1966

О ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ СУММ ДИСКРЕТНЫХ ПРОЦЕССОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

В. ЛЮТИКАС

Пусть $\{X(t),\ t=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}$ – дискретный процесс восстановления типа $F(x)$, т. е. $X(t)$ равно максимальному значению n, для которого

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k \leqslant t, \text{ где } \xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ \ldots$$

– последовательность независимых неотрицательных одинаково распределенных случайных величин с общей функцией распределения $F(x)$, принимающих только целочисленные значения с вероятностями

$$p_k=P\ \{\xi_i=k\}, \qquad i=1,\ 2,\ 3,\ \ldots.$$

Мы будем рассматривать набор

$$X_1(t),\ X_2(t),\ \ldots,\ X_n(t)$$

независимых разно распределенных дискретных процессов восстановления. $\sum_{k=1}^{n} X_k(t)$ является числом восстановлений за отрезок времени $(0,\ t)$ в системе, состоящей из n неоднородных элементов.

Б. Григелионисом [1] была доказана асимптотическая нормальность сумм $\sum_{k=1}^{n} X_k(t)$ при больших значениях n и t в случае непрерывных одинаково распределенных процессов восстановления. В настоящей статье приводятся соответствующие результаты в случае дискретных разно распределенных процессов восстановления.

При решении этой задачи будем пользоваться семиинвариантами случайной величины $X(t)$. В статье [4] доказано, что при условии

$$\mu_{m+s+1}=\mathbf{M}\,\xi_i^{m+s+1}<\infty, \text{ где } m>0 \text{ и } s\geqslant 0$$

семиинвариант m-того порядка числа восстановлений

$$\Gamma_m(t)=\gamma_m t+\delta_m+O\left(\frac{\ln t}{t^s}\right), \tag{1}$$

где γ_m – рациональное выражение от $\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_m$, а δ_m – рациональное ыражение от $\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_{m+1}$.

При доказательстве асимптотической нормальности сумм $\sum_{k=1}^{n} X_k(t)$ для одинаково распределенных дискретных процессов восстановления достаточно воспользоваться выражением (1). Но в случае сумм разнораспределенных процессов восстановления этого недостаточно, так как требуется найти строение остаточного члена формулы (1). К решению этой задачи мы приступим, начав с доказательства следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть* $T_k = \sum_{i \geqslant k+1} p_i$, *где* $p_i = P\{\xi_j = i\}$ *и*

$$r_j(z) = \sum_{k=j}^{\infty} T_k \left[\sum_{i=0}^{k-j} \frac{(k-i-1)(k-i-2)\ldots(k-i-j+1)}{(j-1)!} z^i \right]. \tag{2}$$

Если $\mu_{\nu+j+1} < \infty$, *то*

$$r_j^{(\nu)}(1) = \frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+j+1)} \sum_{l=1}^{\nu+j+1} S_{\nu+j+1}^{(l)} \mu_l, \tag{3}$$

где $S_{j+\nu+1}^{(l)}$ *— числа Стирлинга первого рода.*

Доказательство. Непосредственным вычислением из (2) получаем

$$r_j^{(\nu)}(1) = \frac{1}{(j-1)!} \sum_{k=\nu+j}^{\infty} T_k \left[\sum_{i=\nu}^{k-j} \frac{(k-i-1)!\, i!}{(k-i-j)!\,(i-\nu)!} \right]. \tag{4}$$

Имеем $Q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k z^k$, где $T_k = \sum_{i \geqslant k+1} p_i$. Тогда

$$Q^{(j+\nu)}(1) = \sum_{k=\nu+j}^{\infty} T_k k(k-1) \ldots (k-j-\nu+1). \tag{5}$$

Но так как

$$\sum_{i=\nu}^{k-j} \frac{(k-i-1)!\, i!}{(k-j-i)!\,(i-\nu)!} = \frac{(j-1)!\, k(k-1)\ldots(k-j-\nu+1)}{(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+j)},$$

то из (4) и (5) следует

$$r_j^{(\nu)}(1) = \frac{Q^{(j+\nu)}(1)}{(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+j)}. \tag{6}$$

Доказано [4], что

$$Q^{(j)}(1) = \frac{1}{j+1} \sum_{l=1}^{j+1} S_{j+1}^{(l)} \mu_l, \tag{7}$$

а $S_{j+1}^{(l)}$ — числа Стирлинга первого рода. Из (6) и (7) непосредственно следует (3).

Лемма 2. *Для* $|\varphi| \leqslant \frac{\mu_1}{\mu_2 - \mu_1}$ *верно*

$$|Q(e^{i\varphi})| \geqslant \frac{1}{2} \mu_1. \tag{8}$$

Доказательство. Так как $Q(1) = \mu_1$, то

$$\mu_1 - Q(e^{i\varphi}) = \sum_{m=0}^{\infty} T_m (1 - e^{im\varphi}). \tag{9}$$

Пользуясь неравенством $|e^{i\alpha} - 1| \leqslant |\alpha|$, из (9) получаем

$$\mu_1 - |Q(e^{i\varphi})| \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} |\varphi| m T_m = |\varphi| \cdot \frac{\mu_2 - \mu_1}{2}.$$

Тогда

$$|Q(e^{i\varphi})| \geqslant \mu_1 - |\varphi| \cdot \frac{\mu_2 - \mu_1}{2}.$$

Отсюда в силу условия леммы получаем (8).

Обозначим

$$\alpha(N) = \min_{q \geqslant 2} P\{\xi_1 \not\equiv 0 \pmod{q},\ \xi_1 \leqslant N\}. \tag{10}$$

Лемма 3. *Для любого* $0 < N < \infty$ *и* $\frac{\pi}{N} \leqslant \varphi \leqslant \pi$ *верно*

$$|Q(e^{i\varphi})| \geqslant \frac{\alpha(N)}{N^2}. \tag{11}$$

Доказательство. Известно [4], что $Q(z) = \frac{1-P(z)}{1-z}$, где $P(z) = \sum_{m=1}^{\infty} p_m z^m$.

Пусть $\varphi = 2\pi\varphi'$. Тогда

$$|Q(e^{i\varphi})| = |Q(e^{2\pi\varphi' i})| \geqslant \sum_{m=1}^{\infty} p_m \sin^2 m\pi\varphi'. \tag{12}$$

Достаточно разобрать случай $\frac{1}{2N} \leqslant \varphi' \leqslant \frac{1}{2}$.

Пусть

$$\varphi' = \frac{a}{q} + \frac{\Theta}{q\tau},$$

где $|\Theta| \leqslant 1$, о.н.д. $(a, q) = 1$, $2 \leqslant q \leqslant \tau$ и $\tau = 2N$. Тогда

$$|Q(e^{2\pi\varphi' i})| \geqslant \sum_{m=1}^{\infty} p_m \sin^2\left[\frac{am}{q} + \left(\varphi' - \frac{a}{q}\right) m\right]\pi \geqslant$$

$$\geqslant \min_{q \geqslant 2} \sum_{\substack{m \not\equiv 0 \pmod{q} \\ m \leqslant \frac{1}{2q\left|\varphi' - \frac{a}{q}\right|}}} p_m \sin^2 \frac{\pi}{2q} \geqslant \min_{q \geqslant 2} \sum_{\substack{m \not\equiv 0 \pmod{q} \\ m \leqslant N}} p_m \sin^2 \frac{\pi}{2q}. \tag{13}$$

Так как при $q \geqslant 2$

$$\left|\sin\frac{\pi}{2q}\right| \geqslant \frac{1}{q} \geqslant \frac{1}{N},$$

то из (13) следует (11).

На основании лемм (2) и (3) непосредственно получаем следующее для нас важное

Следствие 1. Для любого $\pi \cdot \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1} \leqslant N < \infty$ и $0 \leqslant |\varphi| \leqslant \pi$ верно

$$|Q(e^{i\varphi})| \geqslant \min\left\{\frac{\mu_1}{2}, \frac{\alpha(N)}{N^2}\right\}. \tag{14}$$

Лемма 4. *Если для какого нибудь* $\pi \cdot \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1} \leqslant N \leqslant \infty$ *существует* $\alpha(N) > 0$ *и* $\mu_{m+s+2} < \infty$, *то момент* m*-того порядка числа восстановлений выражается формулой*

$$\mathbf{M}\, X^m(t) = \gamma_{1m} t^m + \gamma_{2m} t^{m-1} + \ldots + \gamma_{mm} t + \gamma_{m+1,m} + \frac{(t-s)!}{t!} C_{ms} \tag{15}$$

где $|C_{ms}| \leqslant \gamma_{m+s+2,m}$ *и* γ_{im} $(i = 1, 2, \ldots, m+1, m+s+2)$ *рациональные выражения от* $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_i$.

Доказательство. Известно [3], что производящая функция моментов m-того порядка числа восстановлений

$$G_m(z)=\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\frac{\sum\limits_{n=0}^{m-j}C^j_{m-n}a_n^{(m)}}{(1-z)^{m-j+1}Q^{m-j}(z)},$$

где $a_n^{(m)}$ – постоянные, вычисляемые при помощи рекуррентного соотношения

$$a_n^{(m)}=(n+1)\,a_n^{(m-1)}+(m-n)\,a_{n-1}^{(m-1)},$$

когда

$$a_0^{(2)}=1,\ a_1^{(2)}=1\ \text{и}\ a_n^{(m)}=0$$

для всех $n\geqslant m$.

Разложением этой функции в ряд Лорана получаем

$$G_m(z)=\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\left\{\sum_{n=0}^{m-j}C^j_{m-n}a_n^{(m)}\sum_{k=0}^{m-j}\frac{(-1)^k\left[\frac{1}{Q^{m-j}(z)}\right]^{(k)}_{z=1}}{k!\,(1-z)^{m-j-k+1}}\right\}+$$

$$+\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\sum_{n=0}^{m-j}C^j_{m-n}a_n^{(m)}\cdot\frac{W_{m-j+1}(z)}{\mu_1^{2(m-j)}Q^{m-j}(z)},$$

где $W_{m-j+1}(z)$ – целая рациональная функция от $r_1(z),\ r_2(z),\ \ldots,\ r_{m-j+1}(z)$, определяемых соотношением (2).

Так как $\mathbf{M}X^m(t)$ является коэффициентом при z^t в разложении $G_m(z)$, то

$$\mathbf{M}X^m(t)=\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\left\{\sum_{n=0}^{m-j}C^j_{m-n}a_n^{(m)}\sum_{k=0}^{m-j}\frac{(-1)^k}{k!}\cdot\left[\frac{1}{Q^{m-j}(z)}\right]^{(k)}_{z=1}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{(t+1)(t+2)\ldots(t+m-j-k)}{(m-k-j)!}\right\}+\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\sum_{n=0}^{m-j}C^j_{m-n}a_n^{(m)}\cdot$$

$$\cdot\left\{\frac{1}{\mu_1^{2(m-j)}\,t!}\cdot\left[\frac{W_{m-j+1}(z)}{Q^{m-j}(z)}\right]^{(t)}_{z=0}\right\}. \tag{16}$$

Или, на основании (3) и (7),

$$\mathbf{M}X^m(t)=\gamma_{1m}t^m+\gamma_{2m}t^{m-1}+\ldots+\gamma_{mm}t+\gamma_{m+1,\,m}+$$

$$+\frac{1}{t!}\sum_{j=0}^{m}\frac{K_{mj}}{\mu_1^{2(m-j)}}\cdot\left[\frac{W_{m-j+1}(z)}{Q^{m-j}(z)}\right]^{(t)}_{z=0}, \tag{17}$$

где K_{mj} – постоянное, независящее от z и t.

В силу условий леммы

$$|Q(e^{i\varphi})|\geqslant\min\left\{\frac{\mu_1}{2},\ \frac{\alpha(N)}{N^2}\right\},$$

так как $\alpha(N)>0$, то

$$\left(\frac{W_{m-j+1}(z)}{Q^{m-j}(z)}\right)^{(t)}_{z=0}=\frac{t!}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}\frac{W_{m-j+1}(z)}{Q^{m-j}(z)\,z^{t+1}}\,dz.$$

Проведем s-кратное интегрирование по частям

$$\int\limits_{|z|=1}\frac{W_{m-j+1}(z)}{Q^{m-j}(z)\,z^{t+1}}\,dz=\frac{(t-s)!}{t!}\int\limits_{|z|=1}\left(\frac{W_{m-j+1}(z)}{Q^{m-j}(z)}\right)^{(s)}\cdot\frac{dz}{z^{t-s+1}}. \tag{18}$$

Ясно, что

$$\left(\frac{W_{m-j+1}(z)}{Q^{m-j}(z)}\right)^{(s)}=\frac{U_{m-j+1}(z)}{Q^{m-j+s}(z)}, \tag{19}$$

где $U_{m-j+1}(z)$ — целая рациональная функция от производных

$$r_j^{(i)}(z) \qquad (i=0,\ 1,\ \ldots,\ s;\ j=0,\ 1,\ \ldots,\ m+1).$$

Но при $|z|\leqslant 1$

$$|r_j^{(i)}(z)|\leqslant|r_j^{(i)}(1)|. \tag{20}$$

Из (3) и (20) при условии $\mu_{m+s+2}<\infty$ получаем

$$|r_j^{(i)}(z)|\leqslant\frac{1}{(i+1)(i+2)\ldots(i+j+1)}\cdot\sum_{l=1}^{i+j+1}|S_{i+j+1}^{(l)}|\,\mu_l, \tag{21}$$

где $i=0,\ 1,\ \ldots,\ s;\ j=0,\ 1,\ \ldots,\ m+1.$

Пусть $\min\left\{\frac{\mu_1}{2},\ \frac{\alpha(N)}{N^2}\right\}=c$. Тогда в силу (8), (11), (20) и (21) получаем

$$\left|\left(\frac{W_{m-j+1}(z)}{Q^{m-j}(z)}\right)^{(t)}_{z=0}\right|\leqslant\frac{2^{2(m-j+s)-1}(t-s)!}{\pi c^{m-j+s}}\cdot\gamma_{m+s-j+2,\,m}, \tag{22}$$

где $\gamma_{m+s-j+2,\,m}$ — целая рациональная функция от $\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_{m+s-j+2}$.

Пусть

$$C_{ms}=\frac{1}{(t-s)!}\sum_{j=0}^{m}\frac{K_{mj}}{\mu_1^{2(m-j)}}\left(\frac{W_{m-j+1}(z)}{Q^{m-j}(z)}\right)^{(t)}_{z=0}. \tag{23}$$

Тогда из (17) следует

$$\mathbf{M}X^m(t)=\gamma_{1m}t^m+\gamma_{2m}t^{m-1}+\ldots+\gamma_{mm}t+\gamma_{m+1,\,m}+\frac{(t-s)!}{t!}C_{ms}.$$

Из (22) и (23) имеем

$$|C_{ms}|\leqslant\frac{1}{(t-s)!}\sum_{j=0}^{m}\frac{|K_{mj}|}{\mu_1^{2(m-j)}}\left|\left(\frac{W_{m-j+1}(z)}{Q^{m-j}(z)}\right)^{(t)}_{z=0}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{j=0}^{m}\frac{|K_{mjs}|}{\mu_1^{2(m-j)}c^{m-j+s}}\cdot\gamma_{m+s-j+2,\,m}=\gamma_{m+s+2,\,m}, \tag{24}$$

что и требовалось доказать.

Лемма 5. *Пусть для какого-нибудь* $\pi\cdot\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_1}\leqslant N<\infty$ *существует* $\alpha(N)>0.$

Если $\mu_{m+s+2}<\infty$, *то семиинвариант* m*-того порядка числа восстановлений вычисляется формулой*

$$\mathbf{\Gamma}_m(t)=\gamma_m t+\delta_m+V_{ms}(t), \tag{25}$$

где

$$V_{ms}(t)=\sum_{\nu=1}^{m}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}\cdot\sum_{m_1+\ldots+m_\nu=m}\frac{m!}{m_1!\,m_2!\,\ldots\,m_\nu!}\cdot$$

$$\cdot\left\{\sum_{j=1}^{\nu}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{\nu}(\gamma_{1m_i}t^{m_i}+\ldots+\gamma_{m_i m_i}t+\gamma_{m_i+1,\,m_i})\cdot\frac{(t-s-m+m_j)!}{t!}C_{m_js}+\right.$$

$$+\sum_{1\leqslant j\leqslant k\leqslant\nu}\ \prod_{1\leqslant i\leqslant\nu}(\gamma_{1m_i}t^{m_i}+\ldots+\gamma_{m_i m_i}t+\gamma_{m_i+1,\,m_i})\cdot$$

$$\left.\cdot\frac{(t-s-m+m_j)!\,(t-s-m+m_k)!}{(t!)^2}C_{m_js}\cdot C_{m_ks}+\ldots+\prod_{i=1}^{\nu}\frac{(t-s-m+m_i)!\,C_{m_is}}{(t!)^\nu}\right\}. \tag{26}$$

Доказательство. Известно, что семиинвариант m-того порядка числа восстановлений $X(t)$ определяется через моменты этой же случайной величины следующим соотношением:

$$\Gamma_m(t)=\sum_{\nu=1}^{m}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}\cdot\sum_{m_1+\ldots+m_\nu=m}\frac{m!}{m_1!\,m_2!\,\ldots\,m_\nu!}\cdot\prod_{i=1}^{\nu}\mathbf{M}X^{m_i}(t).$$

Применяя к последнему (15), получаем

$$\Gamma_m(t)=\sum_{\nu=1}^{m}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}\cdot\sum_{m_1+\ldots+m_\nu=m}\frac{m!}{m_1!\,\ldots\,m_\nu!}\cdot\prod_{i=1}^{\nu}(\gamma_{1m_i}t^{m_i}+\ldots+\gamma_{m_i+1,\,m_i})+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{m}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}\cdot\sum_{m_1+\ldots+m_\nu=m}\frac{m!}{m_1!\,\ldots\,m_\nu!}\cdot\left\{\sum_{j=1}^{\nu}\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant\nu\\ i\neq j}}(\gamma_{1m_i}t^{m_i}+\ldots+\gamma_{m_i+1,\,m_i})\times\right.$$

$$\left.\times\frac{(t-m-s+m_j)!}{t!}C_{m_js}+\ldots+\prod_{i=1}^{\nu}\frac{(t-s-m+m_i)!}{(t!)^{\nu}}\cdot C_{m_is}\right\}. \qquad (27)$$

Доказано [4], что

$$\sum_{\nu=1}^{m}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}\cdot\sum_{m_1+\ldots+m_\nu=m}\frac{m!}{m_1!\,\ldots\,m_\nu!}\prod_{i=1}^{\nu}(\gamma_{1m_i}t^{m_i}+\ldots+\gamma_{m_i+1,\,m_i})=\gamma_m t+\delta_m, \quad (28)$$

где γ_m — рациональное выражение от $\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_m$,

δ_m — рациональное выражение от $\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_{m+1}$.

Из (27) и (28) следует (25).

Теперь, с помощью результатов леммы (5), можем приступить к доказательству основной теоремы.

Пусть имеется набор последовательностей

$$\xi_1^{(k)},\ \xi_2^{(k)},\ \xi_3^{(k)},\ \ldots$$

где $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, независимых неотрицательных одинаково распределенных случайных величин с функциями распределения $F_k(x)$ $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. Этому будет соответствовать набор процессов восстановления

$$X_1(t),\ X_2(t),\ \ldots,\ X_n(t),$$

о котором говорилось в начале этой статьи. Пусть, таким образом,

$$\sum_{k=1}^{n}X_k(t)$$

представляет нам сумму разно распределенных дискретных процессов восстановления. Чтоб исключить тривиальные случаи, будем предполагать, что $\xi_i^{(k)}$ не равны константе с вероятностью единица.

Обозначим

$$\Delta_k^2=\frac{\mu_{2,\,k}-\mu_{1,\,k}^2}{\mu_{1,\,k}^3},$$

где

$$\mu_{i,k} = \mathbf{M}\,(\xi_1^{(k)})^i;$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta_k^2; \quad Y_n(t) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} [X_k(t) - \mathbf{M}\,X_k(t)]}{\sqrt{tS_n}};$$

$$p_{j,k} = P\,\{\xi_1^{(k)} = j\}; \quad T_m^{(k)} = \sum_{j \geqslant m+1} p_{j,k};$$

$$Q_k(z) = \sum_{m=0}^{\infty} T_m^{(k)} z^m; \quad F_{n,t}(x) = P\,\{Y_n(t) < x\}.$$

Обозначим

$$\alpha_k(N) = \min_{q \geqslant 2} P\,\{\xi_1^{(k)} \not\equiv 0 \pmod q),\ \xi_1^{(k)} \leqslant N\}.$$

Предположим, что

(**A**). существуют $\mu = \varliminf\limits_{k\to\infty} \mu_{1,k} > 0$ и $M = \varlimsup\limits_{k\to\infty} \mu_{6,k} < \infty$,

(**B**). существует $\pi \cdot \frac{\mu_{2,k} - \mu_{1,k}}{\mu_{1,k}} \leqslant N < \infty$ такое, что

$$\alpha_N = \varliminf_{k\to\infty} \alpha_k(N) > 0.$$

Обозначим $\overline{M} = \min\left\{\frac{\mu}{2}, \frac{\alpha_N}{N^2}\right\}$. Тогда верна

Теорема 1. *При условиях* (**A**) *и* (**B**) *имеет место соотношение*

$$\sup_{-\infty < x < \infty} |F_{n,t}(x) - \Phi(x)| \leqslant g(M, \overline{M}) \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{\sqrt{1}}\right), \tag{29}$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du,$$

а $g(M, \overline{M})$ *— рациональное выражение от* $M^{-\infty}$ *и* $\overline{M}$.

Доказательство. Пусть

$$f_{k,t}(z) = \mathbf{M}\,e^{iz\,[X_k(t) - \mathbf{M}\,X_k(t)]}.$$

В силу независимости процессов $X_k(t)$ имеем

$$f_{n,t}(z) = \mathbf{M}\,e^{izY_n(t)} \prod_{k=1}^{n} \mathbf{M}\,e^{\frac{iz\,[X_k(t) - \mathbf{M}\,X_k(t)]}{\sqrt{tS_n}}} = \prod_{k=1}^{n} f_{k,t}\left(\frac{z}{\sqrt{tS_n}}\right). \tag{30}$$

Но

$$f_{k,t}\left(\frac{z}{\sqrt{tS_n}}\right) = 1 - \frac{z^2}{2tS_n}\,\mathbf{M}\,[X_k(t) - \mathbf{M}\,X_k(t)]^2 + \mathbf{M}\,R\left[\frac{z}{\sqrt{tS_n}},\ X_k(t) - \mathbf{M}\,X_k(t)\right], \tag{31}$$

где

$$\left|\mathbf{M}\,R\left(\frac{z}{\sqrt{tS_n}},\ X_k(t) - \mathbf{M}\,X_k(t)\right)\right| \leqslant \frac{|z|^3}{6tS_n\sqrt{tS_n}} \cdot$$

$$\cdot\,|\mathbf{M}\,[X_k(t) - \mathbf{M}\,X_k(t)]^3| + \frac{z^4}{24\,t^2 S_n^2}\,\mathbf{M}\,[X_k(t) - \mathbf{M}\,X_k(t)]^4. \tag{32}$$

В силу известных соотношений между центральными моментами и семиинвариантами, получаем

$$\mathbf{M}\,[X_k(t) - \mathbf{M}\,X_k(t)]^2 = \Gamma_{2,k}(t),$$

$$\mathbf{M}\,[X_k(t) - \mathbf{M}\,X_k(t)]^3 = \Gamma_{3,k}(t),$$

$$\mathbf{M}\,[X_k(t) - \mathbf{M}\,X_k(t)]^4 = \Gamma_{4,k}(t) + 3\Gamma_{2,k}^2(t),$$

где $\Gamma_{i,k}(t)$ $(i=2, 3, 4)$ — семиинвариант i-того порядка случайной величины $X_k(t)$. При условии (**A**) и (**B**), в силу следствия (1) и лемм (4) и (5) получаем

$$\Gamma_{2,k}(t)=\Delta_k^2\cdot t+\left(\frac{\mu_{2,k}}{2\mu_{1,k}^3}-\frac{1}{2\mu_{1,k}}+\frac{5\mu_{2,k}^2}{4\mu_{1,k}^4}-\frac{1}{2\mu_{1,k}^2}-\frac{2\mu_{3,k}}{3\mu_{1,k}^3}-\frac{\mu_{2,k}}{2\mu_{1,k}^2}\right)+$$
$$+\frac{|C_{22}^{(k)}|}{t(t-1)}-\frac{|C_{12}^{(k)}|^2}{t^2(t-1)^2(t-2)^2}, \tag{33}$$

где постоянные $C_{22}^{(k)}$ и $C_{12}^{(k)}$ определяем неравенством (24).

Пусть

$$N_2^{(2)}(\mu_{1,k},\ \mu_{2,k},\ \mu_{3,k})=\frac{\mu_{2,k}}{2\mu_{1,k}^3}-\frac{1}{2\mu_{1,k}}+\frac{5\mu_{2,k}^2}{4\mu_{1,k}^4}-\frac{1}{2\mu_{1,k}^2}-\frac{2\mu_{3,k}}{3\mu_{1,k}^3}-\frac{\mu_{2,k}}{2\mu_{1,k}^2}.$$

Обозначим через $h_i^{(j)}(M,\ \overline{M})$ рациональные выражения от M и $\overline{M}$. Тогда в силу условий теоремы

$$|N_2^{(2)}(\mu_{1,k},\ \mu_{2,k},\ \mu_{3,k})|\leqslant h_2^{(2)}(M,\ \overline{M}). \tag{34}$$

Пусть

$$N_{3,k}^{(2)}(t)=\frac{|C_{22}^{(k)}|}{t(t-1)}-\frac{|C_{12}^{(k)}|}{t^2(t-1)^2(t-2)^2}.$$

Тогда, в силу неравенства (24),

$$|N_{3,k}^{(2)}(t)|\leqslant\frac{h_3^{(2)}(M,\ \overline{M})}{t(t-1)}. \tag{35}$$

Таким образом, имеем

$$\Gamma_{2,k}(t)=\Delta_k^2\cdot t+N_2^{(2)}(\mu_{1,k},\ \mu_{2,k},\ \mu_{3,k})+N_{3,k}^{(2)}(t), \tag{36}$$

где $N_2^{(2)}$ и $N_{3,k}^{(2)}$ определены неравенствами (34) и (35). Точно таким же путем получаем

$$\Gamma_{3,k}(t)=N_1^{(3)}(\mu_{1,k},\ \mu_{2,k},\ \mu_{3,k})\cdot t+N_2^{(3)}(\mu_{1,k},\ \mu_{2,k},\ \mu_{3,k},\ \mu_{4,k})+N_{3,k}^{(3)}(t), \tag{37}$$

где

$$|N_1^{(3)}(\mu_{1,k},\ \mu_{2,k},\ \mu_{3,k})|\leqslant h_1^{(3)}(M,\ \overline{M}),$$
$$|N_2^{(3)}(\mu_{1,k},\ \mu_{2,k},\ \mu_{3,k},\ \mu_{4,k})|\leqslant h_2^{(3)}(M,\ \overline{M})$$

и

$$|N_{3,k}^{(3)}(t)|\leqslant\frac{h_3^{(3)}(M,\ \overline{M})}{t}.$$

И, наконец,

$$\Gamma_{4,k}(t)=N_1^{(4)}(\mu_{1,k},\ \mu_{2,k},\ \mu_{3,k},\ \mu_{4,k})\cdot t+$$
$$+N_2^{(4)}(\mu_{1,k},\ \mu_{2,k},\ \mu_{3,k},\ \mu_{4,k},\ \mu_{5,k})+N_{3,k}^{(4)}(t), \tag{38}$$

где

$$|N_1^{(4)}(\mu_{1,k},\ \mu_{2,k},\ \mu_{3,k},\ \mu_{4,k})|\leqslant h_1^{(4)}(M,\ \overline{M}),$$
$$|N_2^{(4)}(\mu_{1,k},\ \mu_{2,k},\ \mu_{3,k},\ \mu_{4,k},\ \mu_{5,k})|\leqslant h_2^{(4)}(M,\ \overline{M})$$

и

$$|N_{3,k}^{(4)}(t)|\leqslant h_3^{(4)}(M,\ \overline{M}).$$

В силу (32), (34), (35), (36), (37), (38) и того, что также

$$|\Delta_k^2|\leqslant h_1^{(2)}(M,\ \overline{M}),$$

получаем

$$\left|\mathbf{M}R\left(\frac{z}{\sqrt{tS_n}},\ X_k(t)-\mathbf{M}X_k(t)\right)\right|\leqslant g_1(M,\ \overline{M})\left(\frac{|z|^3}{n\sqrt{nt}}+\frac{z^4}{n^2}\right), \tag{39}$$

где $g_1(M,\ \overline{M})$ — рациональное выражение от M и $\overline{M}$, независящее от k.

Из (31) имеем

$$f_{k,t}\left(\frac{z}{\sqrt{tS_n}}\right)=1-\frac{z^2}{2tS_n}\left[\Delta_k^2 t+N_2^{(2)}(\mu_{1,k},\ \mu_{2,k},\ \mu_{3,k})+N_{3,k}^{(2)}(t)\right]+$$

$$+\mathbf{M}R\left(\frac{z}{\sqrt{tS_n}},\ X_k(t)-\mathbf{M}X_k(t)\right)=1-\frac{z^2\Delta_k^2}{2S_n}-\frac{z^2}{2tS_n}N_2^{(2)}(\mu_{1,k},\ \mu_{2,k},\ \mu_{3,k})-$$

$$-\frac{z^2}{2tS_n}N_{3,k}^{(2)}(t)+\mathbf{M}R\left(\frac{z}{\sqrt{tS_n}},\ X_k(t)-\mathbf{M}X_k(t)\right).$$

Обозначим

$$R_{n,t,k}(z)=\frac{z^2}{2tS_n}\left[N_2^{(2)}(\mu_{1,k},\ \mu_{2,k},\ \mu_{3,k})+N_{3,k}^{(2)}(t)\right]-$$

$$-\mathbf{M}R\left(\frac{z}{\sqrt{tS_n}},\ X_k(t)-\mathbf{M}X_k(t)\right). \tag{40}$$

Тогда

$$f_{k,t}\left(\frac{z}{\sqrt{tS_n}}\right)=1-\frac{z^2\Delta_k^2}{2S_n}-R_{n,t,k}(z), \tag{41}$$

где

$$|R_{n,t,k}(z)|\leqslant g_2(M,\ \overline{M})\left(\frac{z^2}{nt}+\frac{|z|^3}{n\sqrt{nt}}+\frac{z^4}{n^2}\right), \tag{42}$$

где $g_2(M,\ \overline{M})$ – рациональное выражение от M и $\overline{M}$.

Далее везде будем предполагать, что $|z|\leqslant\lambda\sqrt{n}$, где λ – достаточно малая положительная константа. Из (41) тогда получим

$$\left|f_{k,t}\left(\frac{z}{\sqrt{tS_n}}\right)\right|\geqslant 1-\frac{n\lambda^2\Delta_k^2}{2S_n}-g_2(M,\ \overline{M})\left(\frac{\lambda^2}{t}+\frac{\lambda^3}{\sqrt{t}}+\lambda^4\right).$$

В силу условий теоремы

$$\left|\frac{\Delta_k^2}{S_n}\right|\leqslant\frac{g_3(M,\ \overline{M})}{n},$$

где $g_3(M,\ \overline{M})$ рациональное выражение от M и $\overline{M}$. Тогда при достаточно малом λ

$$\left|f_{k,t}\left(\frac{z}{\sqrt{tS_n}}\right)\right|\geqslant 1-\frac{\lambda^2}{2}g_3(M,\ \overline{M})-g_2(M,\ \overline{M})\left(\frac{\lambda^2}{t}+\frac{\lambda^3}{\sqrt{t}}+\lambda^4\right)\geqslant\tau>0.$$

Значит, для таких z $f_{k,t}\left(\frac{z}{\sqrt{tS_n}}\right)$ отлична от нуля и

$$f_{n,t}(z)=\exp\left\{\sum_{k=1}^{n}\ln f_{k,t}\left(\frac{z}{\sqrt{tS_n}}\right)\right\}=\exp\left\{\sum_{k=1}^{n}\ln\left[1-\left(\frac{z^2\Delta_k^2}{2S_n}+R_{n,t,k}(z)\right)\right]\right\}=$$

$$=\exp\left\{\sum_{k=1}^{n}\left[\left(-\frac{z^2\Delta_k^2}{2S_n}-R_{n,t,k}(z)\right)-\overline{R}_{n,t,k}(z)\right]\right\}=$$

$$=\exp\left\{-\frac{z^2}{2}-\sum_{k=1}^{n}R_{n,k,t}(z)-\sum_{k=1}^{n}\overline{R}_{n,t,k}(z)\right\}, \tag{43}$$

где

$$\overline{R}_{n,t,k}(z)=\frac{1}{2}\left[\frac{z^2\Delta_k^2}{2S_n}+R_{n,t,k}(z)\right]^2\cdot\left[1-\Theta\left(\frac{z^2\Delta_k^2}{2S_n}+R_{n,t,k}(z)\right)\right]^{-2},$$

где $|\Theta|<1$.

Пользуясь неравенством

$$|e^{w}-1|\leqslant|w|\,e^{|w|},$$

из соотношения (43) получаем

$$\left|f_{n,t}(z)-e^{-\frac{z^2}{2}}\right|=e^{-\frac{z^2}{2}}\left|\exp\left\{-\sum_{k=1}^{n}R_{n,t,k}(z)-\sum_{k=1}^{n}\bar{R}_{n,t,k}(z)\right\}-1\right|\leqslant$$

$$\leqslant e^{-\frac{z^2}{2}}\left|\sum_{k=1}^{n}R_{n,t,k}(z)+\sum_{k=1}^{n}\bar{R}_{n,t,k}(z)\right|e^{\left|\sum_{k=1}^{n}R_{n,t,k}(z)+\sum_{k=1}^{n}\bar{R}_{n,t,k}(z)\right|}\leqslant$$

$$\leqslant\left[\sum_{k=1}^{n}|R_{n,t,k}(z)|+\sum_{k=1}^{n}|\bar{R}_{n,t,k}(z)|\right]e^{-\frac{z^2}{2}+\left[\sum_{k=1}^{n}|R_{n,t,k}(z)|+\sum_{k=1}^{n}|\bar{R}_{n,t,k}(z)|\right]}. \tag{44}$$

В силу соотношения (42)

$$\sum_{k=1}^{n}|R_{n,t,k}(z)|\leqslant g_2(M,\bar{M})\left(\frac{z^2}{t}+\frac{|z|^3}{\sqrt{nt}}+\frac{z^4}{n}\right)$$

и

$$\sum_{k=1}^{n}|\bar{R}_{n,t,k}(z)|\leqslant g_4(M,\bar{M})\cdot\frac{z^4}{n},$$

где $g_4(M,\bar{M})$ – рациональное выражение от M и $\bar{M}$.

Из последних неравенств и соотношения (44) следует

$$\left|f_{n,t}(z)-e^{-\frac{z^2}{2}}\right|\leqslant g_{2,4}(M,\bar{M})\left(\frac{z^2}{t}+\frac{|z|^3}{\sqrt{nt}}+\frac{z^4}{n}\right)\cdot$$

$$\cdot e^{-z^2\left[\frac{1}{2}-g_{2,4}(M,\bar{M})\left(\frac{1}{t}+\frac{|z|}{\sqrt{nt}}+\frac{z^2}{n}\right)\right]}\leqslant g_{2,4}(M,\bar{M})\left(\frac{z^2}{t}+\frac{|z|^3}{\sqrt{nt}}+\frac{z^4}{n}\right)\cdot e^{-\delta z^2},$$

где $g_{2,4}(M,\bar{M})=\max\limits_{i=2,4}g_i(M,\bar{M})$, а $\delta>0$ при достаточно больших t и достаточно малом λ.

Применяя известную теорему Эссеена [2], при $\mathbf{T}=\lambda\sqrt{n}$ получаем

$$\sup_{-\infty<x<\infty}|F_{n,t}(x)-\Phi(x)|\leqslant g(M,\bar{M})\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Асимптотическую нормальность сумм $\sum\limits_{k=1}^{n}X_k(t)$ одинаково распределенных дискретных процессов восстановления можно доказать точно таким же путем, только, безусловно, в таком случае ставятся более слабые условия, соответствующие тем условиям, которые ставились Б. Григелионисом [1] при доказательстве центральной предельной теоремы для сумм одинаково распределенных и непрерывных процессов восстановления.

Выражаю глубокую благодарность В. А. Статулявичусу, под руководством которого выполнена настоящая работа, а также Б. Григелионису за ценные советы по поводу данной статьи.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
10.IV.1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Григелионис. О центральной предельной теореме для сумм процессов восстановления, Лит. мат. сб., IV, 2 (1964), 197–121.
2. Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.—Л., Гостехиздат, 1949.
3. В. Лютикас. О производящей функции моментов числа восстановлений в случае дискретного процесса восстановления, Лит. мат. сб., V, 3 (1965), 421–425.
4. В. Лютикас. Вычисление моментов и семиинвариантов числа восстановлений в случае дискретного процесса восстановления, Лит. мат. сб., VI, 1 (1966), 75–83.

APIE CENTRINĘ RIBINĘ TEOREMĄ DISKRETINIŲ ATSTATYMO PROCESŲ SUMOMS

V. LIUTIKAS

(*Reziumė*)

Tegu $\{X(t),\ t=0, 1, 2, \ldots\}$ – diskretinis atstatymo procesas, t. y. $X(t)$ yra maksimalinė n reikšmė, patenkinanti pareinamybę $\sum_{k=1}^{n} \xi_k \leqslant t$, kur $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – nepriklausomų neneigiamų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių su pasiskirstymo funkcija $F(x)$ seka, kur $\xi_1, \xi_2 \ldots$ įgyja sveikas reikšmes su tikimybėmis

$$p_k=P\ \{\xi_i=k\}, \qquad i=1, 2, 3, \ldots$$

Tegu turime tokių nevienodai pasiskirsčiusių atstatymo procesų rinkinį

$$X_1(t),\ X_2(t), \ldots, X_n(t).$$

Tegu $\mu_{i,k}=\sum_{m=1}^{\infty} m^i p_{m,k}$ (i=1, 2, ...), kur $p_{m,k}=P\ \{\xi_j^{(k)}=m\}$. Taip pat tegu

$$F_{n,t}(x)=P\left\{\frac{\sum_{k=1}^{n}[X_k(t)-\mathrm{M}\,X_k(t)]}{\sqrt{tS_n}}<x\right\},$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\mu_{2,k}-\mu_{1,k}^2}{\mu_{1,k}^3}.$$

Straipsnyje parodoma, jog, esant sąlygoms

$$\mu=\varliminf_{k\to\infty}\mu_{1,k}>0,\quad M=\varlimsup_{k\to\infty}\mu_{6,k}<\infty,$$

ir

$$\alpha_N=\varliminf_{k\to\infty}\alpha_k(N),$$

kur

$$\alpha_k(N)=\min_{q\geqslant 2} P\ \{\xi_1^{(k)}\not\equiv 0 \pmod q),\ \xi_1^{(k)}\leqslant N\}$$

ir

$$\min\left\{\frac{\mu}{2},\ \frac{\alpha_N}{N^2}\right\}=\overline{M},$$

galioja

$$\sup_{-\infty<x<\infty}|F_{n,t}(x)-\Phi(x)|\leqslant g(M,\overline{M})\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

kur

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du,$$

o $g(M, \overline{M})$ – racionalinis reiškinys nuo M ir $\overline{M}$.

ÜBER DEN ZENTRALEN GRENZWERTSATZ VON SUMMEN DER DISKRETEN WIEDERHERSTELLUNGPROZESSEN

W. LIUTIKAS

(*Zusammenfassung*)

Es sei $\{X(t),\ t=0, 1, 2, \ldots\}$ – der diskrete Wiederherstellungprozess, d. h. $X(t)$ ist maximaler n Wert, der die Bedingung $\sum_{x=1}^{n} \xi_k \leqslant t$ geltend macht, wobei $\xi_1, \xi_2, \ldots$ eine Folge von unabhängigen, positiven, gleichmäßig verteilten Zufallsgrößen mit Verteilungsfunktion $F(x)$ ist, wobei $\xi_1, \xi_2, \ldots$ ganze Werte mit Wahrscheinlichkeiten

$$p_k = P\{\xi_i = k\}, \qquad i=1, 2, 3, \ldots$$

annimmt.

Es sei

$$X_1(t),\ X_2(t),\ \ldots,\ X_n(t)$$

eine Sammlung von Wiederstellungprozessen mit ungleichmässiger Verteilung.

Ferner sei

$$\mu_{i,k} = \sum_{m=1}^{\infty} m^i p_{m,k} \ (i=1, 2, \ldots),$$

wobei

$$p_{m,k} = P\{\xi_j^{(k)} = m\}.$$

Ebenso sei

$$F_{n,t}(x) = P\left\{\frac{\sum_{k=1}^{n} [X_k(t) - \mathrm{M}\, X_k(t)]}{\sqrt{tS_n}} < x\right\},$$

wobei

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_{2,k} - \mu_{1,k}^2}{\mu_{1,k}^3}.$$

In vorliegenden Artikel wird der Satz bewiesen: wenn die Bedingungen

$$\mu = \varliminf_{k\to\infty} \mu_{1,k} > 0, \quad M = \varlimsup_{k\to\infty} \mu_{6,k} < \infty$$

und

$$\alpha_N = \varliminf_{k\to\infty} \alpha_k(N) > 0,$$

wobei

$$\alpha_k(N) = \min_{q\geqslant 2} P\{\xi_1^{(k)} \not\equiv 0 \pmod q,\ \xi_1^{(k)} \leqslant N\},$$

$$\min\left\{\frac{\mu}{2}, \frac{\alpha_N}{N^2}\right\} = \overline{M},$$

gelten, dann ist

$$\sup_{-\infty<x<\infty} |F_{n,t}(x) - \Phi(x)| \leqslant g(M, \overline{M})\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

wo

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

und $g(M, \overline{M})$ – ein rationale Ausdruck von M und $\overline{M}$ ist.