ОБ АФФИННОЙ НОРМАЛИ ПОВЕРХНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ СО СВЯЗНОСТЬЮ

А. М. БЕРЕЗМАН

Г. Ф. Лаптев построил инвариантное оснащение гиперповерхности в N-мерных пространствах проективной и аффинной связности [2], [3]. В частности, он ввел линейный объект, определяющий аффинную нормаль гиперповерхности. В настоящем сообщении дается геометрическая интерпретация этого объекта в терминах соприкасающихся квадрик поверхности для пространства аффинной связности без кручения.

Рассмотрим инфинитезимальные перемещения локального репера в трехмерном пространстве аффинной связности:

$$dM=\omega^J \mathbf{e}_J,$$
$$d\mathbf{e}_J=\omega_J^K \mathbf{e}_K \qquad (J,\ K=1,\ 2,\ 3).$$

Уравнения структуры пространства аффинной связности без кручения имеют следующий вид [1]:

$$(\omega^I)'=\omega^K\wedge\omega_K^I,$$
$$(\omega_J^I)'=\omega_J^K\wedge\omega_K^I+R_{JKL}^I\,\omega^K\wedge\omega^L.$$

Если начало репера совмещено с точкой поверхности, а векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ расположены в касательной плоскости, то поверхность определяется уравнением $\omega^3=0$. Продолжая его, получим

$$\omega_i^3=a_{ij}\,\omega^j$$
$$da_{ij}-a_{ik}\,\omega_j^k-a_{kj}\,\omega_i^k+a_{ij}\,\omega_3^3+2R_{ijk}^3\,\omega^k=a_{ijk}\,\omega^k \qquad (i,\ j,\ k=1,\ 2). \tag{1}$$

При этом a_{ij}, a_{ijk} симметричны по всем своим индексам. В общем случае поверхность несет два семейства асимптотических [1]. Направим векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ вдоль асимптотических. При подходящей нормировке вектора $\mathbf{e}_3$ получим:

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & i\neq j\\ 0, & i=j.\end{cases}$$

Для этих значений a_{ij} уравнения (1) дадут

$$-2\omega_1^2=a_{111}\,\omega^1+(a_{112}-2R_{112}^3)\,\omega^2,$$
$$\omega_3^3-\omega_1^1-\omega_2^2=a_{121}\,\omega^1+a_{122}\,\omega^2,$$
$$-2\omega_2^1=(a_{221}-2R_{221}^3)\,\omega^1+a_{222}\,\omega^2.$$

Уравнения стационарной подгруппы, сохраняющей векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ и нормировку вектора $\mathbf{e}_3$, имеют вид

$$\delta(a_{112}-2R^3_{112})=2\omega^2_3(\delta),$$
$$\delta a_{121}=0, \qquad \delta a_{122}=0,$$
$$\delta(a_{221}-2R^3_{221})=2\omega^1_3(\delta).$$

Следовательно, можно за счет выбора вторичных параметров обратить в нуль выражения

$$\Lambda_{112}=a_{112}-2R^3_{112}, \quad \Lambda_{221}=a_{221}-2R^3_{221},$$

вследствие чего получаем

$$a_{112}=2R^3_{112}, \quad a_{221}=2R^3_{221}.$$

Окончательно таблица компонент инфинитезимальных преобразований репера, присоединенного к точке поверхности, принимает вид

$$\omega^3=0,$$
$$\omega^3_1=\omega^2,$$
$$\omega^3_2=\omega^1,$$
$$-2\omega^2_1=a_{111}\,\omega^1,$$
$$\omega^3_3-\omega^1_1-\omega^2_2=2R^3_{112}\,\omega^1+2R^3_{221}\,\omega^2,$$
$$-2\omega^1_2=a_{222}\,\omega^2.$$

Репер определен до нормировки векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$. Установим геометрический смысл полученной нормали (направление вектора $\mathbf{e}_3$). Для этого развернем пространство аффинной связности на его касательное аффинное пространство A в точке M сначала вдоль асимптотической, касающейся вектора $\mathbf{e}_1$, а затем вдоль асимптотической, касающейся вектора $\mathbf{e}_2$. Перемещениям вдоль этих асимптотических присвоим символы дифференцирования d_1 и d_2:

$$\omega^1(d_1)=1, \quad \omega^2(d_1)=0,$$
$$\omega^1(d_2)=0, \quad \omega^2(d_2)=1.$$

В результате развертывания мы получим в пространстве A две кривые, проходящие через точку M. Пусть кривая K_1 есть развертка асимптотической $\omega^2=0$ на пространство A, а кривая K_2 – развертка асимптотической $\omega^1=0$ на это пространство. В каждой точке кривой K_1 или K_2 определен аффинный репер, причем вектор $\mathbf{e}_1$, направлен по касательной к кривой K_1, а вектор $\mathbf{e}_2$ направлен по касательной к кривой K_2.

Рассмотрим в точке M и в двух бесконечно близких к ней точках M' и M'' кривой K_2 „асимптотические касательные" l, l' и l'', имеющие направление вектора $\mathbf{e}_1$ в этих точках. Потребуем, чтобы квадрика

$$c(M,\ M)=0 \tag{2}$$

содержала прямые l и l' и касалась прямой l''. Среди квадрик, обладающих требуемым свойством, имеется единственный параболоид. Его ось определяет вектор $\mathbf{E}_1$, инвариантно связанный с поверхностью в точке M. Проводя аналогичное построение для кривой K_1, получим другой, вообще говоря, параболоид и другой вектор $\mathbf{E}_2$. Плоскость α_1, содержащая векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{E}_1$, пересекается с плоскостью α_2, содержащей $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{E}_2$, по аффинной нормали, которая при рассмотренной выше канонизации определяется вектором $\mathbf{e}_3$.

Проделаем необходимые выкладки. Условие того, что квадрика (2) касается прямой l, имеет вид

$$c(M,\ M)=0,\quad c(M,\ \mathbf{e}_1)=0. \tag{3}$$

Для того, чтобы получить условие касания квадрики с прямой l', продифференцируем уравнения (3) в направлении кривой K_2. Получим

$$c(d_2 M,\ M)=0,\quad c(d_2 M,\ \mathbf{e}_1)+c(M,\ d_2\,\mathbf{e}_1)=0,$$

откуда следует

$$c(M,\ \mathbf{e}_2)=0,\quad c(\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_1)+c(M,\ \mathbf{e}_3)=0. \tag{4}$$

Дифференцируя соотношения (4), получим условие касания квадрики с l'':

$$c(\mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_2)=0,$$

$$\omega_2^1(d_2)\ c(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_1)+\omega_2^2(d_2)\ c(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2)+\omega_1^1(d_2)\ c(\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_1)+\omega_1^2(d_2)\ c(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2)+$$
$$+2c(\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3)+\omega_3^3(d_2)\ c(M,\ \mathbf{e}_3)=0,$$

которое приводится к виду

$$c(\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_2)=0,$$

$$\omega_2^1(d_2)\ c(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_1)+[\omega_3^3(d_2)-\omega_1^1(d_2)-\omega_2^2(d_2)]\ c(M,\ \mathbf{e}_3)+2c(\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3)=0.$$

Наконец, потребуем, чтобы квадрика содержала прямые l и l'. Для того, чтобы квадрика содержала прямую l, достаточно потребовать, чтобы

$$c(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_1)=0.$$

Дифференцируя это последнее соотношение вдоль K_2, получим условие того, что квадрика содержит l':

$$\omega_1^3(d_2)\ c(\mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_1)=0.$$

Итак, коэффициенты квадрики $c_{ik}\,x^i\,x^k=0$ удовлетворяют следующим уравнениям:

$$c_{00}=c_{01}=c_{02}=c_{11}=c_{22}=c_{13}=0,$$
$$c_{12}=-c_{03},$$
$$2R_{221}^3\ c_{03}+2c_{23}=0.$$

Если дополнительно потребовать, чтобы это был параболоид, то

$$c_{33}=0.$$

Уравнение параболоида имеет вид

$$x^1\,x^2-x^0\,x^3+R_{221}^3\,x^2\,x^3=0.$$

Направляющий вектор оси параболоида

$$\mathbf{E}_1=\mathbf{e}_3-R_{221}\ \mathbf{e}_1.$$

Проводя аналогичное построение для кривой K_1, получим вектор

$$\mathbf{E}_2=\mathbf{e}_3-R_{112}\ \mathbf{e}_2.$$

Следовательно, плоскости $\alpha_1=(M,\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{E}_1)$ и $\alpha_2=(M,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{E}_2)$ пересекаются по прямой, имеющей направление вектора $\mathbf{e}_3$.

Линейный объект, введенный в [3], имеет вид $\tilde{b}_i\,a^{ik}$, где

$$a_{ij}\,a^{jk}=\delta_i^k,$$
$$\tilde{b}_k=a^{ij}\ \Lambda_{kij}.$$

При выбранной канонизации

$$a^{ij}=\begin{cases}1, & i\neq j\\ 0, & i=j.\end{cases}$$

Следовательно,

$$\tilde{b}_1 = \Lambda_{112}, \quad \tilde{b}_2 = \Lambda_{221}.$$

Этому линейному объекту соответствует вектор аффинной нормали

$$\bar{\mathbf{n}} = \frac{1}{4} \tilde{b}_i a^{ik} \mathbf{e}_k + \mathbf{e}_3.$$

При выбранной канонизации

$$\mathbf{n} = \frac{1}{4} (\tilde{b}_2 \mathbf{e}_1 + \tilde{b}_1 \mathbf{e}_2) + \mathbf{e}_3 = \frac{1}{4} (\Lambda_{221} \mathbf{e}_1 + \Lambda_{112} \mathbf{e}_2) + \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3.$$

Таким образом, при выбранной канонизации вектор $\mathbf{e}_3$ совпадает с $\mathbf{n}$. Тем самым установлен геометрический смысл $\mathbf{n}$.

Заметим, что в собственно аффинном пространстве векторы $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ ов падают с вектором аффинной нормали Бляшке [4].

МГПИ им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию
5.IV.1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Картан, Пространства аффинной, проективной и конформной связности, 1962.
2. Г. Ф. Лаптев, Об инвариантном оснащении поверхности в пространстве аффинной связности, ДАН, 126, № 3 (1959).
3. Г. Ф. Лаптев, Гиперповерхность в пространстве проективной связности, ДАН, 121, № 1 (1958).
4. П. Н. Глаголева, Аффинная нормаль и некоторые задачи, связанные с нею, Уч. зап. МГПИ, т. 26 (1951).

APIE HIPERPAVIRŠIAUS AFININĘ NORMALĘ AFININIO SĄRYŠIO ERDVĖJE

A. BEREZMANAS

(Reziumė)

G. Laptevas analiziniu būdu apibrėžė hiperpaviršiaus afininę normalę afininio sąryšio erdvėje. Šiame straipsnyje, su paprastų geometrinių konstrukcijų pagalba, nusakoma afininė normalė trijų matavimų afininio sąryšio erdvėje. Kartano metodo naudojimas supaprastina reikalingus skaičiavimus.

ABOUT THE AFFINE NORMAL OF A HYPERSURFACE IN CONNECTED SPACE

A. BEREZMAN

(Summary)

The affine normal of a hypersurface in space of affine connection was determined by G. Laptev in a purely analitic way. In the present note the author gives some simple geometrical constructions leading to the affine normal in the three dimensional space of affine connection. The use of Cartan's method allows to simpilfy the neccessary calculations.