VI LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 4
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1966

МЕТРИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ ЭРМИТОВЫХ КВАДРИК В УНИТАРНЫХ НЕЕВКЛИДОВЫХ И ПОЛУНЕЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Л. М. ЕЖОВА-ГУСЕВА, Т. М. КЛИМАНОВА, Е. У. ЯСИНСКАЯ

В работе находятся метрические инварианты эрмитовых квадрик в комплексных унитарных неевклидовых (§ 1), квазинеевклидовых (§ 2) и полунеевклидовых (§ 3) пространствах и в кватернионных унитарных неевклидовых (§ 4), квазинеевклидовых (§ 5) и полунеевклидовых (§ 6) пространствах, аналогичные метрическим инвариантам квадрик в вещественных евклидовых, квазинеевклидовых и полунеевклидовых пространствах ([1], стр. 283–290, [2], [3] и [4], стр. 85–88), § 1, 4 и 5 написаны Л. М. Ежовой-Гусевой, § 2 и 3 – Е. У. Ясинской, § 6 написан Т. М. Климановой.

§ 1. Комплексные неевклидовы пространства

Рассмотрим эрмитову квадрику

$$\sum_i \sum_j \bar{x}^j a_{ij} x^i = 0, \qquad a_{ij} = \bar{a}_{ji} \tag{1}$$

в комплексном унитарном неевклидовом пространстве ${}^l\bar{S}_n(i)$ ([5], стр. 622) с абсолютом

$$\sum_i \varepsilon_i \bar{x}^i x^i = 0, \tag{2}$$

где $\varepsilon_i = \pm 1$, причем -1 среди этих чисел встречается l раз. Уравнения (1) и (2) можно соответственно записать в матричной форме в виде

$$\bar{x}^T A x = 0, \quad \bar{A}^T = A, \tag{3}$$

и

$$\bar{x}^T E x = 0, \tag{4}$$

где $x = (x^i)$ — матрица, состоящая из одного столбца, $A = (a_{ij})$ — эрмитово-симметричная матрица $(n+1)$-го порядка, $E = (\varepsilon_i \delta_{ij})$ — диагональная матрица того же порядка с диагональными элементами ε_i, T — знак транспонирования матрицы.

Движения пространства ${}^l\bar{S}_n(i)$ имеют вид

$$'x = Ux, \tag{5}$$

где U — унимодулярная матрица, связанная условием унитарности

$$\bar{U}^T E U = E. \tag{6}$$

При движении $x = U'x$ квадрика (3) переходит в квадрику

$$\bar{x}^T (\bar{U}^T A U)\, x = 0 \tag{7}$$

откуда видно, что матрица $'A$ этой квадрики равна

$$'A=\bar{U}^T A U. \tag{8}$$

Эрмитова квадрика пространства ${}^l\bar{S}_n(i)$ в основном случае переводится в себя подгруппой группы движений, зависящих от n вещественных параметров: эрмитову квадрику в основном случае можно привести движением к каноническому виду

$$\sum_i a_i \bar{x}^i x^i = 0, \tag{9}$$

где числа a_i вещественны и указанная подгруппа состоит из движений

$$'x^i = e^{i\varphi_i} x^i, \quad \sum_i \varphi_i = 0, \tag{10}$$

зависящих от n параметров φ_i, $i>0$. Так как комплексная эрмитово-симметрическая матрица A зависит от $(n+1)^2$ вещественных параметров $\left((n+1)\right.$ вещественных элементов $a_{ii}=\bar{a}_{ii}$ и $n(n+1)$ вещественных параметров, от которых зависят $\frac{n(n+1)}{2}$ комплексных элементов a_{ij} при $\left.i>j\right)$, а группа движений пространства ${}^l\bar{S}_n(i)$ зависит от $n(n+2)$ вещественных параметров, уравнение эрмитовой квадрики этого пространства в основном случае обладает

$$(n+1)^2-[n(n+2)-n]=n+1 \tag{11}$$

независимыми вещественными метрическими инвариантами.

Для определения этих инвариантов заметим, что в силу (6) и (8) при любом вещественном λ

$$'A-\lambda E=\bar{U}^T A U-\lambda E=\bar{U}^T(A-\lambda E)\,U, \tag{12}$$

откуда, если обозначать определитель матрицы A через $|A|$ и учесть, что $|U|=1$,

$$|'A-\lambda E|=|\bar{U}^T|\cdot|A-\lambda E|\cdot|U|=|A-\lambda E|. \tag{13}$$

Поэтому при движениях пространства ${}^l\bar{S}_n(i)$ инвариантами уравнения эрмитовой квадрики (1) являются коэффициенты α_i многочлена

$$P(\lambda)=|A-\lambda E|=(-1)^{n-l+1}\lambda^{n+1}+\alpha_n\lambda^n+\alpha_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+\alpha_1\lambda+\alpha_0. \tag{14}$$

Коэффициент α_i равен алгебраической сумме главных миноров $(n-i+1)$-го порядка матрицы A, в частности, α_n — след матрицы A, а α_0 — определитель этой матрицы. Все числа α_i вещественны.

Так как каждый коэффициент α_i зависит от таких элементов a_{ij}, от которых не зависит коэффициент α_{i+1}, найденные нами $n+1$ вещественных инвариантов уравнения эрмитовой квадрики независимы.

§ 2. Комплексные квазинеевклидовы пространства

Рассмотрим эрмитову квадрику (1) в комплексном квазинеевклидовом пространстве ${}^{l_0 l_1}\bar{S}_n^m(i)$ [6] с абсолютным конусом Q_0 с уравнением

$$\sum_{i_0} \varepsilon_{i_0}\bar{x}^{i_0} x^{i_0}=0 \qquad (0\leqslant i_0\leqslant m), \tag{15}$$

абсолютной плоскостью A_0 с уравнениями $x^{i_0}=0$ и абсолютной квадрикой Q_1 на этой плоскости с уравнениями

$$\sum_{i_1} \varepsilon_{i_1} \bar{x}^{i_1} x^{i_1}=0 \qquad (m<i_1\leqslant n), \tag{16}$$

где ε_{i_0} и $\varepsilon_{i_1}=\pm 1$, причем -1 среди этих чисел встречается, соответственно, l_0 и l_1 раз. Уравнения (15) и (16) можно, соответственно, записать в матричной форме в виде

$$\bar{x}_0^T E_0 x_0=0 \tag{17}$$

и

$$\bar{x}_1^T E_1 x_1=0, \tag{18}$$

где $x_0=(x^{i_0})$ и $x_1=(x^{i_1})$ – матрицы, состоящие из одного столбца, $E_0=(\varepsilon_{i_0}\delta_{i_0 j_0})$ и $E_1=(\varepsilon_{i_1}\delta_{i_1 j_1})$ – диагональные матрицы $(m+1)$-го и $(n-m)$-го порядков с диагональными элементами ε_{i_0} и ε_{i_1}.

Движения пространства ${}^{l_0 l_1}\bar{S}_n^m(i)$ имеют вид

$$\left.\begin{aligned} 'x_0&=U_0 x_0 \\ 'x_1&=Tx_0+U_1 x_1 \end{aligned}\right\}, \tag{19}$$

что мы будем коротко записывать в виде (5), где

$$U=\begin{pmatrix} U_0 & 0 \\ T & U_1 \end{pmatrix}, \tag{20}$$

причем здесь U_0 и U_1 – матрицы, связанные условиями унитарности

$$\bar{U}_0^T E_0 U_0=E_0, \quad \bar{U}_1^T E_1 U_1=E_1 \tag{21}$$

и условием $|U_0|\,|U_1|=1$, представляющим собой условие унитарности матрицы (20).

Уравнение квадрики (3) можно записать в виде

$$\bar{x}_0^T A_{00} x_0+\bar{x}_0^T A_{01} x_1+\bar{x}_1^T \bar{A}_{01}^T x_0+\bar{x}_1^T A_{11} x_1=0, \tag{22}$$

где $\bar{A}_{00}^T=A_{00}$, $\bar{A}_{11}^T=A_{11}$. При движении $x=U\,'x$ квадрика (22) переходит в квадрику

$$\left.\begin{aligned} &'\bar{x}_0^T(\bar{U}_0^T A_{00} U_0)\,'x_0+'\bar{x}_0^T(\bar{U}_0^T A_{01} T)\,'x_0+'\bar{x}_0^T(\bar{U}_0^T A_{01} U_1)\,'x_1+ \\ &+'\bar{x}_0^T(\bar{T}^T \bar{A}_{01}^T U_0)'x_0+'\bar{x}_1^T(\bar{U}_1^T \bar{A}_{01}^T U_0)\,'x_0+'\bar{x}_0^T(\bar{T}^T A_{11} T)\,'x_0+ \\ &+'\bar{x}_0^T(\bar{T}^T A_{11} U_1)\,'x_1+'\bar{x}_1^T(\bar{U}_1^T A_{11} T)\,'x_0+\bar{x}_1^T(\bar{U}_1^T A_{11} U_1)\,'x_1=0 \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

откуда видно, что матрицы $'A_{00}$, $'A_{01}$ и $'A_{11}$ этой квадрики равны

$$\left.\begin{aligned} 'A_{00}&=\bar{U}_0^T A_{00} U_0+\bar{U}_0^T A_{01} T+\bar{T}^T \bar{A}_{01}^T U_0+\bar{T}^T A_{11} T, \\ 'A_{01}&=\bar{U}_0^T A_{01} U_1+\bar{U}_1^T A_{11} T, \\ 'A_{11}&=\bar{U}_1^T A_{11} U_1. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Эрмитова квадрика пространств ${}^{l_0 l_1}\bar{S}_n^m(i)$ в основном случае переводится в себя подгруппой группы движений, так же, как в случае ${}^{l}\bar{S}_n(i)$, приводимую к виду (10) и зависящую от n вещественных параметров, а вся группа движений ${}^{l_0 l_1}\bar{S}_n^m(i)$, как и группа движений ${}^{l}\bar{S}_n(i)$ зависит от $n(n+2)$ вещественных параметров. Поэтому уравнение эрмитовой квадрики ${}^{l_0 l_1}\bar{S}_n^m(i)$ в основном случае обладает $n+1$ независимыми вещественными инвариантами.

Для определения этих инвариантов заметим, что в силу (21) и (24) при любом вещественном λ

$$'A_{11}-\lambda E_1=\overline{U}_1^T A_{11}U_1-\lambda E_1=\overline{U}_1^T(A_{11}-\lambda E_1)U_1 \tag{25}$$

и

$$\begin{pmatrix} 'A_{00}-\lambda E_0 & 'A_{01} \\ '\overline{A}_{01}^T & 'A_{11} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \overline{U}_0^T A_{00}U_0+\overline{U}_0^T A_{01}T+\overline{T}^T\overline{A}_{01}^T U_0+\overline{T}^T A_{11}T-\lambda E_0 & \overline{U}_0^T A_{01}U_1+\overline{U}_1^T A_{11}T \\ \overline{U}_1^T\overline{A}_{01}^T U_0+\overline{U}_1^T A_{11}T & \overline{U}_1^T A_{11}U_1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \overline{U}_0^T & \overline{T}^T \\ 0 & \overline{U}_1^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{00}-\lambda E_0 & A_{01} \\ \overline{A}_{01}^T & A_{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_0 & 0 \\ T & U_1 \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Из равенств (24) и (25) в силу унимодулярности матрицы U и равенства определителя матрицы U_1 комплексному числу единичного модуля следует, что

$$|'A_{11}-\lambda E_1|=|A_1-\lambda E_1| \tag{27}$$

и

$$\begin{vmatrix} 'A_{00}-\lambda E_0 & 'A_{01} \\ '\overline{A}_{01}^T & A_{11} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A_{00}-\lambda E_0 & A_{01} \\ \overline{A}_{01}^T & A_{11} \end{vmatrix}. \tag{28}$$

Поэтому при движениях пространства ${}^{l_0 l_1}\overline{S}_n^m(i)$ инвариантами уравнения эрмитовой квадрики являются $m+2$ коэффициентов многочлена

$$P_0(\lambda)=\begin{vmatrix} A_{00}-\lambda E_0 & A_{01} \\ \overline{A}_{01}^T & A_{11} \end{vmatrix}=(-1)^{m-l_0+1}\alpha_{m+1}\lambda^{m+1}+\alpha_m\lambda^m+\cdots+\alpha_1\lambda+\alpha_0 \tag{29}$$

и $n-m$ коэффициентов многочлена

$$P_1(\lambda)=|A_{11}-\lambda E_1|=(-1)^{n-m-l_1}\lambda^{n-m}+\alpha_n\lambda^{n-m-1}+\cdots+\alpha_{m+2}\lambda+\alpha_{m+1}. \tag{30}$$

Коэффициент α_{i_1} равен сумме главных миноров $(n-i_1+1)$-го порядка матрицы A_1, в частности α_n — след матрицы A_1, α_{m+1} — определитель этой матрицы, коэффициенты α_{i_0} выражаются через элементы всей матрицы A. Так как коэффициенты α_i можно расположить в таком порядке, что каждый из них зависит от таких элементов a_{ij}, от которых не зависят предыдущие, найденные нами $n+1$ вещественных инвариантов независимы.

§ 3. Комплексные полунеевклидовы пространства

Рассмотрим эрмитову квадрику (1) в комплексном полунеевклидовом пространстве ${}^{l_0 l_1 \ldots l_r}\overline{S}_n^{m_0 m_1 \ldots m_{r-1}}(i)$ [6] с абсолютными конусами и квадрикой Q_c с уравнениями

$$\sum_{i_a}\varepsilon_{i_a}\overline{x}^{i_a}x^{i_a}=0 \tag{31}$$

$$(a=0,\ 1,\ \ldots,\ r,\quad 0\leqslant i_0\leqslant m_0,\quad m_{a-1}<i_a\leqslant m_a),$$

где $\varepsilon_{i_a}=\pm 1$, причем -1 среди этих чисел встречается l_a раз. Уравнения (31) можно записать в матричной форме в виде

$$\overline{x}_a^T E_a x_a=0, \tag{32}$$

где $x_a=(x^{i_a})$ — матрицы, состоящие из одного столбца, $E_a=(\varepsilon_{i_a}\delta_{i_a j_a})$ — диагональные матрицы (m_a-m_{a-1})-го порядка (считая $m_{-1}=-1$) с диагональными элементами ε_{i_a}.

Движения пространства ${}^{l_0 l_1 \dots l_r}\overline{S}_n^{m_0 m_1 \dots m_{r-1}}(i)$ имеют вид

$$\left.\begin{aligned}
'x_0 &= U_0\, x_0, \\
'x_1 &= T_{10}\, x_0 + U_1\, x_1, \\
'x_2 &= T_{20}\, x_0 + T_{21}\, x_1 + U_2\, x_2, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
'x_r &= T_{r0}\, x_0 + T_{r1}\, x_1 + \cdots + T_{r,\,r-1}\, x_{r-1} + U_r\, x_r
\end{aligned}\right\}, \tag{33}$$

что мы будем коротко записывать в виде (5), где

$$U = \begin{pmatrix} U_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ T_{10} & U_1 & 0 & \cdots & 0 \\ T_{20} & T_{21} & U_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{r0} & T_{r1} & T_{r2} & \cdots & U_r \end{pmatrix}, \tag{34}$$

причем здесь U_a — матрицы, связанные условием унитарности

$$\overline{U}_a^T E_a\, U_a = E_a \tag{35}$$

и условием $|U_0|\,|U_1|\,\cdots\,|U_r| = 1$, представляющим собой условие унитарности матрицы (34).

Уравнение квадрики (3) можно записать в виде

$$\sum_a \sum_b \bar{x}_b^T A_{ab}\, x_a = 0, \quad A_{ab} = \overline{A}_{ba}^T. \tag{36}$$

При движении $x = U'x$ квадрика (36) переходит в квадрику

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_a \sum_b ('\bar{x}_0^T \overline{T}_{b0}^T + '\bar{x}_1^T \overline{T}_{b1}^T + \cdots + '\bar{x}_{b-1}^T \overline{T}_{b,\,b-1}^T + '\bar{x}_b^T \overline{U}_b^T)\, A_{ab} \times \\
&\times (T_{a0}'x_0 + T_{a1}'x_1 + \cdots + T_{a,\,a-1}'x_{a-1} + U_a'x_a) = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

откуда видно, что матрицы $'A_{ab}$ этой квадрики равны

$$\left.\begin{aligned}
'A_{ab} = {} & \overline{U}_b^T A_{ab}\, U_a + \overline{T}_{b+1,\,b}^T A_{a,\,b+1}\, U_a + \cdots + \overline{T}_{rb}^T A_{ar}\, U_a + \\
& + \overline{U}_b^T A_{a+1,\,b}\, T_{a+1,\,a} + \overline{T}_{b+1,\,b}^T A_{a+1,\,b+1}\, T_{a+1,\,a} + \cdots + \overline{T}_{rb}^T A_{a+1,\,r}\, T_{a+1,\,a} + \\
& + \cdots + \overline{U}_b^T A_{rb}\, T_{ra} + \overline{T}_{b+1,\,b}^T A_{r,\,b+1}\, T_{ra} + \cdots + \overline{T}_{rb}^T A_{rr}\, T_{ra}.
\end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Так как эрмитова квадрика пространства ${}^{l_0 l_1 \dots l_r}\overline{S}_n^{m_0 m_1 \dots m_{r-1}}(i)$ в основном случае переводится в себя подгруппой группы движений, так же, как в случае ${}^l\overline{S}_n(i)$, приводимую к виду (10) и зависящую от n вещественных параметров, а вся группа движений ${}^{l_0 l_1 \dots l_r}\overline{S}_n^{m_0 m_1 \dots m_{r-1}}(i)$ зависит от $n(n+2)$ вещественных параметров, уравнение эрмитовой квадрики в ${}^{l_0 l_1 \dots l_r}\overline{S}_n^{m_0 m_1 \dots m_{r-1}}(i)$ в основном случае обладает $n+1$ независимыми вещественными инвариантами.

Для определения этих инвариантов заметим, что в силу (35) и (3) при любом вещественном λ

$$\left.\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 'A_{aa}-\lambda E_a & 'A_{a,a+1} & \cdots & 'A_{ar} \\ 'A_{a+1,a} & 'A_{a+1,a+1} & \cdots & 'A_{a+1,r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 'A_{ra} & 'A_{r,a+1} & \cdots & 'A_{rr} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \overline{U}_a^T & \overline{T}_{a+1,a}^T & \cdots & \overline{T}_{ra}^T \\ 0 & \overline{U}_{a+1}^T & \cdots & \overline{T}_{r,a+1}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \overline{U}_r^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{aa}-\lambda E_a & A_{a,a+1} & \cdots & A_{ar} \\ A_{a+1,a} & A_{a+1,a+1} & \cdots & A_{a+1,r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{ra} & A_{r,a+1} & \cdots & A_{rr} \end{pmatrix} \times \\
&\times \begin{pmatrix} U_a & 0 & \cdots & 0 \\ T_{a+1,a} & U_{a+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{ra} & T_{r,a+1} & \cdots & U_r \end{pmatrix}.
\end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Из равенств (38) и (39) в силу равенства определителя

$$\begin{vmatrix} U_a & 0 & \cdots & 0 \\ T_{a+1,a} & U_{a+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{ra} & T_{r,a+1} & \cdots & U_r \end{vmatrix} = |U_a|\cdot|U_{a+1}|\cdots|U_r| \tag{40}$$

комплексному числу единичного модуля следует, что

$$\begin{vmatrix} 'A_{aa}-\lambda E_a & 'A_{a,a+1} & \cdots & 'A_{ar} \\ 'A_{a+1,a} & 'A_{a+1,a+1} & \cdots & 'A_{a+1,r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 'A_{ra} & 'A_{r,a+1} & \cdots & 'A_{rr} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{aa}-\lambda E_a & A_{a,a+1} & \cdots & A_{ar} \\ A_{a+1,a} & A_{a+1,a+1} & \cdots & A_{a+1,r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{ra} & A_{r,a+1} & \cdots & A_{rr} \end{vmatrix}. \tag{41}$$

Поэтому при движениях пространств ${}^{l_0 l_1 \ldots l_r}\overline{S}_n^{m_0 m_1 \ldots m_{r-1}}(i)$ инвариантами эрмитовой квадрики являются $m_a - m_{a-1} + 1$ вещественных коэффициентов многочлена

$$P_a(\lambda) = \begin{vmatrix} A_{aa}-\lambda E_a & A_{a,a+1} & \cdots & A_{ar} \\ A_{a+1,a} & A_{a+1,a+1} & \cdots & A_{a+1,r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{ra} & A_{r,a+1} & \cdots & A_{rr} \end{vmatrix} = (-1)^{m_a - m_{a-1} - l_a} \alpha_{m_a+1} \lambda^{m_a - m_{a-1}} +$$

$$+ \alpha_{m_a} \lambda^{m_a - m_{a-1} - 1} + \cdots + \alpha_{m_{a-1}+2} \lambda + \alpha_{m_{a-1}+1}. \tag{42}$$

Общее число неравных между собой коэффициентов многочленов $P_a(\lambda)$ равно $\sum\limits_a (m_a - m_{a-1}) = n+1$. Так как коэффициенты α_i можно расположить в таком порядке, что каждый из них зависит от таких элементов a_{ij}, от которых не зависит предыдущий, найденные нами $n+1$ вещественных инвариантов независимы.

§ 4. Кватернионные неевклидовы пространства

Рассмотрим эрмитову квадрику (1) в кватернионном унитарном неевклидовом пространстве ${}^{l}\overline{S}_n(i, j)$ ([5], стр. 622) с абсолютом (2). Уравнения (1) и (2) здесь также можно записать в матричном виде (3) и (4). Движения пространства ${}^{l}\overline{S}_n(i, j)$ имеют вид (5), где U – матрица, связанная условием унитарности (6), из которого в этом случае следует равенство полуопределителя $\|U\|$ матрицы U ([5], стр. 567) единице. Эрмитова квадрика пространства ${}^{l}\overline{S}_n(i, j)$ в основном случае переводится в себя подгруппой группы движений, зависящих от $3(n+1)$ вещественных параметров: эрмитову квадрику в основном случае можно привести движениям к каноническому виду (9), и указанная подгруппа состоит из движений

$$'x^i = u_i x^i, \tag{43}$$

где все кватернионы U_i – единичного модуля и каждый из $n+1$ кватернионов U_i зависит от трех вещественных параметров. Так как кватернионная эрмитово-симметричная матрица A зависит от $(n+1)\cdot(2n+1)$ вещественных параметров $\left((n+1)\right.$ вещественных элементов $a_{ii}=\bar{a}_{ii}$ и $2n(n+1)$ вещественных параметров, от которых зависят $\frac{n(n+1)}{2}$ кватернионных элементов a_{ij} при $\left.i>j\right)$, а группа движений пространства ${}^{l}\overline{S}_n(i, j)$ зависит от $(n+1)\cdot(2n+3)$ вещественных параметров, уравнение эрмитовой квадрики этого пространства в основном случае обладает

$$(n+1)\ (2n+1)-[(n+1)\ (2n+3)-3\,(n+1)]=n+1$$

независимыми вещественными параметрами.

Для определения этих инвариантов заметим, что в пространстве ${}^{l}\overline{S}_n(i, j)$ при любом вещественном λ также имеет место равенство (12), откуда в этом случае вытекает равенство полуопределителей

$$\|'A-\lambda E\|=\|\bar{U}^T\|\cdot\|A-\lambda E\|\cdot\|U\|=\|A-\lambda E\|. \tag{44}$$

Полуопределитель $\|A-\lambda E\|$ представляет собой многочлен $2(n+1)$-й степени от λ; однако, если мы вычислим его для эрмитовой квадрики (9) с вещественными коэффициентами, мы получим, что этот полуопределитель равен квадрату определителя $|A-\lambda E|$ и, следовательно, квадрату многочлена $(n+1)$-й степени от λ. В силу инвариантности этого многочлена при движениях этот многочлен является квадратом многочлена $(n+1)$-й степени от λ и для произвольной эрмитовой квадрики, приводимой к виду (9). Поэтому при движениях пространства ${}^{l}\overline{S}_n(i, j)$ инвариантными являются $n+1$ вещественных коэффициентов многочлена

$$\sqrt{\|A-\lambda E\|}=(-1)^{n-l+1}\lambda^{n+1}+\alpha_n\lambda^n+\alpha_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+\alpha_1\lambda+\alpha_0, \tag{45}$$

которые здесь, так же, как в случае многочлена (14), независимы.

§ 5. Кватернионные квазинеевклидовы пространства

Рассмотрим эрмитову квадрику (1) в кватернионном унитарном квазинеевклидовом пространстве ${}^{l_0 l_1}\overline{S}{}_n^m(i, j)$ [6] с абсолютным конусом (15) и абсолютной квадрикой (16). Уравнения (15) и (16) здесь также можно записать в матричном виде (17) и (18). Движения пространства ${}^{l_0 l_1}\overline{S}{}_n^m(i, j)$ имеют вид (19), где U_0 и U_1 – матрицы, связанные условиями унитарности (21), из которых в этом случае следует равенство полуопределителей этих матриц единице; движения можно записать и в виде (5), где матрица U имеет вид (20).

Эрмитова квадрика пространства ${}^{l_0 l_1}\overline{S}{}_n^m(i, j)$ в основном случае переводится в себя подгруппой группы движений, так же как в случае ${}^{l}\overline{S}_n(i, j)$ приводимую к виду (43) и зависящую от $3(n+1)$ вещественных параметров, а вся группа движений ${}^{l_0 l_1}\overline{S}{}_n^m(i, j)$, как и группа движений ${}^{l}\overline{S}_n(i, j)$, зависит от $(n+1)$ $(2n+3)$ вещественных параметров. Поэтому уравнение эрмитовой квадрики в ${}^{l_0 l_1}\overline{S}{}_n^m(i, j)$ в основном случае обладает $n+1$ независимыми вещественными инвариантами.

Для определения этих инвариантов заметим, что в пространстве ${}^{l_0 l_1}\overline{S}{}_n^m(i, j)$ при любом вещественном λ также имеют место равенства (25) и (26), откуда в этом случае вытекают равенства полуопределителей

$$\| {}'A_{11}-\lambda E_1 \| = \| A_{11}-\lambda E_1 \| \tag{46}$$

и

$$\left\| \begin{matrix} {}'A_{00}-\lambda E_0 & {}'A_{01} \\ {}'\overline{A}{}_{01}^T & {}'A_{11} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} A_{00}-\lambda E_0 & A_{01} \\ \overline{A}{}_{01}^T & A_{11} \end{matrix} \right\|. \tag{47}$$

Поэтому при движениях пространства ${}^{l_0 l_1}\overline{S}{}_n^m(i, j)$ инвариантами уравнений эрмитовой квадрики являются $m+2$ коэффициентов многочлена

$$(P_0\lambda) = \sqrt{\left\| \begin{matrix} A_{00}-\lambda E_0 & A_{01} \\ \overline{A}{}_{01}^T & A_{11} \end{matrix} \right\|} = (-1)^{m-l_0+1}\alpha_{m+1}\lambda^{m+1}+\alpha_m\lambda^m+\cdots+\alpha_1\lambda+\alpha_0 \tag{48}$$

и $n-m$ коэффициентов многочлена

$$P_1(\lambda)=\sqrt{\| A_{11}-\lambda E_1 \|} = (-1)^{n-m-l_1}\lambda^{n-m}+\alpha_n\lambda^{n-m-1}+\cdots+\alpha_{m+2}\lambda+\alpha_{m+1}, \tag{49}$$

которые здесь, так же как в случае многочленов (29) и (30), независимы.

§ 6. Кватернионные полунеевклидовы пространства

Рассмотрим эрмитову квадрику (1) в кватернионном полунеевклидовом пространстве ${}^{l_0 l_1 \cdots l_r}S_n^{m_0 m_1 \cdots m_{r-1}}(i, j)$ [6] с абсолютными конусами и квадрикой (31). Уравнения (31) здесь также можно записать в матричном виде (32). Движения пространства ${}^{l_0 l_1 \cdots l_r}\overline{S}{}_n^{m_0 m_1 \cdots m_{r-1}}(i, j)$ имеют вид (33), где U_a — матрицы, связанные условием унитарности (35), из которой в этом случае следует равенство полуопределителей этих матриц единице; движения можно записать и в виде (5), где матрица U имеет вид (34).

Эрмитова квадрика пространства ${}^{l_0 l_1 \cdots l_r}\overline{S}{}_n^{m_0 m_1 \cdots m_{r-1}}(i, j)$ в основном случае переводится в себя подгруппой группы движений, так же как в случае ${}^{l}\overline{S}_n(i,j)$ приводимую к виду (43) и зависящую от $3(n+1)$ вещественных параметров, а вся группа движений ${}^{l_0 l_1 \ldots l_r}\overline{S}_n^{m_0 m_1 \ldots m_{r-1}}(i,j)$, как и группа движений ${}^{l}\overline{S}_n(i,j)$, зависит от $(n+1)(2n+3)$ вещественных параметров. Поэтому уравнение эрмитовой квадрики ${}^{l_0 l_1 \ldots l_r}\overline{S}_n^{m_0 m_1 \ldots m_{r-1}}(i,j)$ в основном случае обладает $n+1$ независимыми вещественными инвариантами.

Для определения этих инвариантов заметим, что в пространстве ${}^{l_0 l_1 \ldots l_r}\overline{S}_n^{m_0 m_1 \ldots m_{r-1}}(i,j)$ при любом вещественном λ также имеют место равенства (39), откуда в этом случае вытекают равенства полуопределителей

$$\begin{Vmatrix} {}'A_{aa}-\lambda E_a & {}'A_{a,a+1} & \cdots & {}'A_{ar} \\ {}'A_{a+1,a} & {}'A_{a+1,a+1} & \cdots & {}'A_{a+1,r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {}'A_{ra} & {}'A_{r,a+1} & \cdots & {}'A_{rr} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} A_{aa}-\lambda E_a & A_{a,a+1} & \cdots & A_{ar} \\ A_{a+1,a} & A_{a+1,a+1} & \cdots & A_{a+1,r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{ra} & A_{r,a+1} & \cdots & A_{rr} \end{Vmatrix}. \tag{50}$$

Поэтому при движениях пространства ${}^{l_0 l_1 \ldots l_r}\overline{S}_n^{m_0 m_1 \ldots m_{r-1}}(i,j)$ инвариантами уравнений эрмитовой квадрики являются $m_a-m_{a-1}+1$ коэффициентов многочлена

$$P_a(\lambda) = \sqrt{\begin{Vmatrix} A_{aa}-\lambda E_a & A_{a,a+1} & \cdots & A_{ar} \\ A_{a+1,a} & A_{a+1,a+1} & \cdots & A_{a+1,r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{ra} & A_{r,a+1} & \cdots & A_{rr} \end{Vmatrix}} = (-1)^{m_a-m_{a-1}-l_a}\alpha_{m_a+1}\lambda^{m_a-m_{a-1}} +$$

$$+\alpha_{m_a}\lambda^{m_a-m_{a-1}-1}+\cdots+\alpha_{m_{a-1}+2}\lambda_{m_{a-1}+1}, \tag{51}$$

которые здесь, так же как в случае многочленов (42), независимы.

В рассматриваемых нами пространствах можно также определить метрические коварианты эрмитовых квадрик, называемых центрами этих квадрик. В пространствах ${}^{l}\overline{S}_n(i)$ и ${}^{l}\overline{S}_n(i,j)$ центрами квадрик в основном случае являются вершины общего автополярного симплекса квадрики (1) и абсолюта (2), определяемые уравнением

$$(A-\lambda E)\,x=0. \tag{52}$$

В пространствах ${}^{l_0 l_1}\overline{S}_n^{m}(i)$ и ${}^{l_0 l_1}\overline{S}_n^{m}(i,j)$ центрами квадрики в основном случае являются вершины общего автополярного симплекса квадрик (1) и (16), определяемые уравнением

$$(A_{11}-\lambda E_1)\,x=0 \tag{53}$$

и точки, определяемые уравнением

$$\begin{pmatrix} A_{00}-\lambda E_0 & A_{01} \\ \overline{A}_{01}^{T} & A_{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}=0. \tag{54}$$

В пространствах ${}^{l_0 l_1 \ldots l_r}\overline{S}_n^{m_0 m_1 \ldots m_{r-1}}(i)$ и ${}^{l_0 l_1 \ldots l_r}\overline{S}_n^{m_0 m_1 \ldots m_{r-1}}(i, j)$ центром квадрики в основном случае являются вершины общего автополярного симплекса квадрик (1) и Q_r, определяемые уравнением

$$(A_{rr} - \lambda E_r)\, x_r = 0, \tag{55}$$

и точки, определяемые уравнениями

$$\begin{pmatrix} A_{aa} - \lambda E_a & A_{a, a+1} & \cdots & A_{ar} \\ A_{a+1, a} & A_{a+1, a+1} & \cdots & A_{a+1, r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{ra} & A_{r, a+1} & \cdots & A_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_a \\ x_{a+1} \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = 0. \tag{56}$$

В случае одномерных пространств $\overline{S}_1(i)$, $\overline{S}_1(i, j)$, $\overline{R}_1(i)$ и $\overline{R}_1(i, j)$, являющихся частными случаями пространств ${}^l\overline{S}_n(i)$, ${}^l\overline{S}_n(i, j)$ при $n = 1$, $l = 0$ и пространств ${}^{l_0 l_1}\overline{S}_n^m(i)$, ${}^{l_0 l_1}\overline{S}_n^m(i, j)$ при $n = 1$, $m = l_0 = l_1 = 0$, соответственно, изометричных сфере евклидова пространства R_3, гиперсфере евклидова пространства R_5 ([5], стр. 630), евклидовой плоскости R_2 и евклидову пространству R_4 ([5], стр. 576), эрмитовы квадрики изображаются окружностями на сфере R_3 и на плоскости R_2 и 3-мерными сферами на гиперсфере в R_5 и в пространстве R_4. В первых двух случаях центры квадрики изображаются двумя диаметрально противоположными центрами окружности как 3-мерной сферы, а в двух последних случаях — центром окружности или 3-мерной сферы и бесконечно удаленной точкой плоскости R_2 и пространства R_4 при их дополнении до конформной плоскости C_2 и конформного пространства C_4.

В случае унитарного евклидова пространства $\overline{R}_n(i)$, являющегося частным случаем пространства ${}^{l_0 l_1}\overline{S}_n^m(i)$ при $m = l_0 = l_1 = 0$, центры эрмитовой квадрики были определены А. Р. Амир-Моэзом [7].

Черновицкий Государственный университет,
Коломенский Педагогический институт,
Коми Государственный педагогический ин-тут

Поступило в редакцию
20.II.1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Е. Шилов, Введение в теорию линейных пространств, М., Гостехиздат. 1952.
2. Л. П. Птицына, Л. В. Пучкова, Л. В. Румянцева, Метрические инварианты уравнений квадрик в квазиэллиптических пространствах, Уч. зап. МГПИ им. Ленина (Вопросы дифф. и неевкл. геом.) (1963), стр. 265—277.
3. Е. У. Ясинская, Метрические инварианты пар плоскостей и уравнений квадрик и полунеевклидовых пространствах, Труды семинара по вект. и тенз. анализу при МГИ, вып. 12 (1962), стр. 315—337.
4. И. М. Яглом, Б. А. Розенфельд и Е. У. Ясинская, Проективные метрики, Успехи матем. наук, т. 19, вып. 5(119), 1964, стр. 51—113.
5. Б. А. Розенфельд, Неевклидовы геометрии, М., 1955.
6. Т. М. Климанова, Унитарные полуэллиптические пространства, Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-мат. и техн. наук, № 3, 1963, стр. 21—29.
7. Ali R. R. Amir-Moéz. Quadrics in a unitary space, L'Enseignement mathématique, т. 7, 1961, стр. 250—257.

HERMITO KVADRIKŲ LYGČIŲ INVARIANTAI NEEUKLIDINĖSE IR SEMINEEUKLIDINĖSE UNITARINĖSE ERDVĖSE

L. JEŽOVA-GUSEVA, T. KLIMANOVA, E. JASINSKAJA

(Reziumė)

Nustatoma Hermito kvadrikų lygčių invariantai neeuklidinės, kvazineeuklidinės ir semineeuklidinės erdvių judesių grupės atžvilgiu kompleksinių skaičių ir kvaternionų algebrose.

Parodoma, kad visų nurodytų tipų n-mačių erdvių Hermito kvadrikų lygčių, nepriklausomų metrinių invariantų skaičius bendru atveju yra lygus $n+1$.

Metriniai invariantai kompleksinėse erdvėse yra koeficientai daugianarių, kurie lygūs determinantams matricų, sudarytų iš Hermito kvadrikų lygčių koeficientų ir erdvių absoliutų, o kvaternionų erdvėse — koeficientai daugianarių lygčių analoginių matricų pusiaudeterminantų kvadratinėms šaknims.

METRIC INVARIANTS OF EQUATIONS OF HERMITEAN QUADRICS IN UNITARY NON-EUCLIDEAN AND SEMI-NON-EUCLIDEAN SPACES

L. EZHOVA-GUSEVA, T. KLIMANOVA, E. YASINSKAYA

(Summary)

The invariants of equations of Hermitean quadrics under the groups of motions of unitary non-Euclidean, quasi-non-Euclidean and semi-non-Euclidean spaces over the algebras of complex numbers and quaternions are defined. It is shown that the number of independent metric invariants of equations of Hermitean quadrics of n-dimensional spaces of all considered types in the general case is equal to $n+1$. The metric invariants in complex spaces are the coefficients of polynomials equal to determinants of matrices formed from coefficients of equations of Hermitean quadrics and Absolutes of spaces, and in quaternion spaces are the coefficients of polynomials equal to square routs from semideterminants of analogous matrices.