\ t_c)$. М. Ф. Смит показала [6], что всякое банаховское и всякое рефлексивное пространства $k$-рефлексивны В. настоящей заметке дается более широкий достаточный признак $k$-рефлексивности, из которого, в частности, следует, что каждое инфрабочечное**) пространство, в котором замкнутая абсолютно выпуклая оболочка всякого бикомпактного множества бикомпактна, $k$-рефлексивно. В § 2 изучается $c$-рефлексивность и дается полная внутренняя характеристика этого свойства. В заметке используется в основном терминология Бурбаки [1].

## § 1. $k$-рефлексивность

**1.1.** Д. А. Райков в статье [4] ввел полезное свойство относительной вполне ограниченности: пусть $E$ — векторное пространство и $A,\ B\subset E$, причем $B$ абсолютно выпукло; будем говорить, что $A$ вполне ограниченно относительно $B$, и писать $A\prec B$, если для каждого $\varepsilon>0$ существует конечное $F\subset A$ такое, что $A\subset F+\varepsilon B$. В этой же статье показано, что если $B$ — замкнутое абсолютно выпуклое множество в локально выпуклом пространстве $E$, то отношения $A\prec B$ и $B^{E'}\prec A^{E'}$***) равносильны (см. также [5]).

**1.2. Определение 1.** Пусть $\mathfrak{K}$ — множество всех бикомпактных подмножеств отделимого локально выпуклого пространства $(E,\ t)$. Бочка $T$ в $(E,\ t)$ будет называться *$k$-бочкой*, если каждое множество из $\mathfrak{K}$ вполне ограниченно относительно $T$. Пространство $(E,\ t)$ назовем *$k$-бочечным*, если каждая $k$-бочка является окрестностью нуля.

*) „Уравновешенных выпуклых" у Бурбаки [1].

**) Локально выпуклое пространство называется инфрабочечным, если в нем всякое замкнутое абсолютно выпуклое множество, поглощающее все ограниченные множества, есть окрестность нуля.

***) Под $M^{E'}$ поднимается „абсолютная поляра" множества $M\subset E$ в $E'$, т. е. совокупность всех $x'\in E'$, для которых $|\langle x,\ x'\rangle|\leqslant 1$, для всех $x$ из $M$, где $\langle x,\ x'\rangle$ — значение, принимаемое функционалом $x'\in E'$ на элементе $x\in E$. Если $M$ абсолютно выпукло, то $M^{E'}$ совпадает с полярой множества $M$ в смысле Бурбаки [1].

**Теорема 1.** *Если отделимое локально выпуклое пространство* $(E, t)$ *k-бочечно и в нем замкнутая выпуклая оболочка каждого бикомпактного множества бикомпактна, то* $(E, t)$ *k-рефлексивно.*

Доказательство. Так как, по условию, замкнутая выпуклая оболочка каждого бикомпактного множества бикомпактна, и, тем более, слабо бикомпактна, то по теореме Макки-Аренса ([1], гл. IV, § 2, теорема 2) $(E', t_k)' = E$. Если $V$ — замкнутая абсолютно выпуклая окрестность нуля в $(E, t)$, то $V^{E'}$ равностепенно непрерывно и, следовательно, бикомпактно в $(E', t_k)$ ([1], гл. III, § 3, предложение 5). Но тогда $V = V^{E'E}$ есть окрестность нуля в топологии $t'_k$, т. е. $t'_k \geqslant t$. Пусть теперь $B$ — бикомпактное множество в $(E', t_k)$, тогда $B$ слабо ограниченное множество в $E'$, а потому $B^E$ — бочка в $(E, t)$ ([1], гл. IV, § 2, следствие 3). Так как $B \prec K^{E'}$ для каждого $K \in \mathcal{K}$, то (см. 1.1) $K^{E'E} \prec B^E$ и, поскольку $K \subset K^{E'E}$, $K \prec B^E$ ([4], лемма 1), т. е. $B^E$ $k$-бочка в $(E, t)$. В силу $k$-бочечности пространства $(E, t)$, $B^E$ есть окрестность нуля в $(E, t)$, иными словами, $t \geqslant t'_k$. Таким образом, $((E', t_k)', t'_k) = (E, t)$.

**1.3.** *Каждое инфрабочечное пространство k-бочечно.* Действительно, допустим, что $k$-бочка $T$ в $(E, t)$ не поглощает ограниченного множества $A$. Тогда для каждого натурального числа $n$ существует $x_n \in A \setminus n^2 T$. Поскольку $A$ ограниченно, $\frac{x_n}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$, а потому множество $K = \left\{\frac{x_n}{n}, 0\right\}_{n \in N}$ бикомпактно. Так как $T$ — $k$-бочка, то существует конечное $F \subset K$ такое, что $K \subset F + T$. Поскольку $T$ — бочка, $\lambda F \subset T$ для некоторого $\lambda > 0$. Следовательно, $\lambda K \subset \lambda F + \lambda T \subset T + \lambda T = (1+\lambda) T$. Для $n > \frac{1+\lambda}{\lambda}$ тогда $\frac{1+\lambda}{\lambda} T \subset nT$ и, значит, $K \subset nT$. Но это невозможно, так как $\frac{x_n}{n} \notin nT$. Таким образом, каждая $k$-бочка поглощает все ограниченные множества и, в силу инфрабочечности $(E, t)$ является окрестностью нуля.

**1.4.** Из 1.3 и теоремы 1 следует, что *каждое инфрабочечное пространство, в котором замкнутая выпуклая оболочка всякого бикомпактного множества бикомпактна, k-рефлексивно.*

**1.5.** *Приведем пример k-бочечного, но не инфрабочечного пространства в котором замкнутая выпуклия оболочка каждого бикомпактного множества бикомпактна.* Пусть $(E, t)$ — рефлексивное бесконечномерное банаховское пространство и $(T_\alpha)$ — семейство всех $k$-бочек в $(E, \sigma(E, E'))$. Как легко видеть, оно образует фундаментальную систему окрестностей нуля для локально выпуклой топологии в $E$; обозначим ее $t_1$. Очевидно, $\sigma(E, E') \leqslant t_1$ и, так как каждая бочка $T_\alpha$ является окрестностью нуля в $(E, t)$, $t_1 \leqslant t$. Из построения топологии $t_1$ следует, что каждое $\sigma(E, E')$-бикомпактное множество вполне ограниченно и полно в $t_1$ ([1] гл. I, § 1, предложение 8). Таким образом каждое $\sigma(E, E')$-бикомпактное множество $t_1$ — бикомпактно Если теперь $T$ — $k$-бочка в $(E, t_1)$, то, поскольку $\sigma(E, E') \leqslant t_1 \leqslant t$, $T$ — бочка в $(E, \sigma(E, E'))$, а в силу совпадения запасов бикомпактных подмножеств в пространствах $(E, \sigma(E, E')$ и $(E, t_1)$, $T$ — $k$-бочка в $(E, \sigma(E, E'))$. Из этого следует, что $T \in (T_\alpha)$, т. е. $(E, t_1)$ $k$-бочечно. Замкнутый единичный шар $S$ в $E$ есть бочка в $(E, t_1)$, поглощающая все ограниченные множества. Однако, вследствие рефлексивности $E$, $S$ $\sigma(E, E')$-бикомпактно, следовательно, по доказанному, $t_1$-бикомпактно и, тем самым, не является окрестностью нуля в

$(E, t_1)$, поскольку $E$ бесконечномерно. Таким образом, $(E, t_1)$, не инфрабочечно. Остается заметить, что, как явствует из предшествующего, в $(E, t_1)$ замкнутая выпуклая оболочка всякого бикомпактного множества бикомпактна.

## § 2. $c$-рефлексивность

Пусть $\mathcal{K}_\sigma$ — множество всех абсолютно выпуклых слабо бикомпактных множеств в отделимом локально выпуклом пространстве $(E, t)$ и $D \subset \mathcal{K}_\sigma$, причем $D$ — фильтрующееся по возрастанию и $\bigcup\limits_{A \in D} A = E$. Гиперподпространство $H$ в $E$, имеющее замкнутое пересечение $H \cap B$ с каждым $B \in D$, будем называть $D$-гиперподпространством. Если $T$ — бочка в $(E, t)$, то топологию с фундаментальной системой окрестностей нуля $\left(\frac{1}{n} T\right)_{n \in N}$ обозначим $t_T$.

2.1. *Для того, чтобы замкнутое абсолютно выпуклое ограниченное множество $B$ в $(E', t_D)$ (где $t_D$ — топология в $E'$ равномерной сходимости на множествах из $D$) было полным, необходимо и достаточно, чтобы каждое $t_B{}^E$-замкнутое $D$-гиперподпространство $H$ в $E$ было $t$-замкнутым.* Действительно, пусть $H$ $t_B{}^E$-замкнутое $D$-гиперподпространство в $E$ и $f$ — линейная функция на $E$, имеющая ядром $H$. Как показал В. Птак ([3], см. также [1] гл. IV, § 2, упражнение 18а), тогда $f$ непрерывна на каждом множестве из $D$. По теореме Гротендика о пополнении ([2]) $f \in \widehat{(E', t_D)}$. Кроме того, $t_B{}^E$-замкнутость $H$ равносильна ограниченности $f$ на $B^E$, так что $\lambda f \in B^{EE^*}$*) для некоторого $\lambda > 0$. Заметим теперь, что $t_D$-пополнение $B$ совпадает с замыканием $B$ в $\widehat{(E', t_D)}$, которое, поскольку $B$ — абсолютно выпуклое множество, совпадает с $B^{E\widehat{(E', t_D)}}$. Таким образом, если $B$ полно в $(E', t_D)$, то $B^{E\widehat{(E', t_D)}} = B$, так что $\lambda f \in B$, т. е. гиперподпространство $H$ $t$-замкнуто. Обратно, пусть $g \in B^{E\widehat{(E', t_D)}}$. Как было показано $\mathfrak{G} = g^{-1}(0)$ есть $t_B{}^E$- замкнутое гиперподпространство в $E$. Так как $g \in \widehat{(E', t_D)}$, то ([2]) $g$ $t$-непрерывна на каждом множестве $A$ из $D$. Следовательно, $g^{-1}(0) \cap A = \mathfrak{G} \cap A$ $t$-замкнуто в $A$, а поскольку $A$ $t$-замкнуто в $E$, $\mathfrak{G} \cap A$ $t$-замкнуто в $E$, т. е. $\mathfrak{G}$ $D$-гиперподпространство в $E$. Поэтому, если каждое $t_{B^E}$-замкнутое $D$-гиперподпространство $t$-замкнуто, то $g$ непрерывно. Из этого следует, что $g \in B^{E\widehat{(E', t_D)}} \cap E' = B^{EE'} = B$. Тем самым, $B^{E\widehat{(E', t_D)}} = B$ и потому $B$ $t_D$ — полно.

2.2. **Определение 2.** Обозначим через $\mathcal{C}$ множество всех абсолютно выпуклых бикомпактных множеств в $(E, t)$. Бочку $T$ в $(E, t)$ назовем $\pi$-бочкой, если каждое множество из $\mathcal{C}$ вполне ограниченно относительно $T$ и каждое $t_T$-замкнутое гиперподпространство $t$-замкнуто. Пространство $(E, t)$ назовем $\pi$-бочечным, если каждая $\pi$-бочка является окрестностью нуля в $(E, t)$.

**Теорема 2.** *Для того, чтобы отделимое локально выпуклое пространство $(E, t)$ было $c$-рефлексивно, необходимо и достаточно, чтобы $(E, t)$ было $\pi$-бочечно.*

*) Под $E^*$ понимается совокупность всех линейных функций на $E$.

Доказательство. Прежде всего, топология $t_c$ в $E'$ согласуется с двойственностью между $E$ и $E'$, так что $(E', t_c)' = E$. Так же как в доказательстве теоремы 1 можно показать, что $t'_c \geqslant t$. Пусть $(E, t)$ $\pi$-бочечно и $B$ – бикомпактное абсолютно выпуклое множество в $(E'\ t_c)$. Покажем, что $B^E$ $\pi$-бочка в $(E, t)$. Из того, что $B$ вполне ограниченно в $(E', t_c)$, следует, что $B^E$-бочка в $(E, t)$ и $B \prec K^{E'}$ для каждого $K \in \mathcal{C}$, откуда (см. 1.1) $K^{E'E} = K \prec B^E$. Пусть $H$ $t_{B^E}$-замкнутое гиперподпространство в $E$. Если мы покажем, что $H$ есть $\mathcal{C}$-гиперподпространство в $(E, t)$, то по 2.1, так как $B$ – полное абсолютно выпуклое множество в $(E', t_c)$, $H$ будет $t$-замкнуто, т. е. $B^E$ будет $\pi$-бочкой в $(E, t)$. Обозначим через $t_0$ топологию в $E$, порождаемую фундаментальной системой $(T_a)_{\alpha \in A}$ замкнутых окрестностей нуля в $t$ и бочкой $B^E$, т. е. топологию с фундаментальной системой окрестностей нуля вида $\left(T_\alpha \cap \frac{1}{n} B^E\right)_{\alpha \in A, n \in N}$. Так как $K \prec B^E$ и $K \prec T_\alpha$ для всех $K \in C$ и $\alpha \in A$, то $K \prec T_\alpha \cap \frac{1}{n} B^E$ для всех $K \in \mathcal{C}$, $\alpha \in A$ и $n \in N$ (см. [5]). Таким образом всякое множество из $\mathcal{C}$ вполне ограниченно в $(E, t_0)$. Кроме того, $t_0$ имеет фундаментальную систему окрестностей нуля, замкнутых в $(E, t)$, и, очевидно, $t_0 \geqslant t$. По теореме Бурбаки ([1], гл. 1, § 1, предложение 8) каждое $t$-полное множество в $E$ $t_0$-полно. Тем самым каждое $K \in C$ бикомпактно в $(E, t_0)$. Так как, очевидно, $t_0 \geqslant t_{B^E}$, то $H$ $t_0$-замкнуто в $E$. Тогда $K \cap H$ для каждого $K \in \mathcal{C}$ $t_0$-замкнуто и потому $t_0$-бикомпактно. В виду того, что $t_0 \geqslant t$, $K \cap H$ $t$-бикомпактно и, следовательно, $t$-замкнуто. Таким образом, $B^E$ – $\pi$-бочка в $(E, t)$. В силу $\pi$-бочечности $(E, t)$, $B^E$ есть окрестность нуля в $(E, t)$, т. е. $t \geqslant t'_c$. Так как $t'_c \geqslant t$, тогда $t'_c = t$ и $((E', t_c)', t'_c) = (E, t)$.

Обратно, пусть $(E, t)$ $c$-рефлексивно и $T$ – $\pi$-бочка в $(E, t)$. Тогда каждое $t_T$-замкнутое гиперподпространство в $E$ $t$-замкнуто и, подавно, каждое $t_T$-замкнутое $\mathcal{C}$-гиперподпространство $t$-замкнуто. В силу 2.1 тогда $T^{E'}$ полно в $(E', t_c)$. Поскольку $T$ – $\pi$-бочка в $(E, t)$, $K \prec T$ и, следовательно, $T^{E'} \prec K^{E'}$ для каждого $K \in \mathcal{C}$, т. е. $T^{E'}$ вполне ограниченно в $(E', t_c)$. Из полноты и вполне ограниченности $T^{E'}$ вытекает бикомпактность $T^{E'}$ в $(E', t_c)$ Тем самым, $T^{E'E} = T$ есть окрестность нуля в $t'_c = t$, т. е. пространство $(E, t)$ $\pi$-бочечно.

2.3. Из теоремы 2 следует, что *если* $(E, t)$ $\pi$-бочечно, то $(E', t_c)$ *также* $\pi$-*бочечно*.

2.4. *Каждое инфрабочечное пространство* $\pi$-*бочечно*. Действительно, пусть $(E, t)$ – инфрабочечное пространство и $T$ – $\pi$-*бочка* в $(E, t)$. Как явствует из доказательства теоремы 2, $T^{E'}$-бикомпактное множество в $(E', t_c)$, а потому и в $(E', \sigma(E', E))$. В силу этого, $T^{E'E} = T$ есть окрестность нуля в топологии Макки $\tau(E', E)$ и, следовательно ([1], гл. IV, § 2, теорема 3), $T$ поглощает каждое ограниченное множество из $(E, t)$. Таким образом, $T$ является окрестностью нуля в $(E, t)$, т. е. $(E, t)$ $\pi$-бочечно.

2.5. В заключение приведем *пример* $\pi$-*бочечного пространства, не являющегося инфрабочечным*. Пусть $(E, t)$ нерефлексивное банаховское пространство и $S$ – единичный шар в $(E, t)$. Если $B$ замкнутое абсолютно выпуклое ограниченное множество в $(E', t_c)$, то $B^E$ – бочка в $(E, t)$, следовательно, $B^E$ поглощает $S$, а потому $S^{E'}$ поглощает $B^{EE'} = B$. Таким образом,

$S^{E'}$ бочка в $(E', t_c)$, поглощающая все ограниченные множества. Но $S^{E'}$ $\sigma(E', E)$-бикомпактно ([1], гл. IV, § 5, предложение 1), а потому $t_c$-бикомпактно ([1], гл. III, § 3, предложение 5). Так как $E'$ бесконечномерно, то $S^{E'}$ не является окрестностью нуля в $(E', t_c)$, т. е. $(E', t_c)$ не инфрабочечно*). Будучи банаховским, $(E, t)$-бочечно, а потому, по 2.4, $\pi$-бочечно. В силу 2.3 $(E', t_c)$ также $\pi$-бочечно.

*) Имеет место более общий факт: если $E$-нерефлексивное пространство Фреше, то $(E', t_c)$ не инфрабочечно (см. [1], гл. IV, § 3 упражнение 20)

Москва

Поступило в редакцию
12.V.1966

## ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Бурбаки, Топологические векторные пространства, Москва, ИЛ, 1959.
2. A. Grothendieck, Sur la complétion du dual d'un espace vectoriel localement convexe, C. R. Acad. Sci, 230 (1950), 605—606.
3. В. Птак, О полных топологических линейных пространствах, Чехослов. мат. журн., 3 (78) (1953), стр. 301—364.
4. Д. А. Райков, Вполне непрерывные спектры локально выпуклых пространств, Труды Моск. мат. общ., 7 (1957), стр. 413—438.
5. Д. А. Райков, Некоторые свойства вполне ограниченных линейных операторов, Уч. зап. МГПИ им. В. И. Ленина, 188 (1962), стр. 171—191.
6. M. F. Smith, The Pontrjagin duality theorem in linear spaces, Ann of Math. (2), 56:2 (1952), 248—253.

## APIE LOKALIAI IŠKILIŲ ERDVIŲ *k*- IR *c*-REFLEKSIVUMĄ

B. BRUDOVSKIS

*(Reziumė)*

Darbe nagrinėjami lokaliai iškilių erdvių kompaktiniai *(k-)* ir iškilūs kompaktiniai *(c-)* refleksivumai. Parodyta, kad infrastatininė erdvė yra *k*-refleksyvinė, jeigu joje bet kurios bikompaktinės aibės uždara iškili sritis bikompaktinė. Taip pat pateikiama lokaliai iškilių erdvių pilna vidinė *c*-refleksivumo charakteristika.

## THE *k*- AND *c*-REFLEXIVITY OF LOCALLY CONVEX VECTOR SPACES

B. BRUDOVSKI

*Summary*

In the paper are studied the compact *(k-)* and the convex compact *(c-)* reflexivities of locally convex spaces. In particular it is shown that a quasi-tonnelé space, in which the closed convex hull of every bicompact set is bicompact, is *k*-reflexive. A complete inner characteristic of the *c*-reflexivity of locally convex vector spaces is also given.