РАЗРЕШИМОСТЬ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Э. Й. ВИЛКАС

В заметке дается алгоритм проверки разрешимости системы линейных неравенств, коэффициенты которых равны либо 0, либо 1.

1. Задана система неравенств

$$\sum_{j=1}^{n} a_{sj} x_j + x_0 \geqslant d_1 > 0, \qquad s \in \{1, \ldots, k\} = S,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{tj} x_j + x_0 \leqslant d_2 < 0, \qquad t \in \{k+1, \ldots, m\} = T, \tag{1}$$

где все $a_{ij}=0$ или 1. Целесообразно вместо совместности системы (1) рассматривать разрешимость задачи линейного программирования:

$$\min \sum_{j=0}^{n} |x_j| \cdot 0$$

при ограничениях (1) или эквивалентной задачи

$$\min \sum_{j=0}^{n} (x_j + x_j') \cdot 0$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{sj} x_j - \sum_{j=1}^{n} a_{sj} x_j' + x_0 - x_0' \geqslant d_1 \quad s \in S, \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{tj} x_j - \sum_{j=1}^{n} a_{tj} x_j' + x_0 - x_0' \leqslant d_2 \quad t \in T,$$

$$x_j \geqslant 0, \ x_j' \geqslant 0, \qquad j=0, 1, \ldots, n.$$

Условия (2) совместны тогда и только тогда, когда совместны условия

$$\sum_{j=1}^{n} a_{sj} x_j - \sum_{j=1}^{n} a_{sj} x_j' + x_0 - x_0' \geqslant 1, \ s \in S,$$

$$-\sum_{j=1}^{n} a_{tj} x_j + \sum_{j=1}^{n} a_{tj} x_j' - x_0 + x_0' \geqslant 1, \ t \in T, \tag{3}$$

$$x_j \geqslant 0, \ x_j' \geqslant 0, \qquad j=0, 1, \ldots, n.$$

Действительно, при $d_1 = -d_2$ (3) из (2) получается делением всех неравенств на d_1. Если же $d_1 \neq -d_2$, то можно их сравнять, либо уменьшая d_1, либо увеличивая $|d_2|$.

Вместо задачи (3) будем рассматривать двойственную ей задачу

$$\max \sum_{s\in S} y_s + \sum_{t\in T} y_t$$

при условиях

$$\begin{gathered}
\sum_{s\in S} a_{sj} y_s - \sum_{t\in T} a_{tj} y_t \leqslant 0, \qquad j=1, \ldots, n, \\
-\sum_{s\in S} a_{sj} y_s + \sum_{t\in T} a_{tj} y_t \leqslant 0, \qquad j=1, \ldots, n, \\
\sum_{s\in S} y_s - \sum_{t\in T} y_t \leqslant 0, \\
-\sum_{s\in S} y_s + \sum_{t\in T} y_t \leqslant 0, \\
y_s \geqslant 0, \ y_t \geqslant 0, \ s\in S, \ t\in T.
\end{gathered} \tag{4}$$

Система (4) эквивалентна системе

$$\begin{gathered}
\sum_{s\in S} a_{sj} y_s - \sum_{t\in T} a_{tj} y_t = 0, \qquad j=1, \ldots, n, \\
\sum_{s\in S} y_s - \sum_{t\in T} y_t = 0, \\
y_s \geqslant 0, \ y_t \geqslant 0, \ s\in S, \ t\in T.
\end{gathered} \tag{5}$$

Система (5) всегда имеет решение (нулевое). Поэтому в силу теоремы двойственности система (1) будет совместна, если только линейная форма двойственной задачи ограничена. Последняя будет таковой, если система (5) будет иметь только нулевое решение.

Алгоритм проверки разрешимости

Алгоритм проверки разрешимости системы (1) состоит из двух частей: упрощения условий задачи и непосредственной проверки разрешимости упрощенной задачи.

Упрощение условий. Для удобства изложения перепишем условия (1) в виде таблицы

$$\begin{array}{c|ccc|c}
1 & a_{11} & \cdots & a_{1n} & \geqslant d_1 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
1 & a_{l1} & \cdots & a_{ln} & \geqslant d_1 \\
\hline
1 & a_{l+1,1} & \cdots & a_{l+1,n} & \leqslant d_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
1 & a_{m1} & \cdots & a_{mn} & \leqslant d_2
\end{array} \tag{1'}$$

Алгоритм упрощения задачи состоит в выполнении в любом порядке следующих операций (необязательно всех):

1. Если для некоторого j_0 равенство $a_{sj_0}=0$ выполняется при всех $s\in S$, то вычеркиваем j_0-й столбец и все строки из T, для которых $a_{tj_0}=1$.

Полученная система будет совместной тогда и только тогда, когда совместна система (1'). Действительно, так как $a_{sj_0}=0$ для всех $s\in S$, то j_0-й столбец не имеет никакого значения для S строк. Одновременно, полагая $x_{j_0}< -R$, где R – достаточно большое число, мы можем удовлетворить все те неравенства, для которых $a_{tj_0}=1$. И это в силу равенств $a_{sj_0}=0$ $s\in S$ никак не влияет на первые k неравенств.

2. Если для некоторого j_0 имеем $a_{sj_0}=1$ для всех $s\in S$, то вычеркиваем j_0-й столбец и все строки из T, для которых $a_{tj_0}=0$.

Обоснование этого аналогично сказанному в п. 1, если иметь в виду, что заменой $x_0=-x_{j_0}+\bar{x}_0$ j_0-й столбец можно сделать дополнительным вектором к единичному.

3. Если для некоторого j_0 имеем $a_{tj_0}=0$ для всех $t\in T$, то вычеркиваем j_0-й столбец и все те строки из S, для которых $a_{sj_0}=1$.

4. Если для некоторого j_0 $a_{tj_0}=1$ для всех $t\in T$, то вычеркиваем j_0-й столбец и все те строки из S, для которых $a_{sj_0}=0$.

Обоснование п. п. 3 и 4 аналогично сказанному в п. 1, 2.

5. Если сумма двух каких-нибудь столбцов есть единичный вектор, то один (любой) из них можно вычеркнуть, так как они являются взаимно дополнительными к единичному вектору и любой из них можно при необходимости восстановить с помощью оставшегося и первого столбца.

6. Из всех одинаковых строк или столбцов оставляются только по одному, другие вычеркиваются.

Замечание. Операции $1-6$ меняют множество решений системы (1) несущественно, и эти изменения нетрудно восстановить. Поэтому они применимы и для решения задачи (1), если при этом приписать подходящие значения вычеркнутым x_j.

Проверка совместности. Как отмечалось, проверка совместности системы (1) или соответствующей упрощенной системы сводится к проверке наличия неотрицательного ненулевого решения системы (5) или соответственно упрощенной. Запишем систему (5) или соответсвенно упрощенную систему в виде таблицы

$$\begin{array}{c|ccc|ccc}
 & x_1 & \cdots & x_l & x_{l+1} & \cdots & x_m \\
\hline
y_1 & -a_{11} & \cdots & -a_{l1} & a_{l+1,1} & \cdots & a_{m1} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
y_n & -a_{1n} & \cdots & -a_{ln} & a_{l+1,n} & \cdots & a_{mn} \\
y_0 & -1 & \cdots & -1 & 1 & \cdots & 1
\end{array} \qquad (6)$$

Над этой таблицей совершаем жордановые исключения до тех пор, пока это возможно. Допустим, что после этого мы провели соответствующую перенумерацию строк и столбцов.

В итоге этих действий мы получим таблицу

$$\begin{array}{c|c|c} & y_1 \cdots y_r & x_{r+1} \cdots x_m \\ \hline x_1 & & \\ \vdots & c_{ij} & b_{ij} \\ x_r & & \\ \hline y_{r+1} & & 0 \cdots 0 \\ \vdots & & \vdots \qquad \vdots \\ y_{n+1} & & 0 \cdots 0 \end{array} \tag{7}$$

Так как в силу (5) должно быть $y_j=0$, то после каждого жорданова шага (даже до него!) заменяемый столбец можно вычеркнуть. Это показано и в таблице (7).

Далее следует рассмотреть несколько случаев.

1. Если $r=m$, то проверка закончена и в этом случае задача (1) имеет решение. Действительно таблица (7) означает, что

$$x_i=\sum_{j=1}^{r} c_{ij} y_j+\sum_{j=r+1}^{m} b_{ij} x_j \tag{8}$$

или в силу равенств $y_j=0$ и $r=m$, что $x_i=0$ для всех i, и система (5) имеет только нулевое решение.

2. Если $r<m$, и для некоторого j_0 все $b_{ij_0} \geqslant 0$, $j_0>r$, то система (1) решения не имеет. Если же все $b_{ij} \leqslant 0$ и в каждом столбце имеется ненулевой элемент, то система (1) решение имеет.

Это немедленно следует из уравнений (8) или, так как $y_j=0$, из уравнений

$$x_i=\sum_{j=r+1}^{m} b_{ij} x_j, \qquad i=1, \ldots, r.$$

В первом случае любое положительное x_{j_0}, $j_0>r$ определяет неотрицательное ненулевое решение системы (5), а во втором случае такого решения нет.

Если проверка на этом не закончилась, весь цикл повторяется. Вместо таблицы (6) берется новая таблица, т. к. для существования неотрицательного ненулевого решения системы (6) необходимо и достаточно существование такого решения у системы, изображенной в новой таблице (9)

$$\begin{array}{c|ccc} & x_1(x_{r+1}) & \cdots & x_p(x_m) \\ \hline y_1(x_1) & b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_r(x_r) & b_{r1} & \cdots & b_{rp} \end{array} \tag{9}$$

В новой таблице в скобках помещены обозначения из таблицы (7).

Циклы повторяются до тех пор, пока либо а) имеет случай 1 или 2, либо б) остается одна строка, либо в) остается один столбец.

В случае а) ответ содержится в 1 и 2. В случае б) система (1) имеет решение, если все $b_{1j}<0$. Это немедленно следует из урарнения (8) и является частным случаем случая 2. В противном случае система (1) решения не имеет.

В случае в) система (1) имеет решение тогда и только тогда, когда этот столбец содержит хотя бы один отрицательный элемент, ибо только тогда система (5) будет иметь только нулевое неотрицательное решение.

Скорость работы алгоритма

1. Первая часть алгоритма объем задачи сокращает в среднем в

$$\frac{3}{2}\left(2^{-b}+2^{-m+b}\right)$$

раз $\Big($обозначения из $(1)\Big)$.

2. Вторая часть алгоритма может иметь не более q циклов, где q есть наименьшее решение неравенства

$$\min(m,\ n)\leqslant 2^{q}.$$

Эта оценка достигается только в том случае, если процесс не оборвется раньше $\Big($не будет случаев 1) или 2)$\Big)$ и каждый раз $r=\frac{m}{2}$.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
29.X.1965

TIESINIŲ NELYGYBIŲ SISTEMOS IŠSPRENDŽIAMUMAS

E. VILKAS

(*R e z i u m ė*)

Duodamas (1) tiesinių nelygybių sistemos išsprendžiamumo tikrinimo algoritmas, kai a_i yra tiktai 0 arba 1.

SOLVABILITY OF THE SYSTEM OF LINEAR INEQUALITIES

E. VILKAS

(*S u m m a r y*)

There is given the algorithm for examination of solvability of the system (1), when a are 0 or 1.