КЛАССИЧЕСКИЕ ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ИГР

Э. Й. ВИЛКАС, Д. П. СУДЖЮТЕ

Решение ряда теоретико-игровых задач сводится к решению уравнения

$$x = \operatorname{val} A(x) \tag{1}$$

или системы уравнений

$$X = \operatorname{Val} A(X), \tag{2}$$

где $\operatorname{val} A$ – значение игры с матрицей

$$A = \| a_{ij} \|, \quad \operatorname{Val} A = (\operatorname{val} A_1, \ \ldots, \ \operatorname{val} A_s),$$

X – s-мерный вектор (см. [1–4]).

Существуют два подхода к решению этих уравнений. Во-первых, для функции $\operatorname{val} A(x)$ можно найти аналитическое выражение, являющееся кусочно-рациональной функцией матричных элементов $a_{ij}(X)$ (см. [5–6]). После подстановки этих выражений в уравнения (1) и (2), последние становятся обычными нелинейными уравнениями. Во-вторых, можно попытаться применить приближенные методы. Когда матрица игры имеет большие размеры, первый способ едва ли применим из-за своей громоздкости. Поэтому для практических вычислений желательно иметь другие методы. Некоторые результаты в этом направлении получены одним из авторов (см. [7]).

В настоящей заметке некоторые классические теоремы об итеративном методе и методе Ньютона переносятся на случай уравнений (1) и (2). При этом мы сталкиваемся с такой трудностью: производные (в многомерном случае – частные производные) значений всех содержательных игр не только не непрерывны, но и не существуют на счетном множестве точек, причем это возможно для сколь угодно гладких $a_{ij}(x)$. Но, оказывается, классические приближенные методы применимы и для таких функций.

Всюду далее будем считать, что μ – лебегова мера на числовой прямой R, μ^* – соответствующая мера на $R^s = R \times \ldots \times R$. Знак Δ будем применять для обозначения приращения.

Метод итераций. Доказательство приводимых ниже теорем основано на применении принципа сжатых отображений и мало отличается от доказательств обобщаемых теорем (см., напр., [8], стр. 482). Требуется лишь обосновать такое применение, для чего мы докажем несколько лемм.

Лемма 1. *Если функция $f(x)$ абсолютно непрерывна в интервале $[a, b]$ и имеет производную в множестве $E \subset [a, b]$, $\mu(E) = b - a$, то для всех $x \in [a, b]$, $x + \Delta x \in [a, b]$ имеет место неравенство*

$$|f(x+\Delta x) - f(x)| \leqslant |\Delta x| \sup_{x \in E} |f'(x)|.$$

Доказательство. Если функция $f'(x)$ на множестве E неограничена, то неравенство очевидно. При ограниченной $f'(x)$ лемма немедленно следует из абсолютной непрерывности функции $f(x)$: для любых $x \in [a, b]$, $x+\Delta x \in [a, b]$,

$$|f(x+\Delta x)-f(x)| = \left| \int\limits_{x}^{x+\Delta x} f'(t)\, d\mu(t) \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{[x,\, x+\Delta x] \cap E} f'(t)\, d\mu(t) \right| \leqslant |\Delta x| \sup_{t \in [x,\, x+\Delta x] \cap E} |f'(t)| \leqslant |\Delta x| \sup_{x \in E} |f'(x)|.$$

Лемма 2. *Если $F(x)$ абсолютно непрерывна по каждой компоненте вектора X в выпуклой области $G \subset R^s$ и имеет все первые частные производные в множестве $E \subset G$, причем $\mu^*(E) = \mu^*(G) > 0$, то для любых $X \in G$ $X+\Delta X \in G$*

$$|F(X+\Delta X)-F(X)| \leqslant \max_i |\Delta x_i| \sup_{X \in E} \sum_{j=1}^{s} \left| \frac{\partial F(X)}{\partial x_j} \right| \tag{3}$$

$$|F(X+\Delta X)-F(X)| \leqslant \sum_{i=1}^{s} |\Delta x_i| \sup_{X \in E} \max_i \left| \frac{\partial F(X)}{\partial x_i} \right|. \tag{4}$$

Доказательство. Мы всегда можем написать

$$|F(X+\Delta X)-F(X)| \leqslant \sum_{i=1}^{s} |F(X+\Delta_i X)-F(X+\Delta_{i-1} X)|, \tag{5}$$

где $\Delta_i X = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_i, 0, \ldots, 0)$. Если ломаная L, проходящая через X, $X+\Delta_1 X$, $\ldots$, $X+\Delta_s X$, является такой, что $\mu(L \backslash E) = 0$, то на основании леммы 1 и неравенства (5) получаем, что

$$|F(X+\Delta X)-F(X)| \leqslant \sum_{i=1}^{s} |\Delta x_i| \sup_{X \in E} \left| \frac{\partial F(X)}{\partial x_i} \right|,$$

откуда легко следуют неравенства (3) и (4). Если же $\mu(A \backslash E) \neq 0$, то вместо L возьмем некоторую последовательность отрезков $\{L_n\} \to L$ при $n \to \infty$. По теореме Фубини для почти всех сечений K множества G будет выполняться равенство

$$\mu'(K \backslash E) = 0,$$

где μ' – мера Лебега на R^{s-1}. Поэтому мы можем подобрать L_n так, чтобы

$$\mu(L_n \backslash E) = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Применяя к L_n лемму 1 и неравенство (5), а потом переходя к пределу $n \to \infty$, в силу непрерывности $F(X)$ получим неравенства (3) и (4).

В s-мерное евклидово пространство введем следующие нормы:

$$\|X\|_m = \max_{1 \leqslant i \leqslant s} |x_i|, \quad \|X\|_l = \sum_{i=1}^{s} |x_i|,$$

$$\|\varphi'(X)\|_m = \max_{1 \leqslant i \leqslant s} \sum_{j=1}^{s} \left| \frac{\partial \varphi_i(X)}{\partial x_j} \right|,$$

$$\|\varphi'(X)\|_l = \max_{1 \leqslant j \leqslant s} \sum_{i=1}^{s} \left| \frac{\partial \varphi_i(X)}{\partial x_j} \right|,$$

где

$$X=(x_1, \ \dots, \ x_s), \ \varphi(X)=\big(\varphi_1(X), \ \dots, \ \varphi_s(X)\big).$$

Лемма 3. *Если функции $\varphi_i(X)$ абсолютно непрерывны по каждой компоненте вектора X в выпуклой области $G\subset R^s$ и имеют первые частные производные в области $E\subset G$, $\mu^*(E)=\mu^*(G)>0$, то*

$$\|\varphi(X+\Delta X)-\varphi(X)\|_m\leqslant\|\Delta X\|_m\sup_{X\in E}\|\varphi'(X)\|_m \tag{6}$$

и

$$\|\varphi(X+\Delta X)-\varphi(X)\|_l\leqslant\|\Delta X\|_l\sup_{X\in E}\|\varphi'(X)\|_l. \tag{7}$$

Доказательство. По определению m-нормы и лемме 2

$$\|\varphi(X+\Delta X)-\varphi(X)\|_m=\max_{1\leqslant k\leqslant s}|\varphi_k(X+\Delta X)-\varphi_k(X)|\leqslant$$

$$\leqslant\max_{1\leqslant k\leqslant s}\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant s}|\Delta x_i|\sup_{X\in E}\sum_{j=1}^{s}\left|\frac{\partial\varphi_k(X)}{\partial x_j}\right|=\|\Delta X\|_m\sup_{X\in E}\max_{1\leqslant k\leqslant s}\sum_{j=1}^{s}\left|\frac{\partial\varphi_k(X)}{\partial x_j}\right|=\right.$$

$$=\|\Delta X\|_m\sup_{X\in E}\|\varphi'(X)\|_m.$$

Аналогично, по определению l-нормы и неравенству (4) докажем неравенство (7).

Теорема 1. *Пусть функция $\varphi(X)$ абсолютно непрерывна по каждой компоненте вектора X в выпуклой области $G\subset R^s$, функции $\varphi_k(X)$ имеют первые частные производные в множестве $E\subset G$, $\mu^*(E)=\mu^*(G)>0$ и*

$$\sup_{X\in E}\|\varphi'(X)\|_m\leqslant q<1.$$

Если последовательные приближения

$$X_n=\varphi(X_{n-1}), \qquad n=1, \ 2, \ \dots \tag{8}$$

не выходят из области G, то процесс итераций (8) сходится и предельный вектор X^* является в области G единственным решением системы уравнений

$$X=\varphi(X). \tag{9}$$

Доказательство. Достаточно повторить все рассуждения, проводимые при доказательстве аналогичной классической теоремы (см., напр., [8], стр. 482), применив в нужном месте лемму 3.

Имеет место и аналогичная теорема.

Теорема 2. *Пусть функция $\varphi(X)$ абсолютно непрерывна по каждой компоненте в выпуклой области $G\in R^s$, функции $\varphi_k(X)$ имеют первые частные производные в множестве $E\subset G$, $\mu^*(E)=\mu^*(G)>0$ и*

$$\sup_{X\in E}\|\varphi'(X)\|_l\leqslant q<1.$$

Если последовательные приближения (8) не выходят из области G, то итеративный процесс (8) сходится, и его единственный в области G предел удовлетворяет уравнению (9).

Применим теперь эти теоремы к случаю $\varphi(X)=\mathrm{Val}\,A(X)$.

Лемма 4. *Если функции $a_{ij}(x)$ $(i=1, \ \dots, \ m; \ j=1, \ \dots, \ n)$ абсолютно непрерывны в интервале $[a, b]$, то в этом интервале абсолютно непрерывна и функция $v(x)=\mathrm{val}\,\|a_{ij}(x)\|$.*

Доказательство. Утверждение леммы немедленно следует из абсолютной непрерывности функций $a_{ij}(x)$ и неравенства

$$|\operatorname{val}\|a_{ij}\| - \operatorname{val}\|b_{ij}\|| \leqslant \max_{i,j} |a_{ij} - b_{ij}|.$$

Действительно, при фиксированном $\varepsilon > 0$ найдется такое δ, что для любой системы непересекающихся интервалов $(a_k, b_k) \subset [a, b]$, для которой

$$\sum_k (b_k - a_k) \leqslant \delta,$$

имеет место неравенство

$$\sum_k |a_{ij}(b_k) - a_{ij}(a_k)| < \varepsilon$$

для всех i и j. Поэтому

$$\sum_k |v(b_k) - v(a_k)| \leqslant \sum_k \max_{i,j} |a_{ij}(b_k) - a_{ij}(a_k)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_k \sum_{i,j} |a_{ij}(b_k) - a_{ij}(a_k)| < mn\varepsilon.$$

Обозначим матрицы игры через

$$A_t(X) = \|a_{ij}^{(t)}(X)\|_{k_t \times l_t}, \qquad t = 1, 2, \ldots, s,$$

оптимальные стратегии первого и второго игроков в игре с матрицей $A_t(X)$, соответственно, через $p^{(t)}(X)$ и $q^{(t)}(X)$,

$$\frac{\partial}{\partial x_r} A_t(X) = \left\| \frac{\partial}{\partial x_r} a_{ij}^{(t)}(X) \right\|.$$

Теорема 3. *Пусть функции* $a_{ij}^{(t)}(X)$, $i = 1, 2, \ldots, k_t$; $j = 1, 2, \ldots, l_t$; $t = 1, 2, \ldots, s$, *абсолютно непрерывны по каждому* x_i *в выпуклой области* $G \subset R^s$, *имеют первые частные производные в множестве* $E \subset G$, $\mu^*(E) = \mu^*(G) > 0$ *и*

$$\sup_{X \in E} \max_{t, i, j} \sum_{r=1}^{s} \left| \frac{\partial}{\partial x_r} a_{ij}^{(t)}(X) \right| \leqslant q < 1.$$

Если последовательные приближения

$$X_n = \operatorname{Val} A(X_{n-1}), \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{10}$$

не выходят из области G, *то итерации* (10) *сходятся к единственному в области* G *решению уравнения*

$$X = \operatorname{Val} A(X).$$

Доказательство. Покажем, что вектор-функция $\operatorname{Val} A(X)$ удовлетворяет условиям теоремы 1.

В силу существования частных производных функций $a_{ij}^{(t)}(X)$ почти везде в области G, частные производные функций $\operatorname{val} A_t(X)$ существуют также почти везде (см. [5]) и

$$\frac{\partial}{\partial x_r} \operatorname{val} A_t(X) = p^{(t)}(X) \left[\frac{\partial}{\partial x_r} A_t(X) \right] q^{(t)}(X)$$

для тех X, для которых они существуют. Тогда

$$\sup_{X\in E}\left\|\left(\operatorname{Val}A(X)\right)'\right\|_m=\sup_{X\in E}\max_t\sum_r\left|\frac{\partial}{\partial x_r}\operatorname{val}A_t(X)\right|=$$

$$=\sup_{X\in E}\max_t\sum_r\left|p^{(t)}(X)\left[\frac{\partial}{\partial x_r}A_t(X)\right]q^{(t)}(X)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sup_{X\in E}\max_t\sum_r\max_{i,j}\left|\frac{\partial}{\partial x_r}a_{ij}^{(t)}(X)\right|=\sup_{X\in E}\max_{t,i,j}\sum_r\left|\frac{\partial}{\partial x_r}a_{ij}^{(t)}(X)\right|\leqslant q.$$

Остается применить лемму 4.

Аналогично доказывается и

Теорема 4. *Пусть функции* $a_{ij}^{(t)}(X)$, $i=1, 2, \ldots, k_t$; $j=1, 2, \ldots, l_t$; $t=1, 2, \ldots, s$, *абсолютно непрерывны по каждому* x_t *в выпуклой области* $G\subset R^s$, *имеют первые частные производные в области* $E\subset G$, $\mu^*(E)=\mu^*(G)>0$ *и*

$$\sup_{X\in E}\max_{r,i,j}\sum_{t=1}^{s}\left|\frac{\partial}{\partial x_r}a_{ij}^{(t)}(X)\right|\leqslant q<1.$$

Если последовательные приближения (10) *не выходят из области* G, *то итерации* (10) *сходятся к единственному в области* G *решению уравнения*

$$X=\operatorname{Val}A(X).$$

Оценка скорости сходимости во всех случаях получается тривиально по принципу сжатых отображений:

$$\|X^*-X_n\|_{m,l}\leqslant\frac{q^n}{1-q}\|X_1-X_0\|_{m,l},$$

где X^* – предел последовательности итераций.

Метод Ньютона. Для приближенного решения уравнения

$$f(x)=0 \tag{1}$$

будем пользоваться так модифицированным методом Ньютона:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{F'(x_n)}, \tag{2}$$

где

$$F'(x)=f'(x+0),$$

когда либо $f(x)$ убывает и на множестве существования $f'(x)$ возрастает, либо $f(x)$ возрастает и $f'(x)$ убывает. Когда имеют место противоположные случаи, положим

$$F'(x)=f'(x-0).$$

Очевидно, предел последовательности (2), если он существует, для непрерывной функции $f(x)$ является решением уравнения (1).

За нулевое приближение корня уравнения (1) целесообразно брать, соответственно:

$$\begin{aligned}
&x_0=b, \text{ если } f(a)<0 \text{ и } f'(x) \text{ возрастает},\\
&x_0=a, \text{ если } f(a)>0 \text{ и } f'(x) \text{ возрастает},\\
&x_0=b, \text{ если } f(a)>0 \text{ и } f'(x) \text{ убывает},\\
&x_0=a, \text{ если } f(a)<0 \text{ и } f'(x) \text{ убывает}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть*

а) *функция* $f(x)$ *непрерывна в интервале* $[a, b]$,

б) *существуют везде* $f'(x\pm0)$ *и почти везде* $f'(x)$; $f'(x\pm0)\neq0$, в) *в множестве существования* $f'(x)$ *монотонна,*

г) $f(a)\,f(b)<0$.

Тогда процесс (2), *начинающийся с приближения* x_0, *подобранного по* (3), *сходится к решению уравнения* (1) *монотонно.*

Доказательство. Теорему будем доказывать только для случая, когда $f(a)<0$, $f'(x)$ возрастает и $x_0=b$.

Положим

$$\varphi(x,\ x')=F'(x')(x-x')+f(x')$$

и покажем, что

$$\varphi(x,\ x')\leqslant f(x) \tag{4}$$

для всех $a\leqslant x\leqslant x'\leqslant b$.

Пусть E – множество тех точек интервала $[a,\ b]$, в которых функция $f(x)$ производной не имеет. Положим

$$f_\varepsilon(x)=\begin{cases} f(x), & x\notin U_\varepsilon(E),\\ \Theta_\varepsilon(x), & x\in U_\varepsilon(E),\end{cases}$$

где $U_\varepsilon(E)$ некоторая ε – окрестность множества E. В силу условий а) и б) для любого $\varepsilon>0$ функцию $\Theta_\varepsilon(x)$ можем подобрать так, чтобы $f_\varepsilon(x)$ была дифференцируемой в интервале $[a,\ b]$ и ее производная была монотонной. Тогда

$$f'_\varepsilon(x')\geqslant\frac{f_\varepsilon(x')-f_\varepsilon(x)}{x'-x},\qquad x<x',$$

или

$$f'_\varepsilon(x')(x-x')+f_\varepsilon(x')\leqslant f_\varepsilon(x),\qquad x\leqslant x'. \tag{5}$$

Если $x'\notin E$, то предельный переход $\varepsilon\to0$ в неравенстве (5), очевидно, даст неравенство (4). Если же $x'\in E$, то достаточно x' заменить на $x'-\varepsilon$ и тогда перейти к пределу $\varepsilon\to0$. Мы опять получим (4), так как в рассматриваемом нами случае $F'(x)=f'(x-0)$.

Далее заметим, что числа

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{F'(x_n)}$$

удовлетворяют уравнению

$$\varphi(x_{n+1},\ x_n)=0. \tag{6}$$

Методом математической индукции докажем, что последовательность $\{x_n\}$ монотонно убывает и $x_n\geqslant\xi$ для $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, где ξ – корень уравнения (1), существование которого в интервале $[a,\ b]$ следует из условий а) и г).

Утверждение справедливо для $n=1$. В самом деле, из неравенств $f(b)>0$ и $F'(b)>0$ следует, что

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{F'(x_0)}=b-\frac{f(b)}{F'(b)}<b=x_0.$$

В силу (4) и (6) $f(x_1)\geqslant\varphi(x_1,\ x_0)=0$. Поэтому $\xi\leqslant x_1$.

Пусть утверждение справедливо для $k\leqslant n$. Докажем, что оно справедливо и для $k=n+1$.

По предположению $x_n\geqslant\xi$, поэтому $f(x_n)\geqslant0$ и отсюда

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{F'(x_n)}\leqslant x_n.$$

Далее соотношения (4) и (6), как и в случае $n=1$, дают $f(x_{n+1})\geqslant0$ и $x_{n+1}\geqslant\xi$.

Аналогично можно рассмотреть и другие случаи соотношений (3).

Воспользуемся доказанной теоремой для случая, когда

$$f(x)=\operatorname{val} A(x).$$

Матрицу игры будем, как и прежде, обозначать

$$A(x)=\| a_{ij}(x) \|,$$

оптимальные стратегии первого и второго игроков в игре с матрицей $A(x)$, соответственно, $p(x)$ и $q(x)$,

$$A'(x)=\| a'_{ij}(x) \|,$$

$$v'(x)=\frac{d}{dx} \operatorname{val} A(x).$$

Нам потребуется следующая

Лемма. *Если все функции $a_{ij}(x)$ непрерывно дифференцируемы в $[a, b]$, то функция $v(x)=\operatorname{val}\| a_{ij}(x) \|$ дифференцируема в $[a, b]$ за исключением не более чем счетного множества изолированных точек. Производные $v'(x \pm 0)$ существуют для всех $x \in [a, b]$.*

Доказательство. Пусть $S(R)$ — сумма всех элементов матрицы R^{-1}. Из доказательства теоремы 3 заметки [5] видно, что условия леммы обеспечивают существование $v'(x)$ и равенство

$$v'(x)=p(x)A'(x)q(x)$$

в каждом интервале непрерывности оптимальных стратегий $p(x)$ и $q(x)$ первого и второго игроков, соответственно. Возможными точками разрыва оптимальных стратегий являются точки, для которых существуют такие невырожденные подматрицы B и C матрицы A, что

$$S\left(B(x)\right)=S\left(C(x)\right).$$

Обозначим множество этих точек через T. Если T содержит какой-нибудь интервал, то достаточно из двух или более одновременно оптимальных стратегий брать одну крайнюю оптимальную стратегию на всем интервале, и тогда этот интервал будет интервалом непрерывности. Исключим из T все такие интервалы и все те точки, в которых производная функции $v(x)$ существует, и оставшееся множество обозначим через T'.

Множество T' нигде не плотно на числовой прямой. Действительно, если бы T' было плотным на каком-нибудь интервале I, то в силу непрерывности $S(B)$ и $S(C)$ выполнялось бы равенство $S(B)=S(C)$ на всем I, что противоречит определению множества T'.

Покажем, что T состоит из изолированных точек. Для этого допустим противное: существует $x_0 \in T'$, являющееся предельной точкой множества T'. Пусть $x_n \in T'$ — некоторая монотонная последовательность, сходящаяся к x_0. В силу того, что T' нигде не плотно, любой интервал (x_n, x_{n+1}) (для определенности мы полагаем, что последовательность возрастающая) будет содержать интервал, в котором либо $S(B)>S(C)$, либо $S(B)<S(C)$. Мы можем предположить, что оба неравенства выполняются бесконечно много раз, ибо в противном случае интервал $(x_0-\varepsilon, x_0)$, $\varepsilon>0$, не содержал бы точек из T'. Нетрудно заметить, что последовательность $\{x_n\}$ можно подобрать так, чтобы оба неравенства имели место в каждом интервале (x_n, x_{n+1}). Тогда в каждом интервале найдутся такие точки, в которых

$$\frac{d}{dx} S\left(B(x)\right) > \frac{d}{dx} S\left(C(x)\right),$$

и такие, в которых

$$\frac{d}{dx} S\left(B(x)\right) < \frac{d}{dx} S\left(C(x)\right).$$

По теореме о среднем значении в силу этого для всех n будут существовать такие $\xi_n \in (x_n, x_{n+1})$, что

$$\frac{d}{dx} S\left(B(\xi_n)\right) = \frac{d}{dx} S\left(C(\xi_n)\right).$$

Из непрерывности производных отсюда следует равенство

$$\frac{d}{dx} S\left(B(x_0)\right) = \frac{d}{dx} S\left(C(x_0)\right). \tag{7}$$

Теперь нетрудно будет показать, что производная функции $v(x)$ в точке x_0 существует, и поэтому $x_0 \notin T'$. Рассмотрим для этого

$$\Delta v(x_0) = v(x_0 + h) - v(x_0).$$

Для простоты рассуждений мы исключаем случай, когда в окрестности точки x_0 существенных матриц будет больше, чем две. Ввиду конечности числа субматриц общий случай рассматривается аналогично. Тогда

$$\Delta v(x_0) = \begin{cases} \left[S\left(B(x_0+h)\right)\right]^{-1} - \left[S\left(B(x_0)\right)\right]^{-1}, & \text{когда в } x_0+h \text{ существенна } B, \\ \left[S\left(C(x_0+h)\right)\right]^{-1} - \left[S\left(C(x_0)\right)\right]^{-1}, & \text{когда в } x_0+h \text{ существенна } C. \end{cases} \tag{8}$$

Очевидно, из (8) следует, что

$$\overline{\lim_{h\to 0}} \frac{\Delta v(x_0)}{h} = \max\left\{\frac{d}{dx}\left[S\left(B(x_0)\right)\right]^{-1}, \frac{d}{dx}\left[S\left(C(x_0)\right)\right]^{-1}\right\},$$

$$\underline{\lim_{h\to 0}} \frac{\Delta v(x_0)}{h} = \min\left\{\frac{d}{dx}\left[S\left(B(x_0)\right)\right]^{-1}, \frac{d}{dx}\left[S\left(C(x_0)\right)\right]^{-1}\right\}.$$

Но в силу (7)

$$\overline{\lim_{h\to 0}} \frac{\Delta v(x_0)}{h} = \underline{\lim_{h\to 0}} \frac{\Delta v(x_0)}{h} = v'(x_0).$$

Существование $v'(x \pm 0)$ для всех x следует из существования $p(x \pm 0)$ и $q(x \pm 0)$ и равенства

$$v'(x \pm 0) = p(x \pm 0) A'(x) q(x \pm 0).$$

Теорема 2. *Пусть*

а) *функции* $a_{ij}(x)$ *непрерывно дифференцируемы в интервале* $[a, b]$,

б) *функция* $p(x) A'(x) q(x) \neq 0$ *и монотонна в множестве, где она определена*; $p(x \pm 0) A'(x) q(x \pm 0) \neq 0$,

в) $\operatorname{val} A(a) \operatorname{val} A(b) < 0$.

Тогда итеративный процесс (2), *начинающийся с* x_0, *определенного соотношениями* (3), *для* $f(x) = \operatorname{val} A(x)$ *сходится монотонно к решению уравнения*

$$\operatorname{val} A(x) = 0.$$

Доказательство. На основании доказанной леммы и неравенства

$$|\operatorname{val} A(x_1) - \operatorname{val} A(x_2)| \leqslant \max_{i,j} |a_{ij}(x_1) - a_{ij}(x_2)|$$

заключаем, что функция $\operatorname{val} A(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1. Это доказывает справедливость теоремы 2.

Авторы выражают признательность А. Темпельману за критические замечания.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
22.XI.1965

ЛИТЕРАТУРА

1. L. S. Shapley, Stochastic games, Proc. Nat. Acad. Sc. USA, **39** (1953), 1095–1100.
2. J. Milnor, L. S. Shapley, On games of survival, Contr. to the theory of games III, Princeton, 15–46, 1957.
3. H. Everett, Recursive games, Contr. to the theory of games, vol. III, Princeton, 1957.
4. И. В. Романовский, Случайные блуждания игрового типа, Теория вероятн. и ее прим., **4** (1961), 426–429.
5. Э. И. Вилкас, Некоторые функциональные свойства значения матричной игры, Лит. мат. сб., **III**, 1 (1963), 71–76.
6. Э. И. Вилкас, Области решения параметрической матричной игры, Лиг. мат. сб., **IV** 1 (1964), 31–35.
7. Э. И. Вилкас, Решение функционального уравнения с оператором значения игры, Лит. мат. сб., **III**, 1 (1963), 61–707.
8. Б. П. Демидович, И. А. Марон, Основы вычислительной математики, Физматгиз, М., 1963.

KLASIKINIAI APYTIKSLIAI METODAI LOŠIMŲ TEORIJOJE

E. VILKAS. D. SŪDŽIŪTĖ

(Reziumė)

(1) ir (2) lygtims spręsti taikomi iteracijų ir Niutono metodai, apibendrinant atitinkamas klasikines teoremas.

THE CLASSICAL APPROXIMATIVE METHODS IN GAME THEORY

E. VILKAS, D, SŪDŽIŪTĖ

(Summary)

There are proposed iterative and Newton methods for solution of equations (1) and (2) by means of generalization of some classical theorems.