VI ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1966

ПОЛИАНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ПОСТОЯННОГО МОДУЛЯ

М. Б. БАЛК

1. Функция $f(z)$ называется *полианалитической* порядка n (или n-аналитической) в области D комплексной z-плоскости, если она представима в виде

$$f(z)=\sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k \varphi_k(z), \tag{1}$$

где $\varphi_k(z)$ $(k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1)$ – функции, аналитические в D, а $\bar{z}$ – переменное, комплексно сопряженное переменному z.

Известно, что *аналитическая* функция $f(z)$, имеющая в некоторой области D постоянный модуль, является константой. Что же касается *полианалитических* функций постоянного модуля, то среди них имеются и такие, которые отличны от констант. В общем случае имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Всякая функция $f(z)$, полианалитическая порядка n в некоторой области D и имеющая в некоторой подобласти d области D постоянный модуль, представима в D в виде*:

$$f(z)=\lambda\cdot\overline{P(z)}/P(z), \tag{2}$$

где λ – константа, а $P(z)$ – полином от z степени не выше $n-1$)*.

2. Докажем сначала два вспомогательных предложения.

Лемма 1. *Если функция $f(z)$, n —аналитическая в некоторой области d, имеет постоянные и не равные нулю модули на n концентрических окружностях, лежащих вместе со своими внутренностями в d, то $f(z)$ представима в следующем виде*:

$$f(z)=\frac{Q(z,\ \bar{z})}{P(z)}, \tag{3}$$

где $Q(z,\ \bar{z})$ – n —аналитический полином, а $P(z)$ —аналитический полином.

Доказательство. Пусть $|f(z)|=A_\nu\neq 0$ на окружностях Γ_ν $\{|z-z_0|=c_\nu>0\}$ $(\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. Без потери общности можно считать $z_0=0$.

Пусть Γ $\{|z|=c>0\}$ – какая-либо окружность, на которой $|f(z)|=A=\text{const}>0$, причем круг $|z|\leqslant c$ лежит в d (в дальнейшем в качестве Γ будем брать Γ_ν, $\nu=1,\ \ldots,\ n$). Функция $f(z)$ совпадает на Γ с аналитической функцией

$$\Phi(z;\ c)=\sum_{k=0}^{n-1} c^{2k}\cdot\frac{\varphi_k(z)}{z^k}. \tag{4}$$

---

*) Для бианалитических функций $(n=2)$ эта теорема доказана иным методом в [1].

Построим вспомогательную функцию

$$\Psi(z;\ c)=z^{n-1}\cdot\Phi(z;\ c)=\sum_{k=0}^{n-1} c^{2k} z^{n-k-1}\cdot \varphi_k(z). \tag{5}$$

Вращение функции $f(z)$ на контуре Γ определяется по формуле:

$$Вр_\Gamma f(z)\equiv\frac{1}{2\pi}\,\Delta_\Gamma \arg f(z)\equiv\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma d\arg f(z). \tag{6}$$

Так как на Γ $f(z)$ непрерывна и отлична от нуля, то $Вр_\Gamma f(z)$ равно какому-то (конечному) числу h.

Поэтому

$$Вр_\Gamma \Psi(z;\ c)=Вр_\Gamma(z^{n-1})+Вр_\Gamma\Phi(z;\ c)=m,$$

где

$$m=n-1+h.$$

Так как функция $\Psi(z;\ c)$ регулярна внутри Γ, то $m\geqslant 0$, причем m — число ее нулей, лежащих внутри Γ (каждый нуль считается столько раз, какова его кратность).

Рассмотрим еще функцию

$$\psi(z)=\frac{1}{A}\,\Psi(cz;\ c). \tag{7}$$

Она 1) регулярна внутри окружности γ $\{|z|=1\}$; 2) имеет внутри нее m нулей; 3) имеет на γ постоянный модуль 1. Покажем, что $\psi(z)$ — *рациональная* функция, сначала положим $m\geqslant 2$.

Обозначим нули функции $\psi(z)$ через $\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_m$. Вспомогательная функция

$$\sigma(z)=\psi(z)\Big/\prod_{\nu=1}^{m-1}\frac{z-\alpha_\nu}{1-\bar{\alpha}_\nu\cdot z} \tag{8}$$

имеет внутри γ единственный нуль α_m. На γ $|\sigma(z)|\equiv 1$. В силу теоремы Руше функция $\sigma(z)$ принимает внутри γ только по одному разу каждое значение a, для которого $|a|<1$. Иначе говоря, функция $w=\sigma(z)$ отображает однолистно круг $|z|<1$ на себя, причем точка α_m переходит в точку $w=0$. Поэтому

$$\sigma(z)=e^{i\Theta}\,\frac{z-\alpha_m}{1-\bar{\alpha}_m\cdot z}\quad(\Theta=\text{const},\ \operatorname{Im}\Theta=0). \tag{9}$$

Из (7)—(9) следует, что $\psi(z)$ — рациональная функция. При $m=1$ проведенное здесь рассуждение только упрощается. При $m=0$ с помощью теоремы Руше легко показать, что $\psi(z)=\text{const}$.

Итак, во всех случаях $\psi(z)$ — а, следовательно, и $\Psi(z;\ c)$ — *рациональная* функция.

Полагая в (5) c равным $c_1,\ \ldots,\ c_n$ (и, соответственно, в (7) A равным $A_1,\ \ldots,\ A_n$), получим систему n линейных уравнений относительно n неизвестных функций

$$z^{n-k-1}\varphi_k(z)\qquad(k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1),$$

причем определитель системы, очевидно, отличен от нуля. Решив ее, убедимся, что все $\varphi_k(z)$ — рациональные функции от z, так что $f(z)$ представима в виде (3).

Лемма доказана.

Замечание. Если n – аналитическая функция $f(z)$ имеет постоянные модули лишь на $n-1$ окружностях (или на меньшем числе окружностей), то она уже может оказаться трансцендентной. Такова, например, функция

$$f(z)=\prod_{\nu=1}^{n-1}(\nu^2\sin^2\nu z+|z|^2\cos^2\nu z-\nu^2)+1,$$

которая равна 1 на окружностях $|z|=\nu$ $(\nu=1, \ldots, n-1)$.

Лемма 2. *Если полианалитический полином* $Q(z, \bar z)$ *и аналитический полином* $P(z)$ *взаимно просты и имеют равные модули на всей плоскости, то*

$$Q(z, \bar z)\equiv e^{i\alpha}\cdot\overline{P(z)},$$

где α *— вещественная константа.*

Доказательство. По условию

$$|Q(z, z)|\equiv|P(z)|. \tag{11}$$

Это равенство можно, очевидно, переписать так:

$$Q(z, \bar z)\cdot Q_1(z, \bar z)-P(z)\cdot P_1(\bar z)\equiv 0, \tag{12}$$

где

$$Q_1(z, \bar z)\equiv\overline{Q(z, \bar z)},\ P_1(\bar z)=\overline{P(z)}. \tag{13}$$

Рассмотрим функцию двух независимых комплексных переменных

$$F(z, w)\equiv Q(z, w)\cdot Q_1(z, w)-P(z)\cdot P_1(w). \tag{14}$$

Она голоморфна для всех пар (z, w) и на многообразии $w=\bar z$ обращается в нуль. Поэтому (см. [2], стр. 55) $F(z, w)\equiv 0$, то есть для всех z и w справедливо тождество:

$$Q(z, w)\cdot Q_1(z, w)\equiv P(z)\cdot P_1(w). \tag{15}$$

Но полиномы $Q(z, w)$ и $P(z)$ взаимно просты (ибо в противном случае $Q(z, \bar z)$ и $P(z)$ не были бы взаимно простыми). Поэтому (см. [3], стр. 190) из делимости произведения $Q(z, w)\cdot Q_1(z, w)$ на $P(z)$ следует, что $Q_1(z, w)$ делится на $P(z)$:

$$Q_1(z, w)\equiv\mu\cdot P(z) \tag{16}$$

($\mu\equiv\mu(z, w)$ — полином).

Из (11) ясно, что точная степень полинома $Q(z, \bar z)$ относительно пары переменных z, $\bar z$ равна точной степени полинома $P(z)$ (в противном случае легко получить противоречие при больших $|z|$). Поэтому μ – константа. Из (16) и (13) видно, что $Q_1(z, \bar z)\equiv\mu\cdot P(z)$, $Q(z, \bar z)=\bar\mu\cdot\overline{P(z)}$. Из (11) ясно, что $|\mu|=1$, то есть $\mu=e^{i\alpha}$ ($\alpha=\text{const}$, $\operatorname{Im}\alpha=0$). Лемма 2 доказана.

3. Доказательство теоремы 1. Пусть в d

$$|f(z)|\equiv A=\text{const}\neq 0. \tag{17}$$

(При $A=0$ доказательство тривиально.) Так как (17) имеет место, в частности, на n концентрических окружностях, лежащих вместе со своими внутренностями в d, – а, значит, и в D, – то в силу леммы 1 $f(z)$ представима в D в виде (3). Мы можем здесь считать полиномы $Q(z, \bar z)$ и $P(z)$ взаимно простыми.

В области d $|f(z)|\equiv A=\text{const}\neq 0$, то есть

$$|Q(z, \bar z)|\equiv A^2|P(z)|^2.$$

Обе части последнего равенства представляют собой функции, полианалитические на всей плоскости. Из их совпадения на области d следует их совпадение на всей z-плоскости (см. [4]). Таким образом, к полиномам $Q(z, \bar{z})$ и $A \cdot P(z)$ применима лемма 2, так что

$$Q(z, \bar{z}) = \lambda \cdot \overline{P(z)} \quad (\lambda = Ae^{i\alpha},\ \alpha = \text{const},\ \operatorname{Im}\alpha = 0),$$

$$f(z) = \lambda \cdot \overline{P(z)}/P(z),$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1. Если целая полианалитическая функция $\Pi(z)$ и целая аналитическая функция $A(z)$ имеют равные модули в какой-либо области d и равны на бесконечности $\left(\text{то есть } \lim\limits_{z\to\infty} \frac{\Pi(z)}{A(z)} = 1\right)$, то они тождественно равны на всей плоскости.

Для доказательства следует применить теорему 1 к дроби $\Pi(z)/A(z)$.

Приведем одно предложение, которое иллюстрирует возможность применения теоремы 1 к изучению *аналитических* функций.

Следствие 2. *Пусть функция $F(z)$ аналитична в некоторой области d плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, а $q(x, y)$ — полином (вообще говоря, комплексный) от двух вещественных переменных x и y. Если в d*

$$|F(z) \cdot q(x, y)| \equiv \text{const} \neq 0,$$

то существуют такие полиномы (относительно переменного z) $r(z)$ и $s(z)$ и такая константа A, что

$$F(z) \equiv \frac{A}{r(z) \cdot s(z)}, \quad q(x, y) \equiv \overline{r(z)} \cdot s(z). \tag{18}$$

Для доказательства представим $q(x, y)$ в виде полинома от z и $\bar{z}$:

$$q(x, y) \equiv \pi(z, \bar{z}).$$

Функция

$$f(z) \equiv F^2(z) \cdot |\pi(z, \bar{z})|^2$$

удовлетворяет условиям теоремы 1, и поэтому существует такой полином $P(z)$, что

$$F^2(z) \cdot |\pi(z, z)|^2 \equiv \lambda \frac{|P(z)|^2}{P^2(z)},$$

то есть в d

$$\frac{1}{\lambda} F^2(z) \cdot P^2(z) \equiv \left| \frac{P(z)}{\pi(z, \bar{z})} \right|^2.$$

Но аналитическая функция может быть вещественной в области лишь тогда, когда она — константа.

Поэтому

$$\frac{1}{\lambda} F^2(z) \cdot P^2(z) \equiv A_1 = \text{const} > 0, \tag{19}$$

$$\left| \frac{\pi(z, \bar{z})}{P(z)} \right| \equiv A_2 = \frac{1}{\sqrt{A_1}} = \text{const}. \tag{20}$$

Из (19) ясно, что

$$F(z) \equiv \frac{A_3}{P(z)} \qquad (A_3 \text{ — константа}). \tag{21}$$

Из (20), в силу теоремы 1, следует, что

$$\pi(z, \bar{z})/P(z) \equiv A_4 \cdot r_1(\bar{z})/r(z), \tag{22}$$

где $r(z)$ — некоторый полином от z, $r_1(\bar{z}) \equiv \overline{r(z)}$, A_4 — константа. Тождество (22) влечет за собой тождество для двух независимых комплексных переменных:

$$r(z) \cdot \pi(z, w) \equiv A_4 \cdot P(z) \cdot r_1(w). \qquad (23)$$

Отсюда ясно, что полином $\pi(z, w)$ делится на $r_1(w)$:

$$\pi(z, w) \equiv T(z, w) \cdot r_1(w) \qquad (T(z, w) \text{ — полином}).$$

Поэтому $\big($см. (23)$\big)$

$$r(z) \cdot T(z, w) \equiv A_4 \cdot P(z),$$

так что $T(z, w)$ не зависит от w, то есть является полиномом только от z:

$$T(z, w) \equiv s(z) \qquad \big(s(z) \text{ — полином}\big).$$

Итак,

$$\pi(z, w) \equiv s(z) \cdot r_1(w),$$

$$q(x, y) \equiv \pi(z, \bar{z}) \equiv s(z) \cdot \overline{r(z)},$$

$$F(z) \equiv \frac{A}{r(z) \cdot s(z)} \qquad (A = A_3 \cdot A_4 = \text{const}).$$

Замечание. Если в условиях следствия 2 функция $q(x, y)$ — *вещественный* полином, то $F(z)$ и $q(x, y)$ представимы в виде:

$$F(z) = \frac{A}{r^2(z)}, \quad q(x, y) = B \cdot |r(z)|^2,$$

где $r(z)$ — некоторый полином от z; A и B — константы.

Благодарю Б. В. Шабата за обсуждение заметки и И. М. Милина за полезное замечание, учтенное мною при доказательстве теоремы 1.

Смоленский педагогический
институт им. К. Маркса

Поступило в редакцию
15.VI.1965

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Б. Балк, Вырожденные бианалитические отображения, Известия Академии наук Армянской ССР, серия физико-математических наук, 17, № 2, (1964), 9–15.
2. В. С. Владимиров, Методы теории функций многих комплексных переменных, М., „Наука", 1964.
3. М. Бохер, Введение в высшую алгебру, ГТТИ, 1934.
4. М. Б. Балк, Теоремы единственности для полианалитических функций, Известия Академии наук Армянской ССР, серия физико-математических наук, 18, № 3 (1965).

PASTOVAUS MODULIO POLIANALIZINĖS FUNKCIJOS

M. BALK

(*Reziumė*)

Funkcija $f(z)$ vadinama n eilės polianalizine srityje D, jei ji yra atvaizduojama toje srityje šitaip:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k \varphi_k(z).$$

Čia $\varphi_k(z)$ $(k=0, 1 \ldots n-1)$ – analizinės srityje D, $z=x+iy$, $\bar{z}=x-iy$. Įrodoma, kad kiekviena funkcija $f(z)$, n eilės polianalizinė srityje D ir turinti pastovų modulį tam tikroje srities D dalinėje srityje d, yra atvaizduojama srityje D

$$f(z)=\lambda\cdot\overline{P(z)}/P(z).$$

Čia λ – konstanta, o $P(z)$ – ne aukštesnės už $n-1$ eilės polinomas nuo z.

POLYANALYTICAL FUNCTIONS OF CONSTANT MODULUS

M. BALK

(*Summary*)

A function $f(z)$ is called polyanalytical of the order n in the region D, if in D

$$f(z)=\sum_{k=0}^{n-1}\bar{z}^k\varphi_k(z),$$

($z=x+iy$, $\bar{z}=x-iy$, $\varphi_k(z)$ is analytical in D for $k=0, 1 \ldots n-1$. It is proved, that every function $f(z)$, which is polyanalytical of the order n in the region D and has a constant modulus in a subregion of D, can be written in such form

$$f(z)\equiv\lambda\cdot\overline{P(z)}/P(z),$$

where λ is a constant and $P(z)$ is a polynomial of z of the degree $n-1$.