VI ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 2
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS

1966

К ВОПРОСУ О СХОДИМОСТИ СУММ СТУПЕНЧАТЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ К ПУАССОНОВСКОМУ

Б. ГРИГЕЛИОНИС

1. Случайный процесс $\{X(t),\ t\geqslant 0\}$ мы называем ступенчатым, если приращения $X(t)-X(s)$ $(t>s)$ принимают лишь целые неотрицательные значения и с вероятностью 1 $X(0)=0$.

В работе автора [1] исследовались условия сходимости сумм $X_n(t)=\sum_{r=1}^{k_n} X_{nr}(t)$, где $X_{nr}(t)$ – независимые ступенчатые случайные процессы, к процессу Пуассона. Сходимость процессов понимается в смысле слабой сходимости любых конечномерных распределений к предельным. В [1] доказано, что, если слагаемые процессы $X_{nr}(t)$ бесконечно малы, то для сходимости сумм $X_n(t)$ к процессу Пуассона с ведущей функцией $\Lambda(t)$ необходимо и достаточно, чтобы при любых фиксированных s и t $(s<t)$ при $n\to\infty$

$$\Lambda_n(t,\ s)=\sum_{r=1}^{k_n} p_{nr}(1;\ t,\ s)\to\Lambda(t)-\Lambda(s)$$

и

$$\Psi_n(t)=\sum_{r=1}^{k_n}\Big(1-p_{nr}(0;\ t,\ 0)-p_{nr}(1;\ t,\ 0)\Big)\to 0, \tag{1}$$

где обозначено $p_{nr}\ (k;\ t,\ s)=\mathbf{P}\{X_{nr}(t)-X_{nr}(s)=k\}$, а бесконечная малость процессов $X_{nr}(t)$ $(1\leqslant r\leqslant k_n)$ понимается в смысле равенства

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant r\leqslant k_n}\Big(1-p_{nr}(0;\ t,\ 0)\Big)=0 \tag{2}$$

при каждом фиксированном t.

В настоящей заметке мы приводим условия, эквивалентные (1), но существенно более простые. Пусть $\Lambda_n(t)=\Lambda_n(t,\ 0)$.

Теорема 1. *Для сходимости сумм независимых бесконечно малых ступенчатых случайных процессов к процессу Пуассона с ведущей функцией $\Lambda(t)$ необходимо и достаточно, чтобы при любом фиксированном t*

$$\lim_{n\to\infty}\Lambda_n(t)=\Lambda(t)$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\Psi_n(t)=0. \tag{3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно, конечно, доказать эквивалентность условий (1) и (3). Условия (3) следуют из (1) при $s=0$. Таким образом остается показать, что из условий (3) вытекает, что при любых фиксированных s и t

$$\Lambda_n(t+s,\ s)\to\Lambda(t+s)-\Lambda(s) \qquad (n\to\infty).$$

С этой целью установим следующее неравенство.

Лемма. *Для любого ступенчатого случайного процесса* $X(t)$

$$|\mathbf{P}\{X(t+s)=1\}-\mathbf{P}\{X(s)=1\}-\mathbf{P}\{X(t+s)-X(s)=1\}|\leqslant 2\,\mathbf{P}\{X(t+s)\geqslant 2\}. \tag{4}$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\{X(t+s)=1\}-\mathbf{P}\{X(s)=1\}-\mathbf{P}\{X(t+s)-X(s)=1\}=\\
&=\mathbf{P}\{X(t+s)\geqslant 1\}-\mathbf{P}\{X(s)\geqslant 1\}-\mathbf{P}\{X(t+s)-X(s)\geqslant 1\}-\\
&-\mathbf{P}\{X(t+s)\geqslant 2\}+\mathbf{P}\{X(s)\geqslant 2\}+\mathbf{P}\{X(t+s)-X(s)\geqslant 2\}=\\
&=\mathbf{P}\{X(t+s)\geqslant 1\}-\mathbf{P}\Big\{\big(X(s)\geqslant 1\big)\cup\big(X(t+s)-X(s)\geqslant 1\big)\Big\}+\\
&+\mathbf{P}\Big\{\big(X(s)\geqslant 1\big)\cap\big(X(t+s)-X(s)\geqslant 1\big)\Big\}-\mathbf{P}\{X(t+s)\geqslant 2\}+\\
&+\mathbf{P}\{X(s)\geqslant 2\}+\mathbf{P}\{X(t+s)-X(s)\geqslant 2\}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Мы пользовались элементарным свойством вероятности: для любых событий A и B

$$\mathbf{P}\{A\}+\mathbf{P}\{B\}=\mathbf{P}\{A\cup B\}-\mathbf{P}\{A\cap B\}.$$

Поскольку

$$\mathbf{P}\Big\{\big(X(s)\geqslant 1\big)\cup\big(X(t+s)-X(s)\geqslant 1\big)\Big\}=\mathbf{P}\{X(t+s)\geqslant 1\}$$

и

$$\mathbf{P}\Big\{\big(X(s)\geqslant 1\big)\cap\big(X(t+s)-X(s)\geqslant 1\big)\Big\}\leqslant\mathbf{P}\{X(t+s)\geqslant 2\},$$

то из (5) получаем, что

$$\begin{aligned}
&-\mathbf{P}\{X(t+s)\geqslant 2\}\leqslant\mathbf{P}\{X(t+s)=1\}-\mathbf{P}\{X(s)=1\}-\mathbf{P}\{X(t+s)-X(s)=1\}\leqslant\\
&\leqslant\mathbf{P}\{X(s)\geqslant 2\}+\mathbf{P}\{X(t+s)-X(s)\geqslant 2\}\leqslant 2\,\mathbf{P}\{X(t+s)\geqslant 2\}.
\end{aligned}$$

Отсюда и следует неравенство (4).

Воспользовавшись леммой и условиями (3), находим, что

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}|\Lambda_n(t+s,\ s)-\Lambda(t+s)+\Lambda(s)|=\lim_{n\to\infty}|\Lambda_n(t+s,\ s)-\Lambda_n(t+s)+\Lambda_n(s)|=\\
&=\lim_{n\to\infty}\Big|\sum_{r=1}^{k_n}\big(p_{nr}(1;\ t+s,\ s)-p_{nr}(1;\ t+s,\ 0)+p_{nr}(1;\ s,\ 0)\big)\Big|\leqslant\\
&\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{k_n}|\mathbf{P}\{X_{nr}(t+s)=1\}-\mathbf{P}\{X_{nr}(s)=1\}-\mathbf{P}\{X_{nr}(t+s)-X_{nr}(s)=1\}|\leqslant\\
&\leqslant 2\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{k_n}\mathbf{P}\{X_{nr}(t+s)\geqslant 2\}=2\lim_{n\to\infty}\Psi_n(t+s)=0.
\end{aligned}$$

Теорема 1 доказана.

2. Далее будем рассматривать случай, когда слагаемые процессы $X_{nr}(t)$ являются процессами восстановления, т. е. такими ступенчатыми случайными процессами, для которых расстояния $\tau_{nr}^{(k)}$ между k и $k+1$ единичными скачками независимы между собой ($\tau_{nr}^{(0)}$ – расстояние от 0 до первого скачка см. [2]).

Обозначим

$$\hat{F}_{nr}(t) = \mathbf{P}\{\tau_{nr}^{(0)} < t\}, \quad F_{nr}(t) = \mathbf{P}\{\tau_{nr}^{(1)} < t\}.$$

Поскольку в этом случае

$$p_{nr}(0;\ t,\ 0) = \mathbf{P}\{\tau_{nr}^{(0)} \geqslant t\} = 1 - \hat{F}_{nr}(t)$$

и

$$p_{nr}(1;\ t,\ 0) = \mathbf{P}\{\tau_{nr}^{(0)} < t,\ \tau_{nr}^{(0)} + \tau_{nr}^{(1)} \geqslant t\} = \hat{F}_{nr}(t) - \hat{F}_{nr}(t) * F_{nr}(t),$$

то условие (2) бесконечной малости процессов $X_{nr}(t)$ $(1 \leqslant r \leqslant k_n)$ равносильно требованию, чтоб при любом фиксированном t

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leqslant r\leqslant k_n} \hat{F}_{nr}(t) = 0,$$

а

$$\Lambda_n(t) = \sum_{r=1}^{k_n} \hat{F}_{nr}(t) - \Psi_n(t)$$

и

$$\Psi_n(t) = \sum_{r=1}^{k_n} \hat{F}_{nr}(t) * F_{nr}(t).$$

Отсюда и из теоремы 1 немедленно следует такое утверждение.

Теорема 2. *Для сходимости сумм независимых бесконечно малых процессов восстановления к процессу Пуассона с ведущей функцией $\Lambda(t)$ необходимо и достаточно, чтобы при каждом фиксированном t*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{k_n} \hat{F}_{nr}(t) = \Lambda(t)$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{k_n} \hat{F}_{nr}(t) * F_{nr}(t) = 0. \tag{6}$$

Условия (6) являются существенным упрощением условий, приведенных автором в [3] и П. Франкеном в [4], а также обобщением результата автора в [2]. Заметим, что мы пользовались лишь независимостью $\tau_{nr}^{(0)}$ и $\tau_{nr}^{(1)}$ и что нам не существенно, чтоб $\tau_{nr}^{(k)}$ при $k \geqslant 1$ имели одинаковую функцию распределения.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
16.XII.1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Григелионис, О сходимости сумм ступенчатых случайных процессов к Пуассоновскому, Теория вер. и ее прим., **VII**, 2 (1963), 189–194.
2. Б. Григелионис, Предельные теоремы для сумм процессов восстановления, Сб. „Кибернетику — на службу коммунизму", т. 2., „Энергия", М.–Л., 246–266, 1964.
3. Б. Григелионис, Предельные теоремы для сумм ступенчатых случайных процессов, Канд. диссертация, М., 1962.
4. P. Franken, Approximation durch Poissonsche Processe, Math. Nachrichten, **26** 1/4 (1963), 101–114.

LAIPTUOTŲ ATSITIKTINIŲ PROCESŲ SUMŲ KONVERGENCIJOS Į PUASONO PROCESĄ KLAUSIMU

B. GRIGELIONIS

(Reziumė)

Darbe randamos iš esmės paprastesnės sąlygos, ekvivalentiškos būtinoms ir pakankamoms sąlygoms laiptuotų atsitiktinių procesų sumų konvergencijai į Puasono procesą, gautoms autoriaus [1] darbe. Taip pat gautos bendros sąlygos atstatymo procesų sumų konvergencijai į Puasono procesą.

TO THE QUESTION ON CONVERGENCE OF THE SUMS OF THE RANDOM STEP PROCESSES TO A POISSON PROCESS

B. GRIGELIONIS

(Summary)

In the paper an essentially simpler conditions equivalent to the necessary and sufficient conditions for convergence of the sums of the random step processes to a Poisson process, given by the author in [1], are proved. The general conditions for convergence of the sums of the renewal processes to a Poisson process are also given.