VI ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS

1 9 6 6

О НЕКОТОРЫХ СЕТЯХ В ТРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В. ПАДЕРВИНСКАС

В этой заметке делается попытка исследовать такие системы криволинейных координат u^1, u^2, u^3 в трехмерном евклидовом пространстве, для которых кривые $u^i+u^j=\mathrm{const}$, $u^i-u^j=\mathrm{const}$ являются линиями кривизны координатных поверхностей, т. е. поверхностей заданных уравнениями $u^k=\mathrm{const}$ (i, j, k — различны). Получены системы дифференциальных уравнений в частных производных, решения которых приводят к таким координатным системам, и исследован частный случай, когда координатные углы равны между собой, но не постоянны.

Если в трехмерном евклидовом пространстве, или в некоторой его области, трехмерную сеть описывает вектор $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1,\ u^2,\ u^3)$, то [3]:

1) сеть называется ромбической, если

$$\boldsymbol{r}_1^2:\boldsymbol{r}_2^2:\boldsymbol{r}_3^2=A(u^2,\ u^3):B(u^1,\ u^3):C(u^1,\ u^2);\ \left(\boldsymbol{r}_i=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u^i}\right); \tag{1}$$

2) сеть называется ромбоедрической, если

$$A=B=C; \tag{2}$$

3) сеть называется полуромбоедрической, если

$$A=A(u^3)=B. \tag{3}$$

Сеть будем называть регулярной в данной области, если через каждую точку этой области проходит три и только три кривые, каждая из различных семейств, и $(\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2,\ \boldsymbol{r}_3)\neq 0$. Если эту сеть принять за координатную, то из (1), (2), (3) получим соответствующие соотношения для метрического тензора $g_{ij}=\boldsymbol{r}_i\boldsymbol{r}_j$, когда координатная сеть является ромбической, ромбоедрической или полуромбоедрической.

Обозначим коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхностей $u^k=\mathrm{const}$ (k — фиксировано), соответственно, через $\overset{k}{\gamma}_{ij}$ и $\overset{k}{\pi}_{ij}$ (i, $j\neq k$). Требуется, чтобы кривые $u^i+u^j=\mathrm{const}$, $u^i-u^j=\mathrm{const}$ были линиями кривизны поверхностей $u^k=\mathrm{const}$, т. е. после преобразования

$$u^{i'}=u^i+u^j$$
$$u^{j'}=u^i-u^j$$

выполнялись равенства

$$\overset{k}{\gamma}_{i'j'}=0,\quad (i'\neq j') \tag{4}$$

$$\overset{k}{\pi}_{i'j'}=0,\quad (i'\neq j') \tag{5}$$

или, до преобразования,

$$\overset{k}{\gamma}_{ii}=\overset{k}{\gamma}_{jj} \tag{4'}$$

$$\overset{k}{\pi}_{ii}=\overset{k}{\pi}_{jj}. \tag{5'}$$

Так как $\overset{k}{\gamma}_{ij}=g_{ij|u^k=\mathrm{const}}$ и соотношения (4′) должны выполняться на любой координатной поверхности, то из (4′) получаем:

$$g_{11}=g_{22}=g_{33}=M. \tag{6}$$

Так как [1] $r_{ij}=G_{ij}^{\alpha}r_{\alpha}$, то

$$\overset{k}{\pi}_{lm}=\frac{\varepsilon_k}{\sqrt{g_{ii}\,g_{jj}-g_{ij}^2}}\,(r_l\,r_m\,r_{lm})=\frac{\varepsilon_k}{\sqrt{g_{ii}\,g_{jj}-g_{ij}^2}}\,G_{lm}^k\sqrt{g}$$

$\left(l,\ m,\ i,\ j\neq k;\quad i\neq j;\quad l,\ m,\ \alpha=1,\ 2,\ 3;\quad \varepsilon_k=\pm 1;\quad g=\det|g_{ij}|=(r_1\ r_2\ r_3)^2\right)$,
и из (5′) следует

$$G_{ii}^k=G_{jj}^k\quad (i,\ j\neq k). \tag{7}$$

Если выполнены соотношения (6) и (7), то, как нетрудно проверить, выполнены также соотношения (4′) и (5′), а тем самым и соотношения (4) и (5).

Таким образом, *для того, чтобы вектор* $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1,\ u^2,\ u^3)$ *описывал в трехмерном евклидовом пространстве координатную систему, для которой кривые* $u^i+u^j=\mathrm{const}$, $u^i-u^j=\mathrm{const}$ *являются линиями кривизны координатных поверхностей, необходимо и достаточно, чтобы координатная сеть была ромбоедрической и христофели второго рода удовлетворяли условиям* (7).

Из условий (7) получаем:

$$g_{ij}\,g_{jk}-Mg_{ik}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^j}-\frac{\partial M}{\partial u^i}\right)+(g_{ik}\,g_{ij}-Mg_{jk})\left(\frac{\partial M}{\partial u^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^i}\right)+$$
$$+(M^2-g_{ij}^2)\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^j}-\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^i}\right)=0;\quad (i,\ j,\ k=1,\ 2,\ 3;\quad 3,\ 1,\ 2;\quad 2,\ 3,\ 1). \tag{8}$$

Обозначим угол между координатными линиями на поверхностях $u^k=\mathrm{const}$ через α_k. Тогда

$$g_{ij}=M\cos\alpha_k\quad (i,\ j,\ k-\text{различны}), \tag{9}$$

и из соотношений (8) получаем следующие уравнения для определения углов $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$:

$$(\cos\alpha_k\cos\alpha_i-\cos\alpha_j)\,\frac{\partial\alpha_k}{\partial u^j}-\cos\alpha_k\cos\alpha_j\cos\alpha_i)\,\frac{\partial\alpha_k}{\partial u^i}+$$
$$+\sin\alpha_k\sin\alpha_i\,\frac{\partial\alpha_i}{\partial u^j}-\sin\alpha_k\sin\alpha_j\,\frac{\partial\alpha_j}{\partial u^i}=0;\ (i,j,k=1,2,3;\ 3,1,2;\ 2,3,1). \tag{10}$$

Для определения метрического тензора мы должны еще определить величину M. Она не может быть произвольной так как для евклидова пространства риманов тензор $R_{ij,\,kh}$ тождественно равен нулю

$$R_{ij,\,kh}=0. \tag{11}$$

Подставляя в уравнения (11) компоненты метрического тензора g_{ij} из формул (6) и (9), полагая, что α_k являются решениями системы (10), получим уравнения для определения M. Условие интегрируемости полученных уравнений накладывают новые условия на функции α_k.

Для получения этих условий, возьмем пространство $\bar{V}_3$ с метрическим тензором $\bar{g}_{ij}=\bar{g}_{ji}$:

$$\bar{g}_{11}=\bar{g}_{22}=\bar{g}_{33}=1; \quad g_{ij}=\cos\alpha_k \quad (i,\ j,\ k - \text{различны}),$$

где α_k являются решениями уравнений (10), и вычислим риманов тензор $R_{ij,\,kh}$.

Если $R_{ij,\,kh}\equiv 0$, то пространство $\bar{V}_3$ является евклидовым и уравнениям (11) удовлетворяет $M=1$. Так как автоморфизмами рассматриваемых координатных систем являются преобразования конформной группы, то все другие координатные системы, удовлетворяющие условиям поставленной задачи; при тех же α_k получим конформным отображением пространства на себя.

Если $R_{ij,\,kh}\neq 0$, то пространство $\bar{V}_3$ – риманово. Если M существует, то это пространство конформно-евклидово. Чтобы риманово пространство было конформно-евклидовым [2], тензор

$$\bar{S}_{ij}=\bar{S}_{ji}=-\bar{R}_{ij}+\frac{g_{ij}\bar{R}}{4}$$

($\bar{R}_{ij}$ – тензор Риччи, $\bar{R}={}^{\alpha\beta}\bar{R}_{\alpha\beta}$) должен удовлетворять уравнениям

$$\bar{\nabla}_i\bar{S}_{jk}-\bar{\nabla}_j\bar{S}_{ik}=0. \tag{12}$$

Таким образом, координатные углы, кроме уравнений (10), должны удовлетворять еще уравнениям (12).

Если $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ являются решениями уравнений (10) и (12) (т. е. если система уравнений (10) и (12) имеет решение), то M необходимо существует и является решением уравнений [2]

$$\bar{\nabla}_i\,\sigma_j-\sigma_i\,\sigma_j+\frac{1}{2}\,g_{ij}\bar{g}^{\alpha\beta}\,\sigma_\alpha\,\sigma_\beta=\bar{S}_{ij}, \tag{13}$$

где $\sigma=\frac{1}{2}\ln M$.

Ниже мы найдем одно решение системы (10) и (12), удовлетворяющее некоторым дополнительным условиям. Тем самым будет доказано, что система (10), (12) всегда имеет решение.

Пусть

$$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha\neq\text{const}.$$

Тогда из уравнений (10) получаем:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial u^1}=\frac{\partial\alpha}{\partial u^2}=\frac{\partial\alpha}{\partial u^3},$$

или

$$\alpha=\alpha\,(u^1+u^2+u^3).$$

В этом случае

$$\bar{S}_{11}=\bar{S}_{22}=\bar{S}_{33}=\frac{\dfrac{\partial^2\cos\alpha}{(\partial u^i)^2}}{2\,(1-\cos\alpha)}+\frac{3\,(4\cos\alpha-1)}{8\,(1-\cos\alpha)^2\,(2\cos\alpha+1)}\left(\frac{\partial\cos\alpha}{\partial u^i}\right)^2,$$

$$\bar{S}_{12}=\bar{S}_{13}=\bar{S}_{23}=\frac{\dfrac{\partial^2\cos\alpha}{(\partial u^i)^2}}{2\,(1-\cos\alpha)}+\frac{9\cos\alpha}{8\,(1-\cos\alpha)^2\,(2\cos\alpha+1)}\left(\frac{\partial\cos\alpha}{\partial u^i}\right)^2,$$

а уравнения (12) обращаются в тождество. Следовательно, уравнения (13) имеют решения для любово $\alpha=\alpha\,(u^1+u^2+u^3)$. Если ограничиться случаем $\sigma=\sigma\,(u^1+u^2+u^3)$, то из уравнений (13) остается только два независимых (одно из тех уравнений, для которых $i=j$ и одно из тех, для которых $i\neq j$).

После некоторых несложных преобразований эти уравнения приводим к виду:

$$\frac{\partial^2\sigma}{(\partial u^i)^2}-\left(\frac{\partial\sigma}{\partial u^i}\right)^2-\frac{2\,\frac{\partial\cos\alpha}{\partial u^i}\,\frac{\partial\sigma}{\partial u^i}}{2\cos\alpha+1}+\frac{3\left(\frac{\partial\sigma}{\partial u^i}\right)^2}{2\,(2\cos\alpha+1)}=\overline{S}_{ij},$$

$$\frac{\partial^2\sigma}{(\partial u^i)^2}-\left(\frac{\partial\sigma}{\partial u^i}\right)^2-\frac{\frac{\partial\cos\alpha}{\partial u^i}\,\frac{\partial\sigma}{\partial u^i}}{2\,(2\cos\alpha+1)}+\frac{3\cos\alpha\left(\frac{\partial\sigma}{\partial u^i}\right)^2}{2\,(2\cos\alpha+1)}=\overline{S}_{jk};\quad (j\neq k).$$

Из последних уравнений имеем:

$$\left[2\,(1-\cos\alpha)\,\frac{\partial\sigma}{\partial u^i}-\frac{\partial\cos\alpha}{\partial u^i}\right]^2=0,$$

или

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u^i}=\frac{\frac{\partial\cos\alpha}{\partial u^i}}{2\,(1-\cos\alpha)},$$

откуда

$$\sigma=-\ln\sqrt{1-\cos\alpha}+\ln c$$

и

$$g_{11}=g_{22}=g_{33}=M=e^{2\sigma}=\frac{c^2}{1-\cos\alpha},\quad g_{ij}=\frac{c^2\cos\alpha}{1-\cos\alpha}\quad (i\neq j). \tag{14}$$

Найдем искомые координатные системы в конечном виде. Для этого проинтегрируем систему

$$\boldsymbol{r}_{ij}=G_{ij}^{\alpha}\boldsymbol{r}_{\alpha}. \tag{15}$$

Так как в этом случае

$$G_{ij}^{k}=\frac{\frac{\partial\cos\alpha}{\partial u^m}}{2\,(1-\cos\alpha)\,(2\cos\alpha+1)},$$

т. е. G_{ij}^k не зависят от индексов, то решением системы (15) является

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{c}_\beta u^\beta+\boldsymbol{c}_4\int\limits_{t_0}^{u^1+u^2+u^3}\sqrt{\frac{2\cos\alpha+1}{1-\cos\alpha}}\,dt,$$

где $\alpha=\alpha(t)$, $\boldsymbol{c}_i$, $\boldsymbol{c}_4$ — постоянные векторы и $\boldsymbol{c}_1+\boldsymbol{c}_2+\boldsymbol{c}_3=0$. Чтобы выполнялись равенства (14), векторы $\boldsymbol{c}_1$, $\boldsymbol{c}_2$, $\boldsymbol{c}_3$, $\boldsymbol{c}_4$ должны удовлетворять соотношениям:

$$\boldsymbol{c}_i\boldsymbol{c}_4=0;\quad \boldsymbol{c}_4^2+\boldsymbol{c}_i\boldsymbol{c}_j=0;\quad 2\boldsymbol{c}_4^2-\boldsymbol{c}_i^2=0;\quad (i\neq j). \tag{16}$$

Разный подбор векторов $\boldsymbol{c}_1$, $\boldsymbol{c}_2$, $\boldsymbol{c}_3$, $\boldsymbol{c}_4$ устанавливает, очевидно, положение криволинейной координатной системы относительно декартовой.

Соотношениям (16) удовлетворяют, например, векторы

$$\boldsymbol{c}_1\left(\frac{c}{\sqrt{6}},\frac{c}{\sqrt{2}},0\right),\ \boldsymbol{c}_2\left(\frac{c}{\sqrt{6}},\frac{-c}{\sqrt{2}},0\right),\ \boldsymbol{c}_3\left(\frac{-2c}{\sqrt{6}},0,0\right),\ \boldsymbol{c}_4\left(0,0,\frac{c}{\sqrt{3}}\right),$$

где $c\neq 0$ произвольная константа. Тогда

$$x=\frac{c}{\sqrt{6}}\,u^1+\frac{c}{\sqrt{6}}\,u^2-\frac{2c}{\sqrt{6}}\,u^3,$$

$$y=\frac{c}{\sqrt{2}}\,u^1-\frac{c}{\sqrt{2}}\,u^2,$$

$$z=\frac{c}{\sqrt{3}}\int\limits_{t_0}^{u^1+u^2+u^3}\sqrt{\frac{2\cos\alpha+1}{1-\cos\alpha}}\,dt,\ \alpha=\alpha(t).$$

Нетрудно убедиться, что координатными поверхностями полученной криволинейной координатной системы являются цилиндры, и следовательно, кривые $u^i+u^j=\text{const}$, $u^i-u^j=\text{const}$ — образующие этих цилиндров и ортогональные траектории последних.

Таким образом, для каждой функции $\alpha=\alpha(u^1+u^2+u^3)$ нашли однопараметрическое семейство координатных систем (действительных в области, в которой $2\cos\alpha+1>0$), для которых α является координатным углом, и которые удовлетворяют условием задачи.

Так как мы ограничились случаем, когда $\sigma=\sigma(u^1+u^2+u^3)$, то, конечно, потеряли целый ряд решений системы (13). Но все другие координатные системы при том же α могут быть получены конформными отображениями пространства на себя, так как любое конформное преобразование линии кривизны переводит в линии кривизны.

Вильнюсский Государственный университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию 10.VI.1965

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Ф. Каган, Основы теории поверхностей, Гостехиздат, 1947.
2. П. К. Рашевский, Риманова геометрия и тензорный анализ, Гостехиздат, 1953.
3. H. Liebman, Rhombische Geradennetze im Raum, Sitzungsberichte d. Heidelberger Akad. d. Wiss. math.-nat. Kl., Jahrgang 1927.

APIE KAI KURIUOS TINKLUS TRIMATĖJE EUKLIDINĖJE ERDVĖJE

V. PADERVINSKAS

(*Reziumė*)

Darbe nagrinėjamos trimatės euklidinės erdvės kreivalinijinių koordinačių sistemos, kurioms kreivės $u^i+u^j=\text{const}$, $u^i-u^j=\text{const}$ yra koordinatinių paviršių kreivumo linijos. Gautos diferencialinių lygčių sistemos (10), (12), (13), nustatančios tokių koordinatinių sistemų metrinius tenzorius.

Baigtiniu pavidalu gautos koordinatinės sistemos, kai koordinatiniai kampai lygūs.

ÜBER EINIGE NETZE IM DREIDIMENSIONALEN EUKLIDISCHEN RAUM

V. PADERVINSKAS

(*Zusammenfassung*)

Es wird im dreidimensionalen euklidischen Raum einige krümmlinige Koordinatensysteme, für die die Kurven $u^i+u^j=\text{const}$ $u^i-u^j=\text{const}$ Krümmungslinien sind, untersucht. Die Systeme von Differentialgleichungen (10), (12), (13) bestimmen den metrischen Tensor solcher Koordinatensysteme.

Im spezielen Falle sind die Koordinatensysteme mit gleichen Koordinatenwinkel erhalten