VI LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 4
1966

О БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЯХ ДЛЯ ПЛОТНОСТЕЙ

П. СУРВИЛА

1. Предварительные замечания и результаты

Рассматривается последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$, имеющих плотности распределения $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x), \ldots$, а также конечные дисперсии $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2, \ldots$ Не ограничивая общности можно считать, что математические ожидания этих случайных величин равны нулю.

Вводим следующие обозначения:

$$F_j(x)=P\{\xi_j<x\}, \quad j=1, 2, \ldots, \qquad B_n^2=\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2,$$

$$\bar{p}_n(x)=\frac{d}{dx} P\left\{\frac{1}{B_n} \sum_{j=1}^{n} \xi_j<x\right\},$$

$f_j(t)$, $M_j(z)$ – характеристическая функция и производящая функция моментов случайной величины ξ_j соответственно $(j=1, 2, \ldots)$, $\varphi(x)$ – плотность нормального закона распределения.

Локальные предельные теоремы для плотностей распределения нормированных сумм независимых случайных величин рассматривают поведение плотностей $\bar{p}_n(x)$ при $n\to\infty$. При $|x|\to\infty$ утверждения этих теорем становятся тривиальными, т. е. выражают лишь тот факт, что плотности $\bar{p}_n(x)$ стремятся к нулю при неограниченном возрастании n. Локальные предельные теоремы для больших уклонений оценивают поведение отношения $\frac{\bar{p}_n(x)}{\varphi(x)}$ при $n\to\infty$ и $|x|\to\infty$.

В настоящей заметке рассматриваются большие уклонения для плотностей $\bar{p}_n(x)$ в предположении $|x|=o(\sqrt{n})$. На случайные величины последовательности налагаются следующие условия.

Условие A. Существуют положительные числа L, l и A такие, что в круге $|z|<A$ имеют место неравенства

$$l\leqslant\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{zx}\, dF_j(x)\right|\leqslant L, \quad j=1, 2, \ldots$$

Условие C. Существует положительное число $C<\infty$ такое, что

$$\sup_x \left[e^{\frac{A}{2}|x|} p_j(x)\right]\leqslant C, \quad j=1, 2, \ldots$$

Доказывается

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* **A** *и* **C**. *Тогда для всех* $n \geqslant 2$ *существуют плотности* $\bar{p}_n(x)$, *и если* x *действительное число, зависящее от* n *такое, что* $|x| > 1$ *и* $|x| = o(\sqrt{n})$ *при* $n \to \infty$, *то*

$$\frac{\bar{p}_n(x)}{\varphi(x)} = \exp\left\{ \frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) \right\} \left[1 + O\left(\frac{|x|}{\sqrt{n}}\right) \right],$$

где $\lambda_n(t)$ *степенной ряд, сходящийся при достаточно малых значениях* $|t|$ *равномерно по* n.

Большие уклонения такого типа рассматривались также в работах [1] и [2]. В работе В. Рихтера [1] кроме условия **A** требовалось выполнение следующих условий:

а) при всех n

$$\frac{B_n^2}{n} \geqslant \delta > 0,$$

б) в последовательности случайных слагаемых $\{\xi_j\}$, $j = 1, 2, \ldots$, требовалось существование подпоследовательности $\{\xi_{j_k}\}$ такой, чтобы

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{(v+it)x} \, dF_j(x) \right| \leqslant \frac{N}{|t|^{\beta}} \qquad (N < \infty)$$

для всех j_k, $|t| \geqslant T$ $(T > 0)$, $|v| < A$ (A — из условия **A**) и $\beta > 0$, причем не слишком редкой в том смысле, что

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^*}{B_n^{\gamma}} > 0$$

для некоторого $\gamma > 0$ (n^* — число членов подпоследовательности в последовательности $\xi_1, \ldots, \xi_n$).

В работе В. В. Петрова [2] условие б) заменялось следующим:

в) при $-\frac{A}{2} \leqslant h \leqslant \frac{A}{2}$ и любом $\varepsilon > 0$

$$\left[\prod_{j=1}^{n} M_j(h) \right]^{-1} \int_{|t| > \varepsilon} \prod_{j=1}^{n} |M_j(h + it)| \, dt = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \to \infty),$$

где постоянная в символе $O\left(\frac{1}{n}\right)$ может быть выбрана не зависящая от $h \in \left[-\frac{A}{2}, \frac{A}{2} \right]$ (A — из условия **A**).

Как видно из сформулированной теоремы, эти условия здесь заменяются условием **C**, которое хотя, по-видимому, и не является более общим, но, по нашему мнению, является более наглядным и простым, так как оно касается только порядка убывания плотностей $p_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots$, при $|x| \to \infty$. Из условия **C** следует условие а) (это будет доказано ниже), а также и условие в), которое является более общим, но условие б), по-видимому, не следует (при условии **C** соответствующие интегралы из условия б) стремятся к нулю, но нам не удалось установить скорости этого стремления).

Надо отметить, что из теоремы первой при существовании плотности слагаемых следует теорема вторая работы [1], касающаяся случая одинаково распределенных слагаемых.

Как теорема первая, так и другие утверждения настоящей заметки доказываются методом перевала, применявшимся и в работе [1].

Замечания. Будем считать, что условие **A** выполняется.

1. Условие **C** выполняется, если случайные величины последовательности распределены одинаково и имеют ограниченную плотность (см., напр., [1]).

2. Утверждение теоремы первой остается в силе, если условие **C** заменить следующим:

для случайных величин ξ_j существуют натуральные числа $m_j \leqslant m < \infty$ такие, что при свертывании функций распределения $F_j(x)$ с собой m_j раз получаются функции распределения, имеющие плотности $p^{(m)}(x)$ такие, что

$$\sup_x \left[e^{\frac{A}{2}|x|} p_j^{(m)}(x) \right] \leqslant C_1 < \infty, \quad j = 1, 2, \ldots$$

Только в этом случае плотности $\bar{p}_n(x)$ будут существовать при $n \geqslant 2m$.

3. Если предположить выполненным и условие а), то будут верны следующие утверждения:

Если в последовательности $\{\xi_j\}$, $j = 1, 2, \ldots$, существует подпоследовательность $\{\xi_{j_k}\}$ не слишком редкая в том смысле, что

$$\frac{\ln n}{n^*} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

где n^* — число членов подпоследовательности среди $\xi_1, \ldots, \xi_n$, и удовлетворяющая условно **C**, то утверждение теоремы тоже остается в силе.

Очевидно также, что требование равномерного ограничения функций $e^{\frac{A}{2}|x|} p_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ в условии **C** можно заменить требованием:

$$\sup_x \left[e^{\frac{A}{2}|x|} p_j(x) \right] = \bar{C}_j < \infty, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

$$\ln n \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\bar{C}_j^2} \right]^{-1} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Условие **C** можно ослабить и следующим образом:

Условие C_1. Для последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots$ существует последовательность натуральных чисел $m_1, m_2, \ldots$ такая, что для некоторого конечного натурального m из нее можно выбрать r $(r = 2^s \geqslant 2m)$ чисел $m_{i_1}, m_{i_2}, \ldots, m_{i_r}$ таких, что $m_{i_k} \leqslant m$, $k = 1, 2, \ldots, r$. Кроме того, при свертывании функций распределения $F_j(x)$ с собой m_j раз получаются функции распределения, имеющие плотности $p_j^{(m)}(x)$ такие, что

$$\sup_x \left[e^{\frac{A}{2}|x|} p_j^{(m)}(x) \right] = C_j < \infty, \quad j = 1, 2, \ldots$$

и

$$(\ln n) \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{l^{2m_j}}{m_j^2 C_j^2} \right]^{-1} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Верна следующая

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* **A**, а) *и* $\mathbf{C}_1$. *Тогда для всех* $n \geqslant i_r$ (i_r — *из условия* $\mathbf{C}_1$) *существуют плотности* $\bar{p}_n(x)$, *и если* x *действительное число, зависящее от* n *и такое, что* $|x| > 1$, $|x| = o(\sqrt{n})$ *при* $n \to \infty$, *то*

$$\frac{\bar{p}_n(x)}{\varphi(x)} = \exp\left\{\frac{x^3}{\sqrt{n}}\lambda_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right\}\left[1 + O\left(\frac{|x|}{\sqrt{n}}\right)\right].$$

Здесь $\lambda_n(t)$ — *ряд из теоремы первой.*

В обоих теоремах можно отказаться от ограничения $|x| > 1$, но тогда в остаточном члене будет стоять выражение $1 + O\left(\frac{|x|+1}{\sqrt{n}}\right)$ (см., напр., [2]).

2. Доказательство теоремы первой

Теорему докажем при $x > 0$. При $x < 0$ доказательство аналогично.

Согласно условию **A**, производящие функции моментов случайных величин ξ_j

$$M_j(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{zx}\, dF_j(x) \tag{1}$$

являются аналитическими функциями в полосе $|\mathrm{Re}\, z| < A$ для всех $j = 1, 2, \ldots$ Так как

$$|M_j(z)| \geqslant l > 0 \quad \text{при} \quad |z| < A,$$

то и функции $K_j(z) = \ln M_j(z)$ ($j = 1, 2, \ldots$) при тех же значениях z будут функциями аналитическими (здесь берется главное значение логарифма). Следовательно, функции $K_j(z)$ в этом круге разлагаются в равномерно сходящиеся ряды

$$K_j(z) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\gamma_{jk}}{k!} z^k. \tag{2}$$

Производные $K_j'(z)$ равномерно ограничены по модулю в круге $|z| \leqslant \frac{A}{2}$

$$K_j'(z) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\gamma_{jk}}{(k-1)!} z^{k-1} \quad (j = 1, 2, \ldots),$$

где через γ_{jk} обозначаются семиинварианты случайной величины ξ_j порядка k. Так как производящая функция моментов суммы независимых слагаемых равна произведению производящих функций слагаемых, то, обозначив через $\overline{M}_n(z)$ производящую функцию суммы

$$\sum_{j=1}^{n} \xi_j,$$

получаем

$$\overline{M}_n(z) = \prod_{j=1}^{n} M_j(z). \tag{4}$$

Докажем, что при $n \geqslant 2$ имеет место формула обращения

$$\bar{p}_n(x) = \frac{B_n}{2\pi i} \int_{h-i\infty}^{h+i\infty} e^{-zB_n x} \bar{M}_n(z)\, dz, \tag{5}$$

независимо от подбора константы h из интервала $\left(-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}\right)$. Для этого достаточно показать, что существует интеграл

$$\int_{h-i\infty}^{h+i\infty} |M_1(z) M_2(z)|\, dz$$

для любого $h \in \left(-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}\right)$.

Берем любое $h \in \left(-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}\right)$. Согласно условию **A**, и соотношению (1) имеют место неравенства

$$l \leqslant M_j(h) \leqslant L \quad \text{для} \quad j = 1, 2, \ldots$$

Следовательно, функции

$$\tilde{p}_j(h, x) = \frac{1}{M_j(h)} e^{hx} p_j(x) \tag{6}$$

являются плотностями распределения и, согласно условию **C**, имеют место неравенства

$$\tilde{p}_j(h, x) \leqslant Cl^{-1}, \quad j = 1, 2, \ldots$$

Если обозначить через $\tilde{f}_j(h, t)$ характеристические функции случайных величин, плотностями распределения которых являются функции $\tilde{p}_j(h, x)$ $(j = 1, 2, \ldots)$, то, согласно известному равенству Парсеваля (см., напр. [4], стр. 68), получаем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}_j(h, t)|^2\, dt \leqslant 4\pi^2 Cl^{-1}, \quad j = 1, 2 \ldots \tag{7}$$

Производя замену переменных $z = h + it$ и замечая, что

$$M_j(h + it) = M_j(h)\, \tilde{f}_j(h, t),$$

получаем соотношение

$$\int_{h-i\infty}^{h+i\infty} M_1(z) M_2(z)\, dz = iM_1(h) M_2(h) \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}_1(h, t) \tilde{f}_2(h, t)\, dt.$$

Согласно неравенству Буняковского и неравенствам (7), имеем оценку

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\tilde{f}_1(h, t)\, \tilde{f}_2(h, t)\right| dt \leqslant 4\pi^2 Cl^{-1}. \tag{8}$$

Теперь, применив условие **A**, легко получаем, что

$$\int_{h-i\infty}^{h+i\infty} |M_1(z) M_2(z)|\, dz \leqslant 4\pi^2 L^2 Cl^{-1} < \infty, \qquad \left(h \in \left(-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}\right)\right).$$

Следовательно, при $n \geqslant 2$ плотность $\bar{p}_n(x)$ существует, и формула обращения (5) имеет место.

Доказательство сводится к оценке интеграла (5). Этот интеграл разбиваем следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{B_n}{2\pi i}\int\limits_{h-i\infty}^{h+i\infty} e^{-zB_n x}\,\overline{M}_n(z)\,dz = I_1 + I_2,\\ &\text{где}\\ &I_1 = \frac{B_n}{2\pi i}\int\limits_{h-i\varepsilon}^{h+i\varepsilon} e^{-zB_n x}\,\overline{M}_n(z)\,dz,\\ &I_2 = \frac{B_n}{2\pi i}\left\{\int\limits_{h-i\infty}^{h-i\varepsilon} + \int\limits_{h+i\varepsilon}^{h+i\infty}\left(e^{-zB_n x}\,\overline{M}_n(z)\right)dz\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Здесь $\varepsilon > 0$ будет подобрано в ходе доказательства.

Прежде всего заметим, что из условия **С** и неравенства

$$[\sup_x p(x)\,\sigma]^2 \geqslant \frac{1}{12}$$

следует, что

$$B_n^2 \geqslant \frac{n}{12\,C^2}, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{10}$$

При оценке интеграла I_1 условие **С** используется лишь для получения неравенства (10) (неравенство (10) соответствует условию а) в работах [1] и [2]). Используя это неравенство, интеграл I_1 оценивается совершенно аналогично оценке соответствующего интеграла в [1]. Поэтому мы здесь не приводим соответствующие рассуждения, а лишь выписываем те соотношения, которые потребуются нам для оценки интеграла I_2, а также оценку интеграла I_1. Для справок отсылаем к работе [1].

В качестве h берется z_0 — решение уравнения

$$\frac{d}{dz}\left\{\frac{1}{n}\left[\sum_{j=1}^{n} K_j(z) - zB_n x\right]\right\} = 0, \tag{*}$$

т. е. точка перевала. Решение z_0 этого уравнения задается некоторым степенным рядом от $\frac{x}{\sqrt{n}} = \tau$, абсолютно сходящимся для всех $\tau \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Там же доказано и соотношение

$$\frac{-z_0 B_n x}{n} + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} K_j(z_0) = -\frac{\tau^2}{2} + \tau^3 \lambda_n(\tau), \tag{11}$$

где

$$\lambda_n(t) = \frac{\Gamma_{3n}}{6\,\Gamma_{2n}^{3/2}} + \frac{\Gamma_{4n}\Gamma_{2n} - 3\,\Gamma_{3n}^2}{24\,\Gamma_{2n}^3}\,t + \cdots$$

ряд, сходящийся для достаточно малых $|t|$ равномерно для всех n. Здесь обозначено

$$\Gamma_{kn} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \gamma_{jk}, \qquad k = 2, 3, \ldots$$

Интеграл I_1 выражается следующим образом:

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) \right\} \left[1 + O\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right]. \quad (12)$$

Оценим интеграл I_2.

Согласно подбору $h = z_0$. Производя замену переменного $z = z_0 + it$, из соотношений (9) получаем

$$I_2 = \frac{B_n}{2\pi} \exp\left\{ -z_0 x B_n \right\} \int\limits_{|t|>\varepsilon} \exp\left\{ -itxB_n \right\} \prod_{j=1}^{n} M_j(z_0 + it)\, dt.$$

Так как

$$M_j(z_0 + it) = M_j(z_0) \tilde{f}_j(z_0, t),$$

то имеем соотношение

$$I_2 = \frac{B_n}{2\pi} \exp\left\{ -z_0 x B_n \right\} \prod_{j=1}^{n} M_j(z_0) \int\limits_{|t|>\varepsilon} \exp\left\{ -itxB_n \right\} \prod_{j=1}^{n} \tilde{f}_j(z_0, t)\, dt. \quad (13)$$

Отсюда, используя соотношение (11), имеем

$$|I_2| \leqslant \frac{B_n}{2\pi} \exp\left\{ n\left[\frac{-z_0 x B_n}{n} + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} K_j(z_0) \right] \right\} \int\limits_{|t|>\varepsilon} \prod_{j=1}^{n} |\tilde{f}_j(z_0, t)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{B_n}{2\pi} \exp\left\{ -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) \right\} \int\limits_{|t|>\varepsilon} |\tilde{f}_1(z_0, t) \tilde{f}_2(z_0, t)| \prod_{j=3}^{n} |\tilde{f}_j(z_0, t)|\, dt. \quad (14)$$

Для оценки последнего интеграла воспользуемся леммой из [3].

Лемма. *Пусть случайная величина с характеристической функцией $f(t)$ имеет плотность, не превосходящую константы C, и дисперсию σ^2. Тогда при $|t| \geqslant \pi\sigma^{-1}$ верно неравенство*

$$|f(t)| \leqslant \exp\left\{ -\frac{\alpha_1}{C^2 \sigma^2} \right\},$$

а при $|t| < \pi\sigma^{-1}$ — неравенство

$$|f(t)| \leqslant \exp\left\{ -\frac{\alpha_2 t^2}{C^2} \right\}.$$

Здесь α_1 и α_2 положительные абсолютные константы.

Применим эту лемму к оценке модулей характеристических функций

$$\tilde{f}_j(z_0, t), \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

Имеем

$$\tilde{f}_j(z_0, t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \tilde{p}_j(z_0, x)\, dx$$

и

$$\tilde{p}_j(z_0, x) \leqslant C < \infty, \qquad j = 1, 2, \ldots$$

Оценим дисперсии $\sigma_j^2(z_0)$ распределений с плотностями $\tilde{p}_j(z_0, x)$. При $z_0 > 0$ имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \tilde{p}_j(z_0, x)\, dx = \frac{1}{M_j(z_0)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{z_0 x} p_j(x)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{M_j(z_0)} \left\{ \sigma_j^2 + e^{z_0} + a^2 e^{z_0 a} + \int\limits_{a}^{\infty} e^{x\left(z_0 + \frac{2 \ln a}{a}\right)} p_j(x)\, dx \right\}.$$

Так как $z_0 \in \left(-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}\right)$, то всегда найдется такое $a>0$, чтобы имело место неравенство

$$\left| z_0 + \frac{2 \ln a}{a} \right| < A.$$

Следовательно, при $z_0>0$ верны неравенства

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \bar{p}_j(z_0, x)\, dx \leqslant M < \infty \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

Аналогичная оценка получается и при $z_0<0$. Используя соотношение

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2,$$

получаем оценки

$$\sigma_j^2(z_0) \leqslant M \qquad (j=1, 2, \ldots). \tag{15}$$

Теперь, согласно лемме и условию **C**, имеем неравенства

$$|\bar{f}_j(z_0, t)| \leqslant \begin{cases} \exp\left\{-\dfrac{\alpha_1 l^2}{C^2 \sigma_j^2(z_0)}\right\} & \text{при } |t| \geqslant \pi[\sigma_j(z_0)]^{-1}, \\ \exp\left\{-\dfrac{\alpha_2 t^2 l^2}{C^2}\right\} & \text{при } |t| < \pi[\sigma_j(z_0)]^{-1}, \end{cases}$$

для $j=1, 2, \ldots$ Для заданного $\varepsilon>0$, обозначив через

$$\alpha = \min\left\{\frac{\alpha_1 l^2}{C^2 M^2}, \frac{l^2 \alpha_2 \varepsilon^2}{C^2}\right\},$$

согласно неравенствам (15), получаем оценки

$$|\bar{f}_j(z_0, t)| \leqslant e^{-\alpha} \tag{16}$$

при $|t|>\varepsilon$ и с $\alpha>0$ $(j=1, 2, \ldots)$.

Из соотношения (14), используя неравенства (8) и (16), получаем, что

$$|I_2| \leqslant \exp\left\{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right\} B_n e^{-(n-2)\alpha}\, 2\pi C l^{-1}.$$

Отсюда следует соотношение

$$|I_2| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \exp\left\{\frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right\} o\left(\frac{1}{n}\right). \tag{17}$$

Из соотношений (9), согласно оценкам (12) и (17), следует, что

$$\bar{p}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left\{\exp\left[\frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right]\left[1 + O\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right]\right\},$$

что равносильно утверждению теоремы.

3. Доказательства замечаний и теоремы второй

Мы здесь приводим доказательство только первого замечания. Доказательства следующих двух не представляют трудности.

Интеграл I_1 (соотношение (9)), конечно, оценивается также, как и в работе [1].

Пусть z_0 — точка перевала, т. е. решение уравнения (*). Обозначим через $p_j^{(m)}(x)$ плотности сумм

$$\eta_j^{(1)} + \eta_j^{(2)} + \cdots + \eta_j^{(m_j)},$$

где случайные величины $\eta_j^{(k)} (k=1, \ldots, m_j)$ независимы и распределены одинаково со случайной величиной ξ_j. Согласно замечанию, имеем

$$\tilde{p}_j^{(m)}(z_0, t) = \frac{1}{[M_j(z_0)]^{m_j}} e^{z_0 x} p_j^{(m)}(x) \leqslant \frac{\tilde{C}_1}{l^{m_j}}.$$

Следовательно, функции

$$|\tilde{f}_j(z_0, t)|^{2m},$$

где

$$\tilde{f}_j(z_0, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{e^{z_0 x}}{M_j(z_0)} dF_j(x),$$

являются функциями интегрируемыми ($j=1, 2, \ldots$). Поэтому из соотношения (14) получаем следующую оценку:

$$|I_2| \leqslant \exp\left\{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right\} e^{-(n-2^s)\tilde{\alpha}} \frac{B_n}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^{2^s} |\tilde{f}_j(z_0, t)| \, dt,$$

где $2^{s-2} < m \leqslant 2^{s-1}$. Используя неравенство Буняковского и интегрируемость функций

$$|\tilde{f}_j(z_0, t)|^{2m}, \qquad j=1, 2, \ldots,$$

получаем, что

$$|I_2| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \exp\left\{\frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right\} o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Это соотношение вместе с (12) дает утверждение теоремы.

Для доказательства теоремы второй прежде всего заметим, что поскольку при суммировании независимых случайных величин дисперсии складываются, то дисперсии

$$\sigma_{jm}^2(z_0)$$

случайных величин с плотностями распределения $\tilde{p}_j^m(z_0, x)$ удовлетворяют равенствам

$$\sigma_{jm}^2(z_0) = m_j \sigma_j^2(z_0) \qquad (j=1, 2, \ldots).$$

Из леммы, согласно условию $\mathbf{C}_1$, следуют неравенства

$$|\tilde{f}_j(z_0, t)| \leqslant \exp\left\{-\frac{\beta l^{2m_j}}{m_j^2 C_j^2}\right\} \quad \text{при} \quad |t| > \varepsilon, \quad (j=1, 2, \ldots),$$

где

$$\beta = \min_{j \geqslant 1}\left\{\frac{\alpha_1}{M}, \ \alpha_2 \varepsilon^2 m_j^2\right\}.$$

Следовательно, для I_2 получаем такую оценку:

$$|I_2| \leqslant \exp\left\{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right\} \frac{B_n}{2\pi} \exp\left\{-\beta \sum_{j=i_r}^{n} \frac{l^{2m_j}}{m_j^2 C_j^2}\right\} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{k=1}^{r} |\tilde{f}_{i_k}(z_0, t)| \, dt.$$

Рассуждая как и при доказательстве замечания первого, получаем, что интеграл, стоящий в последнем выражении, существует и не превышает величины $B \max\left\{\frac{C_{i_1}}{l^{m_{i_1}}}, \ldots, \frac{C_{i_r}}{l^{m_{i_r}}}\right\}$, где B — конечное число, зависящее от n. Следовательно, согласно условию $\mathbf{C}_1$, имеем

$$|I_2| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \exp\left\{\frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right\} O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{18}$$

Утверждение теоремы следует из соотношений (9), (12) и (18).

Вильнюсский Государственный педагогический институт

Поступило в редакцию 1.III.1966

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Рихтер, Локальные предельные теоремы для больших уклонений, Теория вероятн. и ее примен., 2, 2 (1957), 214—229.
2. В. В. Петров, О больших уклонениях сумм случайных величин, Вестник Ленингр. у-та, сер. мат., мех., астр., № 1, вып. 1 (1961), 25—37.
3. П. Сурвила, Некоторые предельные теоремы для сумм независимых случайных величин (канд. дисс.), Вильнюс (1963).
4. Е. Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье (1948).

APIE DIDELIUS NUKRYPIMUS TANKIAMS

P. SURVILA

(Reziumė)

Šiame straipsnyje įrodoma, kad, esant patenkintoms sąlygoms **A** ir **C**, nepriklausomų atsitiktinių dydžių normuotų sumų tankiams galioja dideli nukrypimai (1 teorema).

ÜBER GROSSE ABWEICHUNGEN FÜR DEN DICHTEFUNKTIONEN

P. SURWILA

(Zusammenfassung)

Sei $\{\xi_j\}$, $j=1,2,\ldots$ eine Folge unabhängiger Zufalsgrößen mit den Dichtefunktionen $p_j(x)$. Es existierte $D\xi_j=\sigma_j^2$, und $M\xi_j=0$, $j=1,2,\ldots$. Wir setzen

$$\bar{p}_n(x) = \frac{d}{dx} P\left\{\sum_{j=1}^{n} \xi_j < x \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2}\right\}.$$

Satz. *Es seien die Bedingungen* **A** *und* **C** *erfüllt. Dann existiert für $n \geqslant 2$ eine Verteilungsdichte $\bar{p}_n(x)$. Es sei ferner $|x|>1$ und $|x|=o(\sqrt{n})$ für $n\to\infty$. Dann gillt*

$$\bar{p}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left\{\exp\left[\frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right]\left[1+O\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right]\right\},$$

wobei $\lambda_n(t)$ eine Potenzreihe ist, die für genügend kleine Werte $|t|$ gleichmässig für alle n konvergiert.