1966

О ВЕРХНИХ И НИЖНИХ ФУНКЦИЯХ ДЛЯ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С ПРЕДЕЛЬНЫМИ УСТОЙЧИВЫМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

Н. КАЛИНАУСКАЙТЕ

Пусть G_α функция распределения устойчивого закона с характеристической функцией

$$\exp\left\{-|t|^\alpha\left(1+i\frac{t}{|t|}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\alpha\right)\right\}, \qquad 0<\alpha<2,\ \alpha\neq 1.$$

Известно [7], что такое устойчивое распределение обладает следующим свойством: при $1<\alpha<2$ для каждого фиксированного α имеет место соотношение

$$1-G_\alpha(x)\sim A(\alpha)\,x^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\alpha-1}}\exp\left\{-B(\alpha)\,x^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right\}, \qquad (x\to+\infty). \tag{1}$$

Если $0<\alpha<1$, то для каждого фиксированного α имеем

$$1-G_\alpha(x)\sim A(\alpha)\,|x|^{\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{1-\alpha}}\exp\left\{-B(\alpha)\,|x|^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right\}, \qquad (x<0,\ x\to-0\}, \tag{2}$$

где

$$A(\alpha)=\frac{\alpha^{1-\frac{1}{2(\alpha-1)}}\left|\cos\frac{\pi}{2}\alpha\right|^{-\frac{1}{2(\alpha-1)}}}{\sqrt{2\pi}\,|\alpha-1|^{\frac{3}{2}}\,B^{\frac{1}{2}}(a)},$$

$$B(\alpha)=|\alpha-1|\,\alpha^{-\frac{\alpha}{\alpha-1}}\left|\cos\frac{\pi}{2}\alpha\right|^{\frac{1}{\alpha-1}}.$$

Пусть имеется последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n,\ \ldots \tag{5}$$

с функцией распределения F, имеющей конечный псевдомомент

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x|^\alpha\,\bigl|\log|x|\bigr|^{1+\delta}\,\bigl|d(F(x)-G_\alpha(x))\bigr| \tag{3}$$

относительно G_α, где $\delta>0$ некоторое число. Из этого следует, что F принадлежит области притяжения устойчивого закона G_α.

Не нарушая общности, можно предположить, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^{[\alpha]}\,d\left(F(x)-G_\alpha(x)\right)=0. \tag{4}$$

Непрерывную монотонную функцию g отнесем к классу $\mathfrak{G}_\alpha$, если она обладает следующими свойствами: при $t\to\infty$

$$\varphi(t)=g(t)\,t^{-\frac{1}{\alpha}}\to\infty \text{ при } 1<\alpha<2$$

$g(t)\to-\infty$ и

$$\varphi(t)=g(t)\,t^{-\frac{1}{\alpha}}\to 0 \text{ при } 0<\alpha<1.$$

Припомним, что функция $g\in\mathfrak{G}_\alpha$ называется верхней, если

$$P\left\{\limsup\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i>g(n)\right)\right\}=0$$

и нижней, если

$$P\left\{\limsup\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i>g(n)\right)\right\}=1.$$

Мы рассматриваем верхние и нижние функции только на одной полуоси значений, т.е. для самой суммы $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$, а не для ее модуля. На целесообразность рассматривать вероятностные свойства случайной величины или процесса отдельно на положительной и отрицательной полуоси неоднократно указывал В. М. Золотарев [3], [4], [5].

Теорема. *Предположим, что последовательность* (5) *удовлетворяет условиям* (3) *и* (4). *Тогда функция* $g\in\mathfrak{G}_\alpha$ *является верхней или нижней в зависимости от того, сходится или расходится интеграл*

$$I_\alpha(g)=\int_{N_g}^{\infty}\frac{1}{t}\,q^{\frac{1}{2}}(t)\exp\{-B(\alpha)\,q(t)\}\,dt,$$

где

$$q(t)=\varphi^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}(t).$$

Как частный случай, из этой теоремы следует закон повторного логарифма

$$P\left\{\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{S_n}{(-1)^{[\alpha]+1}\,n^{\frac{1}{\alpha}}\left(B^{-1}(\alpha)\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(\ln\ln n)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}}=1\right\}=1.$$

Сначала приведем вспомогательные леммы. Обозначим F_n функцию распределения суммы S_n. Пусть $\delta>\varepsilon>0$ любое положительное число.

Лемма 1. *Если последовательность* (5) *удовлетворяет условиям* (3) *и* (4), *то для каждого фиксированного* $0<\alpha<2$, $\alpha\neq 1$ *имеет место соотношение*

$$\frac{1-F_n(n^{\frac{1}{\alpha}}x)}{1-G_\alpha(x)}=1+\gamma_n(x), \qquad (0)$$

где

$$\sup_{x\leqslant\rho_\alpha(n)}\gamma_n(x)\to 0\ (n\to\infty)\ \text{при}\ 2>\alpha\geqslant 1,$$

$$\sup_{|x|>\rho_\alpha(n)}\gamma_n(x)\to 0\ (n\to\infty)\ \text{при}\ 0<\alpha<1,$$

$$\rho_\alpha(n)=[(1+\varepsilon)B^{(-1)}(\alpha)\ln\ln n]^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}.$$

Действительно, тогда из теоремы Г. Бергстрема [1] следует, что

$$\sup_x|F_n(xn^{\frac{1}{\alpha}})-G_\alpha(x)|=o(\ln n^{-1-\delta}).$$

Полагая $\varepsilon<\delta$ и используя (1) или (2), соответственно получаем (0).

Лемма 2. *Если теорема имеет место для тех функций $g \in \mathfrak{G}_\alpha$, для которых имеет место соотношение*

$$(1-\varepsilon) B^{-1}(\alpha) \ln \ln n < q(n) < (1+\varepsilon) B^{-1}(\alpha) \ln \ln n, \tag{6}$$

то она имеет место для всех функций из класса $\mathfrak{G}_\alpha$.

Лемма 3. *Пусть* 1, 2, ..., n, ... *последовательность натуральных чисел. Из нее выберем подпоследовательность $\{n_k\}$, удовлетворяющую условию*

$$\frac{a n_{k-1}}{q(n_{k-1})} < n_k - n_{k-1} < \frac{b n_{k-1}}{q(n_{k-1})}, \qquad n_1 = 1 \tag{7}$$

где $0 < a < b$ некоторые константы. Тогда интеграл $I_\alpha(g)$ сходится или расходится одновременно с суммой

$$\sum_k P\{S_{n_k} > g(n_k)\}.$$

Доказательство лемм 2 и 3 не приводим. Их можно найти в статье (6).

Используя (1) или (2), соответственно, и формулу Тейлора, нетрудно получить следующее утверждение.

Лемма 4. *При $n \to \infty$ для каждого фиксированного $\alpha \neq 1$ и любой константы C, при $g \in \mathfrak{G}_\alpha$ имеет место соотношение*

$$P\left\{S_n > g(n)\left(1 - \frac{(-1)^{[\alpha]+1} c}{q(t)}\right)\right\} \sim e^{c\frac{\alpha}{(\alpha-1)}B(\alpha)} P\left\{S_n > g(n)\right\}. \tag{8}$$

Переходим к доказательству теоремы для случая $1 < \alpha < 2$. Из последовательности натуральных чисел выберем подпоследовательность $\{n_k\}$, удовлетворяющую условию (7).

1. Предположим, что $I_\alpha(g) < \infty$. Тогда

$$\sum_k P\{S_{n_k} > g(n_k)\} < \infty.$$

Обозначим

$$A_n = \{S_n > g(n)\}$$

и покажем, что

$$P\{\limsup A_n\} = 0.$$

Для этого достаточно показать, что для любого ε найдется $n_0(\varepsilon)$ такой, что для всех $n > n_0(\varepsilon)$

$$P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) < \varepsilon,$$

так как

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Положим

$$B_{n,k} = \{S_{n_k} - S_n > -(n_k - n)^{\frac{1}{\alpha}}\},$$

$$C_k = \left\{S_{n_k} > n_k^{\frac{1}{\alpha}} \varphi(n_{k-1})\left(1 - \frac{2b + b^{\frac{1}{\alpha}}}{q(n_{k-1})}\right)\right\},$$

Для каждого $n_{k-1} < n \leqslant n_k$ имеет место соотношение $C_k \supset A_n B_{n,k}$. Действительно, если имеют место события A_n и $B_{n,k}$, то

$$S(n_k) = (S_{n_k} - S_n) + S_n \geqslant n^{\frac{1}{\alpha}} \varphi(n) - (n_k - n)^{\frac{1}{\alpha}} \geqslant n_k^{\frac{1}{\alpha}} \left(1 - \frac{b}{q(n_{k-1})}\right)^{\frac{1}{\alpha}} [\varphi(n) - \varphi(n_{k-1}) +$$
$$+ \varphi(n_{k-1})] - n_{k-1}^{\frac{1}{\alpha}} \frac{b^{\frac{1}{\alpha}} \varphi(n_{k-1})}{q(n_{k-1})} \geqslant t n_k^{\frac{1}{\alpha}} \varphi(n_{k-1}) \left(1 - \frac{2b + b^{\frac{1}{\alpha}}}{q(n_{k-1})}\right).$$

Следовательно,

$$P(C_k) \geqslant P\left\{ \bigcup_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} A_n B_{n,k} \right\} = \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} P\left\{ A_n B_{n,k} \setminus A_n B_{n,k} \cap \bigcup_{m=n_{k-1}+1}^{n-1} A_m B_{m,k} \right\} \geqslant$$
$$\geqslant \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} P\left\{ A_n B_{n,k} \setminus A_n B_{n,k} \cap \bigcup_{m=n_{k-1}+1}^{n-1} A_m \right\} =$$
$$= \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} P\left\{ A_n \setminus A_n \cap \bigcup_{m=n_{k-1}+1}^{n-1} A_n \right\} \cdot P(B_{n,k}) \geqslant C_0 P\left(\bigcup_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} A_n \right),$$

где

$$C_0 = \inf_{n,k} P(B_{n,k}).$$

Заметим, что $C_0 > 0$ так как из (0) следует, что при $n-k$ достаточно больших

$$P(B_{n,k}) \geqslant \frac{1}{2} \left(1 - G_\alpha(-1)\right)$$

и, кроме того, вследствие соотношений

$$\int_{-\infty}^{\infty} x d\left(G_\alpha(x) - F(x)\right) = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x dG_\alpha(x) = 0$$

среднее $MS_{n_k - n} = 0$, т. е. на положительной оси сосредоточена положительная вероятностная масса.

В силу леммы 4 ряд $\sum\limits_k P(C_k)$ сходится, поэтому

$$P\left(\bigcup_{j=n}^{\infty} A_j\right) \leqslant \sum_{k=k_0}^{\infty} P\left(\bigcup_{m=n_k+1}^{n_{k+1}} A_m\right) \leqslant \frac{1}{C_0} \sum_{k=k_0}^{\infty} P(C_k) < \varepsilon$$

при $n > n_0(\varepsilon)$.

2. Рассмотрим случай

$$\sum_k P\left(S_{n_k} > g(n_k)\right) = \infty.$$

Обозначим

$$B_k = \{ S_{n_k} > g(n_k) \}$$

и покажем, что

$$P(\limsup B_k) = 1.$$

Вследствие закона нуля или единицы достаточно показать, что любого n можно найти номер $\psi(n)$ такой, что

$$P\left\{ \bigcup_{k=n}^{\psi(n)} B_k \right\} > C_2 > 0,$$

где константа C_2 не зависит от n.

Из (7) следует

$$n_{k-1} < n_k < \beta_0 n_{k-1},$$

$$C_1\left(\frac{n_{k-1}}{q(n_{k-1})}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \geqslant n_k^{\frac{1}{\alpha}}(\ln\ln n_k)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} - n_{k-1}^{\frac{1}{\alpha}}(\ln\ln n_{k-1})^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}, \tag{9}$$

$$n_k^{\frac{1}{\alpha}}\varphi(n_k) - n_{k-1}^{\frac{1}{\alpha}}\varphi(n_{k-1}) > \frac{2a}{\alpha}\left(\frac{n_{k-1}}{q(n_{k-1})}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \tag{10}$$

где β_0 константа.

Пусть $\delta_1 > 0$. Тогда вследствие расходимости ряда $\sum\limits_k P(B_k)$ и того, что $P(B_k)\to 0$ при $k\to\infty$ для любого натурального $n > m_0(\delta_1)$ можно найти номер $\psi(n)$ такой, что

$$\delta_1 \leqslant \sum_{n\leqslant k\leqslant\psi(n)} P(B_k) \leqslant 2\delta_1.$$

Положим

$$D(m) = B_m \bigcap_{r=1}^{\psi(n)-m} \bar{B}_{m+r} = \{S_{n_m} > g(n_m),\ S_{n_{m+1}} \leqslant g(n_{m+1}),\ \ldots,\ S n_{\psi(n)} \leqslant g(n_{\psi(n)})\}.$$

Тогда

$$\bigcup_{n\leqslant m\leqslant\psi(n)} B_m = \bigcup_{n\leqslant m\leqslant\psi(m)} D(m)$$

и

$$D(m)\cap D(k) = \varnothing, \qquad m\neq k.$$

Положим

$$D_1(m) = \left\{g(n_m) < S_{n_m} \leqslant g(n_m) + \frac{a}{4\alpha}\left(\frac{n_m}{q(n_m)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right\}.$$

Из (8) следует, что

$$P\Big(D_1(m)\Big) \geqslant \Big(1-(1+\gamma)e^{-\frac{aB(\alpha)}{4(\alpha-1)}}\Big)\cdot P(B_m), \qquad \gamma > 0.$$

Пусть

$$D_2(m) = D_1(m)\bigcap_{k=0}^{h-1}\{S n_{m+k+1} - S n_{m+k} \leqslant 0\}.$$

Тогда

$$P\Big(D_2(m)\Big) \geqslant P_0^h\cdot P\Big(D_1(m)\Big),$$

где

$$P_0 = \inf P\{S_{n_{m+r+1}} - S_{n_{m+r}} \leqslant 0\} > 0,$$

так как из леммы 1 и (1) при n_{m+r} достаточно больших следует

$$P\{S_{n_{m+r+1}} - S_{n_{m+r}} \leqslant 0\} \geqslant \frac{1}{2}\,G_\alpha(0).$$

Если имеет место событие $D_2(m)$, то в силу (10) имеют место события

$$S_{n_{m+r}} \leqslant S_{n_m} \leqslant n_m^{\frac{1}{\alpha}}\varphi(n_m) + \frac{a}{4\alpha}\left(\frac{n_m}{q(n_m)}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leqslant n_{m+1}^{\frac{1}{\alpha}}\varphi(n_{m+1})$$

для всех $r = 1,\ 2,\ \ldots\ h$. Тем более

$$S_{n_{m+r}} \leqslant n_{m+r}^{\frac{1}{\alpha}}\varphi(n_{m+r}),$$

так как функция $n^{\frac{1}{\alpha}}\varphi(n)\to\infty$ монотонно при $n\to\infty$ т. е. получаем

$$D_2(m) \subset D_1(m)\bigcap_{r=1}^{h}\bar{B}_{m+r}.$$

Далее положим

$$D_3(m)=D_2(m)\bigcap_{m+r=m+h+1}^{\psi(n)}\bar{B}_{m+r}.$$

Очевидно, что

$$D_3(m)\subset D(m)\subset B_m.$$

Достаточно показать, что при δ_1 достаточно малом и h достаточно большом (но оба фиксированы) существует константа $C_3>0$ такая, что

$$P\left(D_3(m)\right)>C_3P(B_m). \tag{11}$$

Действительно,

$$P\left(\bigcup_{n\leqslant m\leqslant\psi(n)}B_m\right)=P\left(\bigcup_{n\leqslant m\leqslant\psi(n)}D(m)\right)=\sum_{n\leqslant m\leqslant\psi(n)}P\left(D(m)\right)\geqslant$$

$$\geqslant\sum_{n\leqslant m\leqslant\psi(n)}P\left(D_3(m)\right)\geqslant C_3\sum_{n\leqslant m\leqslant\psi(n)}P(B_m)>C_3\delta_1.$$

Положим

$$D_{3,r}(m)=D_2(m)\cdot B_{m+r}$$

для $m+h<m+r\leqslant\psi(n)$, ясно, что

$$D_2(m)\subset D_3(m)\cup\bigcup_{m+h<m+r\leqslant\psi(n)}D_{3,r}(m), \tag{12}$$

и имеет место включение

$$D_{3,r}(m)\subset D_2(m)\cdot E_r(m),$$

где

$$P\{E_r\}=P\left\{S_{n_{m+r}}-S_{n_{m+h}})\geqslant n_{m+r}^{\frac{1}{\alpha}}\varphi(n_{m+r})-n_m^{\frac{1}{\alpha}}\varphi(n_m)-\frac{a}{4\alpha}\left(\frac{n_m}{q(n_m)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right\}.$$

Вследствие (10) получаем

$$n_{m+r}^{\frac{1}{\alpha}}\varphi(n_{m+r})-n_m^{\frac{1}{\alpha}}\varphi(n_m)-\frac{a}{4\alpha}\left(\frac{n_m}{q(n_m)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\geqslant\frac{ar}{4\alpha}\left(\frac{n_m}{q(n_m)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Если $n_{m+h}<n_{m+r}\leqslant 2_{n_m}$, то из (7) следует, что

$$n_{m+r}-n_{m+h}\leqslant\sum_{k=0}^{r-1}(n_{m+k+1}-n_{m+k})\leqslant 2br\frac{n_m}{q(n_m)}.$$

Поэтому

$$P(E_r)\leqslant C_4\exp\left\{-B(\alpha)\cdot\left(\frac{ar}{4\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\cdot(2br)^{\frac{-1}{\alpha-1}}\right\}\leqslant C_4\exp\{-C_5r\}.$$

Отсюда

$$P\left\{\bigcup_{n_{m+h}<n_{m+r}\leqslant 2n_m}D_{3,r}(m)\right\}\leqslant C_5P\left(D_2(m)\right)\cdot\sum_{r=h+1}^{\infty}e^{-C_6r}. \tag{13}$$

Далее, если $2n_m<n_{m+r}\leqslant n_mq^{\alpha}(n_{m+r})$, то из (3) и (4) следует

$$n_{m+r}^{\frac{1}{\alpha}}\varphi(n_{m+r})-n_m^{\frac{1}{\alpha}}\varphi(n_m)-\frac{a}{4\alpha}\left(\frac{n_m}{q(n_m)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\geqslant\frac{a}{4\alpha}\sum_{k=0}^{r-1}\left(\frac{n_{m+k}}{q(n_{m+k})}\right)\geqslant$$

$$\geqslant\frac{a}{4bC_1}\sum_{k=0}^{r-1}\left(n_{m+k+1}^{\frac{1}{\alpha}}(\ln\ln n_{m+k+1})^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}-n_{m+k}^{\frac{1}{\alpha}}(\ln\ln_{m+k})^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\right)\geqslant C_7n_{m+r}^{\frac{1}{\alpha}}(\ln\ln n_{m+r})^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$$

Поэтому для таких n_{m+r} получаем

$$P\left(E_r(m)\right) \leqslant \frac{C_8}{(\ln n_m)^{C_9}},$$

так как

$$\frac{n_{m+r}-n_m}{n_{m+r}} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Так как число членов последовательности (7), удовлетворяющих условию

$$n_{m+r} \leqslant n_m q^\alpha (n_{m+r})$$

не превосходит $C_9 (\ln\ln n_m)^{\alpha+1+\delta_1}$, то

$$P\left\{ \bigcup_{2n_m < n_{m+r} \leqslant n_m q^\alpha (n_{m+r})} D_{3,r}(m) \right\} \leqslant P\{D_2(m)\} \cdot \frac{C_9 (\ln\ln n_m)^{\alpha+1+\delta_1}}{(\ln n_m)^{C_{10}}}. \quad (14)$$

Наконец, для $n_m q^\alpha (n_m) < n_{m+r} \leqslant n_{\psi(n)}$ получаем

$$n_{m+r}^{\frac{1}{\alpha}} \varphi(n_{m+r}) - n_m^{\frac{1}{\alpha}} \varphi(n_m) - \frac{a}{4\alpha}\left(\frac{n_m}{q(n_m)}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \geqslant n_{m+r}^{\frac{1}{\alpha}} \varphi(n_{m+r}) - 2n_m^{\frac{1}{\alpha}} \varphi(n_m) \geqslant$$

$$\geqslant n_{m+r}^{\frac{1}{\alpha}} \varphi(n_{m+r}) \left(1 - \frac{2}{q(n_{m+r})}\right).$$

Поэтому согласно лемме 4 имеем

$$P\left(E_r(m)\right) \leqslant C_{11} \cdot P(B_m).$$

Следовательно,

$$P\left(\bigcup_{n_m q^\alpha (n_{m+r}) < n_{m+r} \leqslant n_{\psi(n)}} D_{3,r}(m)\right) \leqslant C_{12} P\left(D_2(m)\right) \sum_{n_m q^\alpha (n_m) \leqslant n_{m+r} \leqslant n_{\psi(n)}} P(B_{m+r}) \leqslant \quad (15)$$

$$\leqslant C_{12} \cdot 2\delta_1 \cdot P\left(D_2(m)\right).$$

Из (13), (14) и (15) следует, что

$$P\{\cup D_{3,r}(m)\} \leqslant P\left(D_2(m)\right) \cdot \left\{ C_5 \sum_{r=h}^{\infty} e^{-C_6 r} + C_9 \frac{(\ln\ln n_m)^{\alpha+1+\delta_1}}{(\ln n_m)^{C_{10}}} + C_{12} \cdot 2\delta_1 \right\}. \quad (16)$$

Если h выберем достаточно большим, а δ_1 достаточно малым, то для всех достаточно больших m будет иметь место неравенство

$$P\left\{ \bigcup_{n < m+r \leqslant \psi(n)} D_{3,r}(m) \right\} \leqslant \Theta \cdot P\left(D_2(m)\right),$$

где $0 < \Theta < 1$ константа. Окончательно, из (12), (16) следует, что

$$P\left(D_3(m)\right) \geqslant (1-\Theta) p_0^h \left(1 - (1+\gamma) e^{-\frac{ac}{4(\alpha-1)} B(\alpha)}\right) \cdot P(B_m).$$

Соотношение (11) доказано.

Вообще, в случае $0 < \alpha < 1$ теорема доказывается таким же методом, что и в случае $1 < \alpha < 2$, но имеется несколько особенностей. В первой части доказательства приходится делать очевидные изменения, если случайные величины ξ_k, $k = 1, 2 \ldots$ строго отрицательные, при доказательстве соотношения $C_k \supset A_n$ при $n_{k-1} < n \leqslant n_k$. Во второй части доказательства число h не вводится и возможность применять (2) при оценивании $P\left(E_r(m)\right)$ достигается за счет выбора констант a и b. Следовательно, не надо вводить событие $D_2(m)$, и событие $D_{3,r}(m)$ определяется следующее

$$D_{3,r}(m) = D_1(m) \cap B_{m+r}.$$

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
25.XI.1965

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Bergström, On distribution functions with a limiting stable distribution function, Arkiv för mat., 2, N 25, 463–575, 1952.
2. P. Erdös, On the law of the iterated logarithm, Ann. of Math., 43, 419–436, 1942.
3. В. М. Золотарев, Аналог закона повторного логарифма, Теория вероятностей и ее применения, т. 9, № 3, 566–567, 1964.
4. В. М. Золотарев, Об одной новой точке зрения на предельные теоремы, учитывающие большие уклонения, Труды VI Всесоюзного совещания по теории вероятностей и математической статистике, 41–47, Вильнюс, 1962.
5. В. М. Золотарев, Односторонняя трактовка и уточнения некоторых неравенств Чебышевского типа, Лит. мат. сб., т. 5, № 2, 233–250, 1965.
6. Н. Калинаускайте, О верхних и нижних функциях для устойчивых случайных процессов, Лит. мат. сб., т. 5, № 4, 541–551, 1965.
7. А. В. Скороход, Асимптотические формулы для устойчивых законов распределения, ДАН СССР, т. 98, № 5, 731–734, 1954.

NEPRIKLAUSOMŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ SUMŲ SU RIBINIAIS STABILIAIS PASISKIRSTYMAIS VIRŠUTINIŲ IR APATINIŲ FUNKCIJŲ KLAUSIMU

N. KALINAUSKAITĖ

(*Reziumė*)

Darbe gautos būtinos ir pakankamos sąlygos, kad klasės $\mathfrak{G}_\alpha$ funkcija g būtų viršutinė (apatinė) nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių sumoms su ribiniu stabiliu pasiskirstymu, turinčių parametrus: $0<\alpha<2$, $\alpha \pm 1$ ir $\beta=-1$.

ON THE UPPER AND LOWES FUNCTIONS FOR SUMS OF INDEPENDENT RANDOM VARIABLES WITH A LIMITING STABLE DISTRIBUTION

N. KALINAUSKAITĖ

(*Summary*)

Function $g \in \mathfrak{G}_\alpha$ in said to be the upper function for a sum of independent random variables ξ_k, if

$$P\left\{\limsup\left(S_n>g(n)\right)\right\}=0$$

and – lower, if

$$P\left\{\limsup\left(S_n>g(n)\right)\right\}=1.$$

Convergence (divergence) of the integral $I_\alpha(g)$ is proved to be necessary and sufficient condition for a function $g \in \mathfrak{G}_\alpha$ to be upper (lower) function for a sums of independent identically distributed random variables ξ_k, $k=1, 2, \ldots$ with limiting stable distribution G_α, $0<\alpha<2$, $\alpha \neq 1$ having the parameter $\beta=-1$, provided random variables ξ_k satisfy the following conditions

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{[\alpha]}\, d\left(F(x)-G_\alpha(x)\right)=0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^\alpha \left| \log|x| \right|^{1+\delta} \left| d\left(F(x)-G_\alpha(x)\right)\right| < \infty$$

where $F(x)$ denote distributions function of random variable ξ_1.