VI ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 1
1966

СУЩЕСТВОВАНИЕ ИНВАРИАНТНЫХ ФИНСЛЕРОВЫХ МЕТРИК В ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С ЛИНЕЙНОЙ ГРУППОЙ ИЗОТРОПИИ ТЕНЗОРНОГО ТИПА

А. ИОНУШАУСКАС

0. В настоящей статье изучается существование инвариантных финслеровых метрик в таких однородных пространствах, линейная группа изотропии которых является тензорным представлением (п. 2) или же вполне приводима, но неприводимые части являются тензорными представлениями (п. 3). Существование однородных пространств, имеющих линейную группу изотропии заданного вида, доказано в п. 1. Полученные результаты применяются для конкретных примеров однородных пространств (п. 4).

Общий метод изучения существования инвариантных финслеровых метрик в однородных пространствах описан в [1] (п. 2) и здесь предполагается известным.

1. Пусть дана произвольная линейная группа $\mathfrak{G} \subset GL(N, R)$

$$dx^A = x^B H^A_{BI} \Theta^I \tag{1}$$

$$(A, B, C = 1, \ldots, N; \quad I, K, L, \ldots = N+1, \ldots, N+N');$$

здесь Θ^I – левоинвариантные формы некоторой группы Ли, т. е. они имеют следующую структуру:

$$D\Theta^I = \frac{1}{2} C^I_{LK} [\Theta^L \Theta^K],$$

где

$$C^I_{(LK)} = 0, \quad C^K_{(LP} C^I_{Q)K} = 0, \tag{2}$$

а константы H^A_{BI} (вместе с C^I_{LK}) удовлетворяют известным уравнениям Ли

$$H^A_{CI} H^C_{BK} - H^A_{CK} H^C_{BI} = H^A_{BL} C^L_{IK}. \tag{3}$$

Спрашивается: *всегда ли существует однородное пространство G/g, для которого данная линейная группа $\mathfrak{G}$ являлась бы линейной группой изотропии?*

Ответ утвердительный: в качестве G всегда можно взять группу Ли, определяемую левоинвариантными формами ω^I, ω^A, удовлетворяющими следующим структурным уравнениям:

$$D\omega^I = \frac{1}{2} C^I_{LK} [\omega^L \omega^K],$$

$$D\omega^A = \qquad H^A_{BK} [\omega^B \omega^K], \tag{$\bar{1}$}$$

в которой подгруппа g выделяется системой

$$\omega^A = 0. \tag{4}$$

Действительно, константы C^I_{LK}, H^A_{BK} в силу (2) и (3) удовлетворяют тождествам Якоби и кососимметричны по нижним индексам, если положим $H^A_{KB} = -H^A_{BK}$.

Группа ($\tilde{1}$) в известном смысле тривиальна: она является некоторой подгруппой аффинной группы, причем группа g оказывается стационарной подгруппой точки N-мерного аффинного пространства, так что однородное пространство G/g в случае ($\tilde{1}$), (4) (для краткости такое однородное пространство мы будем называть *тривиальным*) является некоторой поверхностью N-мерного аффинного пространства. Именно, упомянутая подгруппа аффинной группы

$$D\vartheta^A = [\vartheta^B \vartheta^A_B], \quad D\vartheta^A_B = [\vartheta^C_B \vartheta^A_C]$$

определяется системой

$$\vartheta^A = \omega^A, \quad \vartheta^A_B = H^A_{BI}\,\omega^I,$$

где ω^I, ω^A — левоинвариантные формы группы ($\tilde{1}$).

Ввиду этого замечания имеет смысл задавать некоторый класс однородных пространств, указывая, какой вид имеет линейная группа изотропии этих пространств: всегда такой класс будет непустым.

2. На линейную группу $\mathfrak{G}$ (см. (1)) мы часто будем смотреть как на группу преобразований N-мерного векторного пространства L над полем R действительных чисел, причем элементы пространства L мы будем именовать также точками. Под траекторией группы $\mathfrak{G}$ мы будем понимать геометрическое место точек пространства L, описываемое какой-нибудь точкой из L, когда на эту точку действует группа преобразований $\mathfrak{G}$.

Теорема 1. *Пусть линейная группа $\mathfrak{G}$ является группой преобразований координат тензора* $T^{A_1\cdots A_q}_{B_1\cdots B_q}$, где A_ξ ($\xi=1, \ldots, q$; $q\geqslant 1$) означает систему $a_{1_\xi} a_{2_\xi}\cdots a_{m_\xi}$ контравариантных индексов, а B_ξ — систему $b_{1_\xi} b_{2_\xi}\cdots b_{n_\xi}$ ковариантных индексов, преобразуемых группой $GL(N_\xi, R)$ ($m_\xi\geqslant 0$, $n_\xi\geqslant 0$, $m_\xi+n_\xi>0$). Предполагается, что между группами $GL(N_\xi, R)$ с различными значениями номера ξ нет никаких связей. Возможны два случая:*

1) *$m_{\xi_0}\neq n_{\xi_0}$ хотя бы для одного $\xi=\xi_0$ ($1\leqslant\xi_0\leqslant q$). Тогда траектории являются конусами с вершиной в нуле (в частности, группа $\mathfrak{G}$ может действовать транзитивно). Следовательно, в однородных пространствах с такой линейной группой изотропии $\mathfrak{G}$ инвариантная финслерова метрика отсутствует.*

2) *$m_\xi=n_\xi$ для каждого $\xi=1, \ldots, q$. Тогда имеется тангенциально невырожденная инвариантная гиперповерхность*

$$\sum T^{A_1\cdots A_q}_{B_1\cdots B_q}\, T^{B_1\cdots B_q}_{A_1\cdots A_q} = \mathrm{const}. \tag{5}$$

Следовательно, в однородных пространствах с такой линейной группой изотропии существует инвариантная финслерова метрика.

Следствие. *В случае* 2) *(всё в обозначениях теоремы* 1) *указанный результат останется верным и в том случае, когда между группами $GL(N_\xi, R)$ с различными значениями номера ξ будут существовать любые зависимости или же группа $GL(N_\xi, R)$ будет заменена некоторой своей подгруппой H_ξ.*

---

* Во избежание недоразумений см. доказательство: системой (а) определяется группа $\mathfrak{G}$ в случае $q=2$, $m_1=1$, $n_1=0$, $m_2=n_2=1$. Строение соответствующей системы для общего случая очевидно, однако она слишком громоздка, чтобы решиться выписывать.

Доказательство теоремы 1. 1. Для краткости записи рассмотрим случай $q=2$, $m_1=1$, $n_1=0$, $m_2=n_2=1$, т. е. случай, когда $\mathfrak{G}$ имеет вид

$$dT^{ia}_b=-\omega^i_k T^{ka}_b-\Theta^a_c T^{ic}_b+\Theta^c_b T^{ia}_c; \tag{a}$$

здесь

$$D\omega^k_i=[\omega^j_i\,\omega^k_j],\quad D\Theta^b_a=[\Theta^c_a\,\Theta^b_c]$$

($i,\ j,\ k=1,\ \ldots,\ N_1$; $a,\ b,\ c=N_1+1,\ \ldots,\ N_1+N_2$). Положим символ дифференцирования δ следующим:

$$\omega^k_i(\delta)=\delta^k_i\,\omega,\quad \Theta^a_b(\delta)=0, \tag{б}$$

где $D\omega=0$; тогда

$$\delta T^{ia}_b=T^{ia}_b\,\omega.$$

Это и показывает, что мы сместились вдоль луча, исходящего из нуля ($T^{ia}_b=0$), т. е. траектории являются конусами с вершиной в нуле.

В общем случае доказательство аналогично: значения левоинвариантных форм $\omega^{a_{\xi_0}}_{b_{\xi_0}}$ группы $GL(N_{\xi_0},\ R)$ для символа дифференцирования δ полагаем следующими:

$$\omega^{a_{\xi_0}}_{b_{\xi_0}}(\delta)=\frac{1}{m_{\xi_0}-n_{\xi_0}}\,\delta^{a_{\xi_0}}_{b_{\xi_0}}\,\omega; \tag{6}$$

значения левоинвариантных форм всех остальных групп $GL(N_\xi,\ R)$ полагаем для символа δ равными нулю. Тогда $\delta T^{A_1\ldots A_q}_{B_1\ldots B_q}=T^{A_1\ldots A_q}_{B_1\ldots B_q}\,\omega$.

В случае 2) группа $\mathfrak{G}$ самоконтрагредиентна, и достаточно сослаться на работу А. И. Мальцева [2] (см. также [3]), хотя и непосредственная проверка несложна. Метрика здесь является даже римановой.

Замечание. Из доказательства случая 1) мы видим, что предположение о независимости между группами $GL(N_\xi,\ R)$ с различными ξ использовалось лишь в формулах (б). Отсюда видно, в каком направлении можно усиливать утверждение случая 1 теоремы 1. В частности, можно высказать следующую теорему.

Теорема 2. (В обозначениях теоремы 1.) *Пусть существует* ξ_0 $(1\leqslant\xi_0\leqslant q)$, *удовлетворяющий двум условиям:*

а) $m_{\xi_0}\neq n_{\xi_0}$,

б) *ни одна группа* $GL(N_\xi,\ R)$ $(\xi\neq\xi_0)$ *не имеет никаких связей с группой* $GL(N_{\xi_0},\ R)$.

Тогда траектории являются конусами с вершиной в нуле (следовательно, в соответствующих однородных пространствах инвариантная финслерова метрика отсутствует) даже тогда, когда имеются любые связи между группами $GL(N_\xi,\ R)$ $(\xi\neq\xi_0)$ *или когда вместо некоторых из них берутся произвольные подгруппы* $H_\xi\subset GL(N_\xi,\ R)$.

3. Вполне приводимую линейную группу $\mathfrak{G}$ символически будем записывать так:

$$\mathfrak{G}=\begin{bmatrix}\mathfrak{G}_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \mathfrak{G}_r\end{bmatrix}\quad (r>1). \tag{7}$$

При этом не исключена возможность, что какая-нибудь из групп $\mathfrak{G}_u$ (u, v, $w=1, \ldots, r$) еще приводима или даже вполне приводима. Векторное пространство L, в котором действует группа (7), распадается в прямую сумму r инвариантных подпространств L_u:

$$L=\sum_{u=1}^{r} L_u.$$

Лемма. (В обозначениях настоящего пункта.) *Пусть* $\dim L_u>1$ *и пусть в* $L_u (u=1, \ldots, r)$ *задано однопараметрическое семейство тангенциально невырожденных инвариантных относительно* $\mathfrak{G}_u$ *гиперповерхностей* $V_u(t_u)$ $(a_u<t_u<b_u)$, *заполняющее область в пространстве* L_u, *точнее,*

$$\operatorname{Int}\left[\bigcup_{a_u<t_u<b_u} V_u(t_u)\right]\neq\varnothing .$$

Тогда в $L=\sum_{u=1}^{r} L_u$ *существует тангенциально невырожденная гиперповерхность, инвариантная относительно группы* (7).

Доказательство. В $L=\sum_{u=1}^{r} L_u$ имеем r-параметрическое семейство тангенциально невырожденных поверхностей

$$V(t_1, \ldots, t_r)=V_1(t_1)\times\cdots\times V_r(t_r)\ (a_u<t_u<b_u;\quad u=1, \ldots, r)$$

коразмерности r, инвариантных относительно группы (7) и заполняющих область в пространстве L, точнее, $\operatorname{Int}\left[\bigcup_{t_u,\,u} V(t_1, \ldots, t_r)\right]\neq\varnothing$. Следовательно, из этого семейства поверхностей $V(t_1, \ldots, t_r)$ можно выбрать $(r-1)$-параметрическое подсемейство, образующее тангенциально невырожденную гиперповерхность в L, инвариантную относительно группы (7).

Замечание. Если в L_u имеется одна инвариантная тангенциально невырожденная гиперповерхность, определяемая уравнением

$$F^{(u)}(x)=c^{(u)}\quad (c^{(u)}=\mathrm{const}\neq 0),$$

где $F^{(u)}$ — однородная функция степени $\nu\neq 0$, то условия леммы заведомо выполняются, т. к. $F^{(u)}(x)=\alpha^{\nu}c^{(u)}$ — тоже инвариантная тангенциально невырожденная гиперповерхность при любом положительном значении постоянной α.

Теорема 3. *Пусть* $r=2$ (см. (7)) *и пусть* $\mathfrak{G}_1$ *является группой преобразований координат тензора* $T^{A_1\cdots A_q}_{B_1\cdots B_q}$ (в обозначениях теоремы 1), *а* $\mathfrak{G}_2$ — *группой преобразований координат дуального тензора* $T^{B_1\cdots B_q}_{A_1\cdots A_q}$. *Тогда в пространстве* $\left(T^{A_1\cdots A_q}_{B_1\cdots B_q},\ T^{B_1\cdots B_q}_{A_1\cdots A_q}\right)$ *существует тангенциально невырожденная инвариантная относительно* $\mathfrak{G}$ *гиперповерхность*

$$\sum T^{A_1\cdots A_q}_{B_1\cdots B_q}\,T^{B_1\cdots B_q}_{A_1\cdots A_q}=\mathrm{const} \tag{8}$$

(в левой части полное свертывание). *Следовательно, в однородных пространствах с такой линейной группой изотропии* $\mathfrak{G}$ *существует инвариантная финслерова метрика.*

Замечание. Результат теоремы 3 останется верным и при любых ограничениях, накладываемых на линейные группы $GL(N_\xi, R)$, с помощью которых преобразуются системы индексов A_ξ, B_ξ.

Доказательство сводится к замечанию, что группа $\mathfrak{G}$ самоконтрагредиентна, и остается сделать ту же ссылку, как при доказательстве случая 2) теоремы 1. Инвариантная метрика здесь тоже риманова.

Определение. Группы $\mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{G}_2$, описанные в условии теоремы 3, мы будем называть *дуальными*.

Применяя лемму к результатам теоремы 3 и следствия из теоремы 1, получаем следующую основную теорему.

Теорема 4. *Пусть линейная группа изотропии $\mathfrak{G}$ однородного пространства $\mathfrak{M}$ вполне приводима* (см. (7)), *причем группа $\mathfrak{G}_u$ для некоторых значений u имеет вид, описанный в следствии из теоремы 1, а оставшееся семейство групп $\mathfrak{G}_u$* (их должно быть четное число) *можно разбить на классы так, что каждый класс состоит из пары дуальных групп. Тогда однородное пространство $\mathfrak{M}$ обладает инвариантной финслеровой метрикой.*

Кроме этих положительных теорем докажем еще следующее отрицательное утверждение.

Теорема 5. *Пусть линейная группа изотропии $\mathfrak{G}$ однородного пространства $\mathfrak{M}$ вполне приводима* (см. (7)), *а любая группа $\mathfrak{G}_u$ $(u=1, \ldots, r)$ имеет вид, описанный в теореме 2* (тот факт, что некоторая группа $GL(N_\xi, R)$ или ее подгруппа H_ξ „обслуживает“ именно группу $\mathfrak{G}_u$, мы будем отмечать, записывая ξ в виде функции от $u: \xi(u)$, $\xi_0(u)$ и т. п.), *причем выполнено следующее дополнительное условие: группа $GL(N_{\xi_0(u)}, R)$ при любом значении u не имеет никаких связей ни с группами $GL(N_{\xi_0(v)}, R)$ $(v \neq u)$, ни с группами $H_{\xi(w)}$ $(\xi(w) \neq \xi_0(w))$. Тогда в однородном пространстве $\mathfrak{M}$ инвариантная финслерова метрика невозможна.*

Замечание. Если $m_{\xi_0(u)} - n_{\xi_0(u)} = m_{\xi_0(v)} - n_{\xi_0(v)}$ для некоторых u и v $(u \neq v)$, то группы $GL(N_{\xi_0(u)}, R)$ и $GL(N_{\xi_0(v)}, R)$ могут совпадать – результат теоремы 5 останется верным.

Доказательство. Полагая символ дифференцирования δ таким, что

$$\omega_{b_{\xi_0(u)}}^{a_{\xi_0(u)}} = \frac{1}{m_{\xi_0(u)} - n_{\xi_0(u)}} \delta_{b_{\xi_0(u)}}^{a_{\xi_0(u)}} \omega,$$

а все остальные формы – нули (ср. (6)), мы увидим, что траектории группы $\mathfrak{G}$ являются конусами с вершиной в нуле.

4. Приведем примеры нетривиальных однородных пространств, которые имеют линейную группу изотропии, описанную в теореме 4.

1. В качестве точки однородного пространства возьмем пару подпространств $L_1 = \{\vec{e}_i\}$, $L_2 = \{\vec{e}_a\}$ $(i, j, k = 1, \ldots, n;\ a, b, c = n+1, \ldots, n+m)$ $(n+m)$-мерного векторного пространства L такую, что L является прямой суммой этих подпространств. Само однородное пространство описывается своей точкой, когда на нее естественным образом действует группа $GL(n+ +m, R)$. Иными словами, мы рассматриваем однородное пространство G/g, где $G = GL(n+m, R)$, а g – стационарная подгруппа пары подпространств

L_1, L_2. При подходящем выборе левоинвариантных форм группы $GL(n+m, R)$ подгруппа g выделяется системой

$$\omega_i^a = 0, \quad \omega_b^k = 0;$$

линейная группа изотропии $\mathfrak{G}$ такого однородного пространства имеет вид

$$dx_i^a = \Theta_i^k x_k^a - \Theta_b^a x_i^b,$$
$$dx_b^k = -\Theta_i^k x_b^i + \Theta_b^a x_a^k,$$

где

$$D\Theta_i^k = [\Theta_i^j \Theta_j^k], \quad D\Theta_b^a = [\Theta_b^c \Theta_c^a].$$

Видим, что $\mathfrak{G}$ имеет вид, указанный в теореме 3, в качестве уравнения тангенциально невырожденной инвариантной гиперповерхности можно взять

$$x_i^a x_a^i = \mathrm{const},$$

и однородное пространство обладает инвариантной финслеровой метрикой.

1a. Обобщение примера 1. Рассмотрим однородное пространство G/g, где $G = GL(n_1 + \cdots + n_s, R)$, а g — стационарная подгруппа последовательности подпространств $L_1, \ldots, L_s$ $(n_1 + \cdots + n_s)$-мерного векторного пространства L таких, что L является прямой суммой этих подпространств. При находящем выборе левоинвариантных форм группы $GL(n_1 + \cdots + n_s, R)$ подгруппа g определяется системой

$$\omega_{i_\alpha}^{k_\beta} = 0 \quad (\alpha \neq \beta)$$

$$\left(\alpha,\ \beta = 1, \ldots, s; \quad i_\alpha, j_\alpha, k_\alpha = 1 + \sum_{\sigma=1}^{\alpha-1} n_\sigma, \ldots, n_\alpha + \sum_{\sigma=1}^{\alpha-1} n_\sigma\right),$$

а линейная группа изотропии $\mathfrak{G}$ имеет вид

$$dx_{i_\alpha}^{k_\beta} = -\Theta_{j_\beta}^{k_\beta} x_{i_\alpha}^{j_\beta} + \Theta_{i_\alpha}^{j_\alpha} x_{j_\alpha}^{k_\beta} \quad (\alpha \neq \beta),$$

где

$$D\Theta_{i_\alpha}^{k_\alpha} = \left[\Theta_{i_\alpha}^{j_\alpha} \Theta_{j_\alpha}^{k_\alpha}\right]$$

(здесь суммирования по α или по β нигде нет; суммирование же ведется по j_α и j_β), так что $\mathfrak{G}$ имеет вид (7), $r = s(s-1)$, и семейство групп $\mathfrak{G}_u$ распадается на $\frac{s(s-1)}{2}$ пар дуальных групп. Именно, дуальными являются группы

$$dx_{i_\alpha}^{k_\beta} = -\Theta_{j_\beta}^{k_\beta} x_{j_\alpha}^{j_\beta} + \Theta_{i_\alpha}^{j_\alpha} x_{j_\alpha}^{k_\beta},$$
$$dx_{i_\beta}^{k_\alpha} = -\Theta_{j_\alpha}^{k_\alpha} x_{i_\beta}^{j_\alpha} + \Theta_{i_\beta}^{j_\beta} x_{j_\beta}^{k_\alpha}$$

($\alpha \neq \beta$ фиксированы), и однородное пространство обладает инвариантной финслеровой метрикой.

2. Рассмотрим однородное пространство G/g, где $G = GL(n+m, R)$, а g — стационарная подгруппа n линейно независимых векторов $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ и некоторого подпространства L' $(n+m)$-мерного векторного пространства L таких, что L есть прямая сумма подпространства L' и подпространства, натянутого на векторы $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$. При подходящем выборе левоинвариантных форм группы $GL(n+m, R)$ подгруппа g определяется системой

$$\omega_i^k = 0, \quad \omega_i^a = 0, \quad \omega_b^k = 0$$

$(i, j, k=1, \ldots, n; \quad a, b, c=n+1, \ldots, n+m)$, а линейная группа изотропии $\mathfrak{G}$ имеет вид

$$dx_i^k = 0,$$
$$dx_i^a = -\Theta_b^a x_i^b,$$
$$dx_b^k = \Theta_b^a x_a^k \qquad (D\Theta_b^a = [\Theta_b^c \Theta_c^a]),$$

т. е. вид, описанный в теореме 4. Инвариантная тангенциально невырожденная гиперповерхность может быть определена, например, уравнением

$$x_i^k x_k^i + x_i^a x_a^i = \text{const},$$

и такое однородное пространство обладает инвариантной финслеровой метрикой.

Очевидны также обобщения этого примера.

Вильнюсский Государственный педагогический институт

Поступило в редакцию 10.VII.1965

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Ионушаускас, О существовании инвариантных финслеровых метрик в однородных пространствах. Лит. мат. сб., V, 1 (1965), 45–55.
2. А. И. Мальцев, О полупростых подгруппах групп Ли, Изв. АН СССР, сер. матем., 8, № 4 (1944), 143–174.
3. Е. Б. Дынкин, Максимальные подгруппы классических групп, Труды Моск. матем. общества, I (1952) 39–166.

INVARIANTIŠKŲ FINSLERIO METRIKŲ EGZISTENCIJA HOMOGENINĖSE ERDVĖSE SU TENZORINIO TIPO TIESINE IZOTROPIJOS GRUPE

A. JONUŠAUSKAS

(*Reziumė*)

Darbe tiriama invariantiškų Finslerio metrikų egzistencija tokiose homogeninėse erdvėse kurių tiesinė izotropijos grupė yra (7) pavidalo, kai $\mathfrak{G}_u$ yra grupė, aprašyta 1 teoremoje.

EXISTENZ VON INVARIANTEN FINSLERSCHEN METRIKEN IN HOMOGENEN RÄUMEN MIT LINEARER ISOTROPIEGRUPPE TENSORISCHEN TYPUS

A. JONUSCHAUSKAS

(*Zusammenfassung*)

In der vorliegenden [Arbeit wird die Frage nach der Existenz der invarianten Finslerschen Metriken für eine gewisse Klasse von homogenen Räumen untersucht, und zwar für den Fall, dass lineare Isotropiegruppe des Raumes von Gestalt (7) ist, wo alle $\mathfrak{G}_u$ tensorische Darstellungen sind.